

非圧縮性多相流場の解法 (MICS) による 自由水面流中の粒子輸送の数値解析

NUMERICAL PREDICTION OF PARTICLE TRANSPORTATION
IN FREE-SURFACE FLOWS WITH MICS

牛島 省¹・竹村 雅樹²・山田 修三³・後藤 孝臣⁴

Satoru USHIJIMA, Masaki TAKEMURA, Syuzo YAMADA and Takaomi GOTO

¹ 正会員 工博 京都大学大学院助教授 社会基盤工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

² 学生員 京都大学大学院 環境地球工学専攻 修士課程

³ 学生員 京都大学大学院 社会基盤工学専攻 修士課程

⁴ 正会員 工博 中部電力株式会社 越戸ダム管理所

The validity of the computational method for particle-laden liquid flows, MICS (Multiphase Incompressible flow solver with Collocated grid System), was shown through the comparison with experimental results in terms of unsteady wakes behind particles and interaction between particles and surrounding flows. In this paper, MICS is improved to the computational method for gas-liquid-solid multiphase flows in order to deal with the particle movements in the liquid flow with large deformation of the free surface. MICS is based on the computational method for incompressible flows, in which the treatment for density and mass conservation has been improved in the collocated grid. The external forces for the particles are evaluated from the results of the fluid computations and a model of the distinct element method (DEM). The MICS was applied to the particle movements in a free-surface flow and its applicability is discussed.

KeyWords : MICS, multiphase flow, free surface, incompressible flow,
particle-laden flow, DEM, collocated grid

1. はじめに

河川等における土砂輸送を評価する際に、流体の流れだけでなく、自由水面の影響を考慮する必要がある場合は少なくない。出水時の非定常流れによる土砂輸送あるいは水理構造物周辺の洗掘・堆砂を把握する場合、また排砂施設の機能の評価などを行う場合などには、自由水面の時間的・空間的な挙動が重要となる事例が見られる。

このため、本報では粒子と周囲流体の相互作用が無視し得ない大粒径の粒子を対象として、自由水面流れにおける粒子の微視的な挙動、すなわち個別の粒子の運動を適切に再現する数値解法について考察を行う。このような問題では、水面変形がある場合の流れを適切に取り扱うことに加えて、粒子周辺に発生する流れと、粒子に作用する流体力を正確に予測することが重要となる。流体中の粒子の運動を評価する解法として、BBO 方程式¹⁾等に従うモデル粒子を導入する手法が取られる場合があるが、この方法では粒子周囲の流れを正確に再現することができないことに加え、抗力係数などのモデル係数は平衡過程で得られているため、

この解法を非平衡過程に適用するのは適切でないという問題を有する²⁾。一方、分散相を連続体と仮定する二流体モデル³⁾等では、同様に粒子周辺の流れを正確に再現できず、しかも粒子の粒径が流体の格子スケールと同等以上となる場合にはモデル化が困難となる。

このような流体中の粒子運動を適切に扱う解法として、著者らは MICS (Multiphase Incompressible flow solver with Collocated grid System) を提案し、粒子周辺に生ずる非定常後流渦を再現できること、また粒子運動に対する流体渦の影響などが考慮できることなどを実験結果との比較等を通じて明らかにした^{4), 5)}。MICS では、非圧縮性流体解析法を粒子と流体の混合系全体に用いて粒子周辺の流れと粒子に作用する流体力を求める。本報では、この解法を気相も含めた固気液混相流れへ拡張し、空気と水の二流体流れである自由水面流れを扱うとともに、液相中の固体粒子の挙動を MICS による解法で予測するものとする。提案された解法を、回転支持された水槽内に生ずる水面が大きく変化する流れに適用し、水中の粒子の運動の再現性等について検討を加える。

2. 固気液多相流場に対する MICS

本報では、固気液の三相が混在する多相流場を対象とし、固体は剛体、また気体と液体は非圧縮性流体として扱える場合を考える。

大粒径の固体粒子が液相中を運動する場合の数値解法として、MICS が提案されている。MICS およびその解法の原理は、これまで非圧縮性の固液混相場⁴⁾ および非圧縮性の二流体流れ⁶⁾ に適用され、その妥当性が実験結果や理論解との比較を通じて検討されている。本報では、MICS を上記のような非圧縮性流体 (気相および液相) と固相から構成される固気液多相流場へ適用する場合の解法を考察する。

