

複雑境界上乱流のフィルタ平均と LES

FILTERING AND LES OF TURBULENT FLOW OVER COMPLEX BOUNDARY

中山 昭彦¹・崎尾幸司²

Akihiko NAKAYAMA and Koji SAKIO

¹正会員 Ph.D. 神戸大学大学院教授 自然科学研究科地域空間創生科学専攻(〒657-8501 神戸市灘区六甲台町1-1)

²株式会社クレイドル (〒532-0011 大阪市淀川区西中島 6-1-1)

Formal explicit filtering defined by the convolution integral over a flow region has been applied to derive fundamental equations of Large Eddy Simulation (LES) for turbulent flows over complex boundaries that are common in natural environment, in which details of the flow and the boundary geometry cannot be resolved in full and modeling is needed. Formal filtering in finite and complex domain allows filtering of the flow and boundary at the same time and indicates that extra stress-like terms appear in the equations. DNS data obtained in a flow over wavy boundary are analyzed to examine the distributions of these terms and a similarity in the filtered flow that may be useful in formulating boundary conditions in a simulation calculation that does not resolve the details of the boundary. It is found that the filtering brings out the effects of the roughness of the boundary as additional stresses, most of which come from the contribution of the pressure forces on the original boundary.

Key Words : complex boundary, turbulent channel flow, LES

1. はじめに

地形上気流や実河川などの実スケールの乱流を解析する場合, 理論的にしろ数値的にしろ, 対象とする流れ領域の形状は何らかの簡略化が必要である。流れに影響するであろう形状を的確に表現すれば, 詳細は多少異なっても現象は捉えられる。地形の起伏や河床形状の詳細を全て考慮することは不可能であるし, また小さな石などまで解像するのは無意味である。通常, 小さなスケールの凹凸は粗度として扱い, 比較的大きいスケールの起伏は流れ場の形状として解析する。しかし, 実地形はいろいろなスケールの起伏からなっており, どのスケールが粗度でどのスケールが形状であるかの区別は容易でない。省略される凹凸のスケールは計算格子の解像度に依存するはずであるがその理論的基準は明らかでない。Large Eddy Simulation(LES)法(例えば参考文献1))では流れ内のいろいろなスケールの乱れを計算格子の大きさにより系統的に平均化し, 解像可能なスケールの運動を正確に再現するもので, 複雑な乱流のより一般的な解析法となりつつある。この概念を複雑な境界形状の

流れに適用すれば, 乱流運動の平均化のみならず境界形状も系統的に平滑化できると考えられる。植生キャノピー内流れのモデル化に, 細かい枝葉などの影響を統計的に扱うのと似ているが²⁾, フィルタ平均の手法を導入することで, 境界条件などを厳密に定式化できる。

LESでは瞬時運動方程式にフィルタ平均を施すことにより, フィルタ平均量についての支配方程式を理論的に導ける。その結果は, 通常の3次元非定常の運動方程式と変わらないが, 付加されるサブグリッドスケール(SGS)応力をモデル化すれば良いということである。従って普通数値計算では陽的にフィルタ平均する必要はないが, 最近SGS 応力のモデルなどに陽的フィルタ操作を施すものも幾つか提案されている^{3), 4)}。

本研究では境界の平滑化を乱れの空間フィルタリングと同じレベルで行い, 複雑境界上乱流のLES解析法の理論的基礎を築くことを目的とする。まず運動方程式及びその領域にフィルタ平均を施すことにより, フィルタ平均量の基礎式とそれが適用される領域を定める式を導出する。次に直接数値シミュレーション(DNS)結果を用い, 境界のフィルタリングにより乱流諸量がどう影響されるかを詳しく調べ, これらの効果のモデルの構

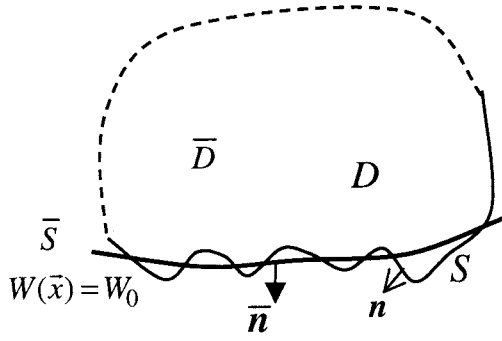


図-1 複雑境界の平滑化

案に必要な相関関係、及び傾向などを検討する。

2. 複雑流れ場のフィルタリング

LES法では計算格子で解像できる大スケール運動は直接解き、解像できない小スケール乱れは平均し、モデル化する。基礎式は連続の式と運動方程式に空間フィルタ平均を施して得られる。このとき境界形状あるいは境界の位置は厳密に与えられ厳密に表現できるとされる。しかし上に述べたように、用いる計算格子が境界の形状の細かい凹凸を解像できない場合、境界の平滑化も必要である。ここでは流れと境界とを同じ操作によりフィルタ平均することを考える。

図-1のような境界面 S で囲まれた半無限の流れ領域 D を考える。 D 内の点 $\mathbf{x}$ で定義される物理量 $f(\mathbf{x})$ のフィルタ平均 $\overline{f(\mathbf{x})}$ は次のような空間積分で与えられる

$$\overline{f(\mathbf{x})} = \iiint_D G(\mathbf{x}, \xi) f(\xi) d\xi. \quad (1)$$

ここで G は

$$\iiint_D G(\mathbf{x}, \xi) d\xi = 