(1) MICS の解法の概要

図-1 に MICS の解法の概略的な手順を示す。MICS では、固体粒子に作用する流体力を求めるために、固体が占める領域を、物性値を適切に設定した流体領域として扱い、最初に固気液多相流れ場の全体 (以下、多相流場) に非圧縮性流体計算法を適用する。この結果から粒子に作用する流体力を求め、粒子の運動方程式の数値解を求める。運動方程式には、流体力の他に DEM のモデル⁷⁾ を利用して粒子間の接触力が求められ、これが粒子に作用する外力として考慮される。粒子運動の数値解を用いて、多相流場の $n+1$ ステップにおける流速と圧力が定められる。さらに、気相と液相の界面形状を求めるとともに、新しい時刻の粒子位置を定めて、次ステップの計算に移る。

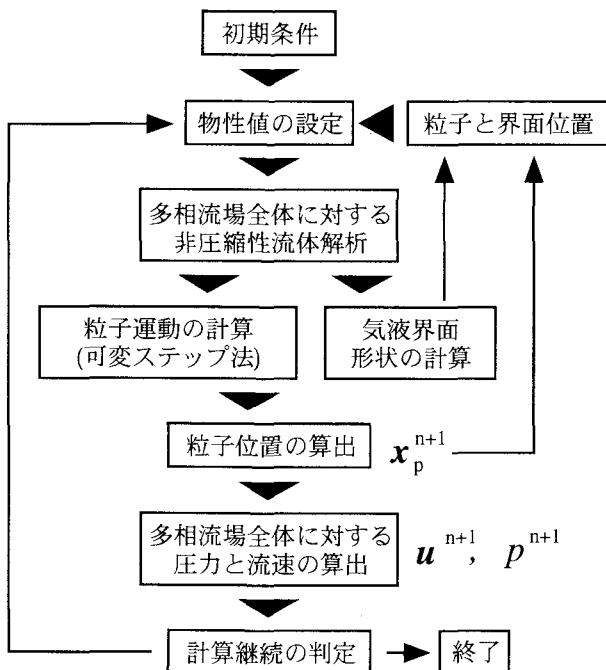


図-1 固気液混相場に対する MICS の解法の概要

(2) 多相流場に対する基礎方程式

多相流場に流体解析法を適用するために、まず計算セルに代表的な物性値を設定する。MICS では、粒子周辺の流れを捉えるために、計算セル幅を粒子径より十分小さく設定した Euler 格子を用いる。このため、図-2 に模式的に示すように、計算セルの全てあるいは一部が粒子領域に含まれる場合がある。また、気相と液相の界面がセル内に含まれる場合もある。このような状態を考慮して、セル内の物性値 ψ を次式より定める。

$$\psi = (1-f)\psi_g + \left(f - \sum_{P_k \in C} \alpha_k\right) \psi_l + \sum_{P_k \in C} \alpha_k \psi_{pk} \quad (1)$$

ここに、 ψ_g および ψ_l は、それぞれ気相および液相の物性値 (密度および粘性係数) であり、 ψ_{pk} は粒子 P_k の物性値を表す。 f は液相と固相が占める割合で、詳細については後述する。各相の密度は異なってもよいが、気相と液相、また同一の粒子内部の密度はそれぞれ一定であるとする。 α_k はセル C 内に占める粒子 P_k の体積割合である。 α_k は、計算処理を簡単にするため、粒子とセル境界が交差する点から構成される内接多角形から算出している。上記の手続きにより、多相流場は密度および粘性係数の分布を有する非圧縮性流体として表現される。

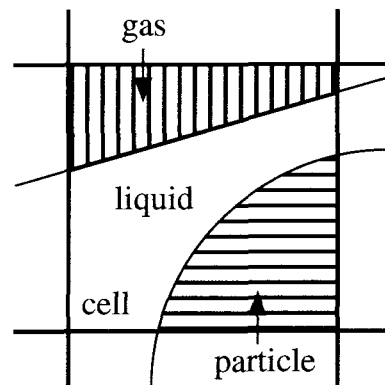


図-2 セル内に存在する各相

上記のようにして算出された多相流場の密度を ρ と表す。流れ場全体に対して、次の質量保存則が成り立つ。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (2)$$

ここで、 u_i は x_i 方向の流速成分である。

また、多相流場は非圧縮性流体としているので、次の非圧縮条件が成り立つ。

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3)$$

運動方程式として、非圧縮性 Newton 流体に対する Navier-Stokes 式を用いる。水と空気では、密度差が非常に大きいため、運動方程式としてブシネスク近似を用いない次式を利用する。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\delta_{i2}g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (4)$$

ここに、 μ は粘性係数、 p は圧力、 g は重力加速度である。 δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。直交座標系は x_2 軸を鉛直上向きに取る。

(3) 多相流場に対する非圧縮性流体解法

式 (4) を直交 Euler 格子上で離散化する。変数配置はコロケート格子⁸⁾に従うものとする。最初に、セル中心における流速の推定値 u_i^* を求める。推定値の計算における圧力の取り扱いは、圧力勾配を適切に評価するため CBP スキーム⁹⁾に基づくものとし、セル中心では圧力勾配を考慮しない。簡単のため時間差分に Euler 陽解法を用いると、次式より u_i^* が得られる。

$$u_i^* = u_i^n + \left(-u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} - \delta_{i2}g \right) \Delta t + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^n}{\partial x_i} \right) \right] \Delta t \quad (5)$$

ここで、移流項の離散化には 5 次精度の保存形 QSI スキーム (FVM-QSI スキーム)¹⁰⁾、拡散項には中央差分を用いる。

次に、 u_i^* をセル境界へ空間内挿し、圧力項を考慮する。

$$\hat{u}_i = u_i^* - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x_i} \Delta t \quad (6)$$

ここに、 $\hat{u}_i$ は u_i^* をセル境界へ空間内挿した値である。セル境界における $n+1$ ステップの流速成分 $\hat{u}_i^{n+1}$ は式 (3) を満足する必要がある。すなわち、

$$\frac{\partial \hat{u}_i^{n+1}}{\partial x_i} = 0 \quad (7)$$

また、 $\hat{u}_i^{n+1}$ に関して次式が成り立つとする。

$$\hat{u}_i^{n+1} = \hat{u}_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_f^{n+1}}{\partial x_i} \Delta t \quad (8)$$

ここで、 p_f^{n+1} は流体計算の段階で得られる圧力であり、 $n+1$ ステップの圧力 p^{n+1} は粒子運動の計算の後求められる。式 (6) と式 (8) より、次式が得られる。

$$\hat{u}_i^{n+1} = \hat{u}_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \Delta t \quad (9)$$

ここに、 $\phi = p_f^{n+1} - p^n$ である。式 (9) を式 (7) へ代入して次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_i} \quad (10)$$

この関係式を用いて、連続性を満足する流速成分と圧力場を求める。このために、C-HSMAC 法に基づき、次の関係式を用いて反復計算の k ステップの値を求める。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi^k}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \hat{u}_i^k}{\partial x_i} \equiv \frac{1}{\Delta t} D^k \quad (11)$$

$$p^{k+1} = p^k + \phi^k \quad (12)$$

$$\hat{u}_i^{k+1} = \hat{u}_i^k - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi^k}{\partial x_i} \Delta t \quad (13)$$

C-HSMAC 法による計算手順の詳細は前報¹¹⁾に示す通りである。計算終了後には、 $p^{k+1} = p_f^{n+1}$ 、 $\hat{u}_i^{k+1} = \hat{u}_i^{n+1}$ となり、すべての計算セルで連続性の誤差が D_0 より小さくなる。

セル中心における流速成分 u_{fi}^{n+1} は p_f^{n+1} を用いた PG スキーム⁹⁾に基づき、次式から求める。

$$u_{fi}^{n+1} = u_i^* - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_f^{n+1}}{\partial x_i} \Delta t \quad (14)$$

(4) 気液二流体の界面形状の解法

自由水面流れは、空気と水という二流体の流動現象と考えられる。水面近傍では、分子的なスケールでは明瞭な境界は存在しないが、水理学で通常用いられるマクロな視点に立てば、密度が異なる混合しない二流体が界面を介して存在すると考えることが可能である。

本報では、粒子は液相より比重が大きく、粒子の全ての部分は常に液相内に存在する場合を計算対象とする。このとき、粒子の密度を液相の密度と等しいと仮定し、気相と液相の密度を用いて密度 ρ を正規化することにより、セル内に占める固相部分を含んだ液相の割合 f を求めることができる。 f は 0 と 1 の間の値を取り、セル内の気相の割合は $1-f$ で与えられる。気液二流体界面の識別を行うため、式 (2) から導かれる次式を利用する。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial (f u_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (15)$$

自由水面の変動を伴う場合の流体計算法としては、水面形状に適合する格子系を生成する手法^{12), 13)}と、Euler 格子を用いて格子間に形成される密度や二流体を識別する関数 (以下、識別関数) の分布から界面の形状を特定する方法が主に利用されている。MICS で

は、後者の Euler 格子が用いられるが、この場合には界面形状に適合する格子を生成する必要がないため、界面が大きく変形する問題を取り扱うことが可能である。Euler 格子を用いる解法の代表的なものに VOF 法がある。この手法では識別関数の移流方程式を離散化して解くのではなく、計算セル周辺の流体の分布状況に応じて流体の移流過程を定めるモデルが利用される。VOF 法では液相側の挙動のみが解析対象となることが多い。これに対して、CUP 法¹⁴⁾のように、二流体を同時に計算する手法が提案されている。CUP 法は圧縮性および非圧縮性流体を同時に扱える手法とされる。しかし、式 (15) に相当する識別関数の移流方程式が非保存形の CIP スキーム¹⁵⁾で計算されるため、二流体の質量の保存性が満足されない。本報では、以上を考慮して、有限体積法に基づく風上法により式 (15) の離散化を行った。この解法により保存性は満足されるが、数値拡散が生ずる。後述する自由水面流れの計算例では、実験において碎波は起こらなかったため、保存性を満足するフィルタリングを行って数値拡散を防止した。

(5) 固体粒子運動の基礎式と解法

大粒径の固体粒子を含む流れ場に対して、非定常後流渦などの粒子周辺に生ずる流れを再現できること、また粒子に作用する流体力を、既往の質点モデルと異なり、抗力係数などのモデル係数を用いることなく予測できることが MICS の一つの特徴である⁴⁾。

粒子の並進運動の運動方程式には、外力として流体力と浮力に加えて、他の粒子あるいは壁面との接触力が考慮される。すなわち、

$$m \frac{\partial v_i}{\partial t} = f_i + g_i + h_i \quad (16)$$

ここに、 m および v_i はそれぞれ粒子の質量と x_i 方向の速度成分であり、右辺の f_i , g_i , h_i はそれぞれ流体力、浮力および接触力を表す。また、角運動量の方程式は次式で与えられる。

$$I \frac{\partial \omega}{\partial t} = m_f + m_c \quad (17)$$

ここに、 I は粒子の慣性モーメント、 ω は角速度であり、右辺の m_f および m_c はそれぞれ流体から受けるモーメントと接触力により生ずるモーメントを表す。

粒子に作用する流体力 f_i は、流体の運動方程式から導かれる力の成分を用いて定める。粒子 P_k が、その一部を含むセル C から受ける流体力 f_{Ci} は、式 (4) に基づき、次式から求められる。

$$f_{Ci} = \alpha_k \Delta V \sigma_k \left[-u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \mu \left(\frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^n}{\partial x_i} \right) \right] \quad (18)$$

ここに、 ΔV はセルの面積、 σ_k は粒子 P_k の密度である。また、流体力はセル中心で計算される値とする。粒子 P_k の一部を含む全てのセルに対して f_{Ci} を求め、その和を f_i とする。 m_f も同様の手順により各セルのモーメントの和として求められる。

次に、接触力 h_i は、個別要素法⁷⁾で用いられるモデルと同様に扱う。粒子は、他の粒子や壁面 (以下対象物) と接触しても形状は不変で、対象物とオーバーラップするものとする。粒子の重心点から接触面へ向かう単位法線ベクトルを $\mathbf{n}$ とするとき、 $\mathbf{n}$ 方向に作用する力 $\mathbf{F}_n$ は次式で表される。

$$\mathbf{F}_n = -[k_n d\gamma_n - \eta_n (\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n})] \mathbf{n} \quad (19)$$

ここに、 k_n , γ_n および η_n はモデル定数、 $d\gamma_n$ は $\mathbf{n}$ 方向のオーバーラップの深さである。モデル定数は前報⁴⁾と同様に定めた。また、粒子と対象物の速度ベクトルをそれぞれ $\mathbf{v}_n$ および $\mathbf{v}_m$ とするとき、相対速度ベクトル $\mathbf{v}_r$ は $\mathbf{v}_m - \mathbf{v}_n$ で与えられる。

次に、 $\mathbf{n}$ に直交し、接触面において粒子の回転の正方向に向かう単位ベクトルを $\mathbf{t}$ とする。 $\mathbf{v}_t$ を $\mathbf{t}$ 方向の相対速度ベクトルとすると、 $\mathbf{v}_t$ は回転を考慮して評価される。この $\mathbf{v}_t$ を用いて、接触面で $\mathbf{t}$ 方向に作用する力 $\mathbf{F}_t$ は次式で与えられる。

$$\mathbf{F}_t = [k_t d\tau \gamma_t - \eta_t v_t] \mathbf{t} \quad (20)$$

ここで、 k_t , γ_t および η_t はモデル定数である。

上記で求められた流体力と接触力、そしてモーメントを用いて、式 (16) および式 (17) により、粒子の速度成分と角速度が計算される。なお、粒子が対象物と接触する場合には、安定な計算を行うために、振動系の固有振動数を考慮して、可変時間ステップ法⁴⁾による粒子の運動方程式の数値積分を行う。

(6) 多相流場の $n+1$ ステップの流速と圧力

粒子運動の計算においては、式 (16) と式 (17) の離散化式から $n+1$ ステップにおける速度成分と角速度、また粒子位置が得られる。この結果を用いて、セル C 内に占める粒子 P_k の体積割合 α_k を新しい粒子位置に基づいて計算する。

これらの結果に、式 (14) で得られた u_{fi}^{n+1} を用いて、式 (1) と同様のセル内の加重平均を行うことにより、セル C の中心で定義される u_i^{n+1} を得る。また、圧力に関しては、まず粒子 P_k 部分の平均圧力 p_{pk} を求め、式 (1) と同様にしてセル C における p^{n+1} を定める⁴⁾。

以上より、多相流場における新しい時刻の流速成分と圧力が得られるので、非圧縮性流体の解法を再び計算領域全体に適用する。この計算手順を所定の時刻まで繰り返すことで、固気液混相流場の計算を進める。

3. 自由水面流中の粒子輸送への適用

(1) 水面変動を伴う流れ場の粒子輸送の実験

自由水面の大きな変動を伴う水流中の粒子運動を把握するための実験を行った。水面変動とそれに伴う流れを起し、これにより輸送される粒子の2次元的な挙動を計測するため、図-3に示すような底面勾配を短時間で変化させることが可能な水槽を利用した。

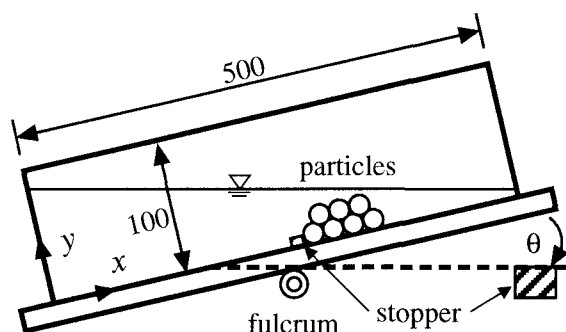


図-3 実験水槽の概略 (単位は mm)

長さ500 mm、高さ100 mm、奥行き60 mmの水槽は、支点を中心に回転する台の上に置かれている。水槽内には所定の量の水が満たされており、実験の初期条件においては水路底面と水平面のなす角度 θ は約8度である。水槽内には直径 D が10 mm、軸方向長さ50 mmの亚克力製（比重約1.2）の円柱（以下粒子と表記）が7本重ねて設置されている。粒子はストッパーにより左方向（ $-x$ 方向）には移動しないが、水面変動と流れが生じたときに x 方向へ移動できるように設定されている。初期状態における左端の粒子中心の位置は、 $x = 310$ mmである。上記のような初期状態から、約0.2秒の時間内に水槽全体を底面が水平になるまで回転させる。その結果、水槽内には自由水面の大きな変動を伴う流れが発生して、これにより粒子が移動する。実験では、側面から粒子の運動と水面形をビデオカメラにより撮影した。

(2) 計算結果の比較

上記の実験を対象として、MICSによる数値計算を行った。計算セル数は 200×40 であり、粒子径はセル幅の4倍に相当する。図-4に計算結果を示す。粒子の挙動が明確になるよう、水槽右端側の結果を拡大して各時刻ごとに示した。図中の曲線は自由水面に相当し、それより上方は空気、下方は水の領域である。

また、図-5に実験結果を示す。水槽底面の勾配が急変したことに伴い、水槽右端に向かう流れが生じ、右端付近の水面が上昇する。このときの流れにより、図-5(a)に示すように、最初に上部の3個の粒子が離脱する。このときの粒子の運動と水面形状の関係は図-4(c)の計算結果でも再現されている。ただし、実験で

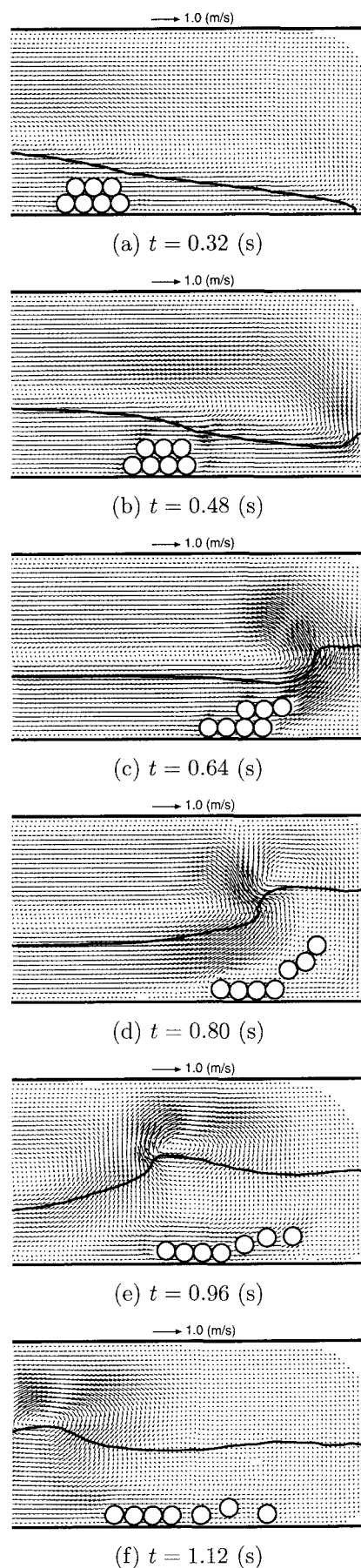


図-4 計算結果 (水槽右端, 高さは100mm, 縦横比は1)

は図-5 (b) のように下部の粒子の一部も浮き上がるが、計算ではこれらの粒子の上昇はほとんど見られない。その後、実験結果では左方向へ向かう波動とそれに伴う流れに押し戻され、浮き上がった粒子は底面へ降下する。計算結果では、粒子群の左方向への移動が実験結果よりやや大きくなっている。このように、実験結果と比較すると細部に相違が見られるが、実験においても粒子の運動にはある程度のばらつきが観察されている。このため、本報で提案した手法により、自由水面の変形と粒子の運動の本質的な部分は、ほぼ満足に計算で再現されていると考えられる。

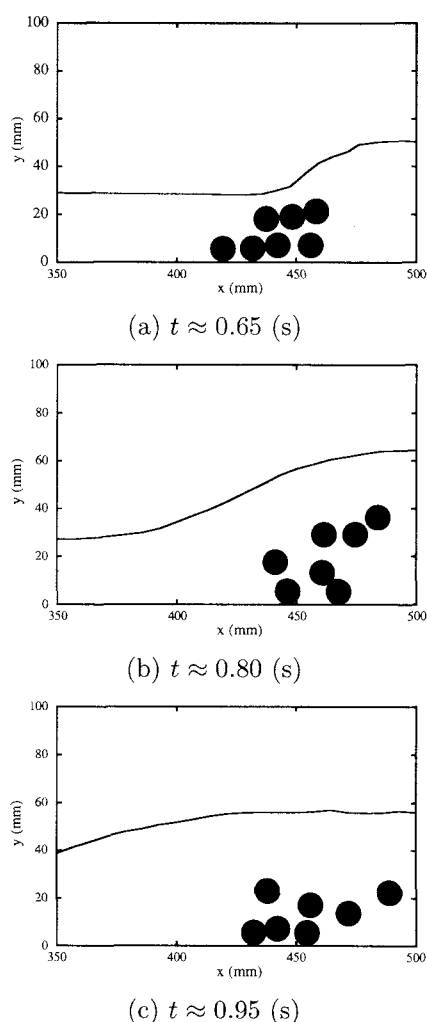


図-5 実験結果 (水槽右端)

4. おわりに

本報では、固気液多相流場へ MICS を拡張し、水面変形を伴う流れによる粒子の輸送問題に適用して、現象の再現性を検討した。今後、より詳細な実験結果を取得することにより、粒子周辺の水の流れや空気の流れも含めた検証を進める必要があると考える。

参考文献

- 1) Hinze, J. O.: *Turbulence*, McGraw-Hill, 1975.
- 2) 牛島省, 竹村雅樹, 山田修三, 瀬津家久: 流体力評価精度の高い DEM の提案と底質粒子初期移動過程への適用, 海岸工学論文集 (掲載予定), Vol. 50, , 2003.
- 3) 森岡茂樹: 混相流体の力学, 朝倉書店, 1991.
- 4) 牛島省, 竹村雅樹, 山田修三, 瀬津家久: 非圧縮性流体解析に基づく粒子 - 流体混合系の計算法 (MICS) の提案, 土木学会論文集, No. 740/II-64, pp. 121-130, 2003.
- 5) 牛島省, 竹村雅樹, 山田修三, 瀬津家久: 多相流場に対する統一的解法に基づく移動物体周囲の非圧縮性流体の数値解析法, 応用力学論文集, Vol. 6, pp. 883-890, 2003.
- 6) 牛島省, 吉田圭介, 瀬津家久: 非圧縮性混相流場に対する数値解法と水-シリコンオイル成層流への適用性に関する考察, 応用力学論文集, Vol. 6, pp. 891-898, 2003.
- 7) Cundall, P. A. and Strack, O. D. L.: A discrete numerical model for granular assemblies, *Geotechnique*, Vol. 29, No. 1, pp. 47-65, 1979.
- 8) Rhie, C. M. and Chow, W. L.: Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation, *AIAA Journal*, Vol. 21, pp. 1525-1532, 1983.
- 9) 牛島省, 竹村雅樹, 瀬津家久: コロケート格子配置を用いた MAC 系解法の計算スキームに関する考察, 土木学会論文集, No. 719/II-61, pp. 11-19, 2002.
- 10) 牛島省, 吉田圭介, 竹村雅樹, 瀬津家久: フラックス制御を利用する移流方程式の 5 次精度保存形式スキーム, 土木学会論文集 (掲載予定), No. 747/II-65, 2003.
- 11) 牛島省, 奥山洋平, 竹村雅樹, 瀬津家久: 3 次元一般座標系における圧力場の並列計算法の提案, 水工学論文集, Vol. 47, pp. 385-390, 2003.
- 12) 音田慎一郎, 細田尚, 木村一郎: 鉛直加速度を考慮した水深積分モデルの改良と多次元数値解析結果を用いた検証について, 水工学論文集, Vol. 46, pp. 589-594, 2002.
- 13) 牛島省, 瀬津家久: 移動一般座標系を用いたコロケート格子による自由水面流れの数値解析手法, 土木学会論文集, No. 698/II-58, pp. 11-19, 2002.
- 14) Yabe, T. and Wang, P. Y.: Unified numerical procedure for compressible and incompressible fluid, *J. Physical Soc. Japan*, Vol. 60, No. 7, pp. 2105-2108, 1991.
- 15) Yabe, T. and Aoki, T.: A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation I. One-dimensional solver, *Computer Physics Communications*, Vol. 66, pp. 219-232, 1991.

(2003.9.30 受付)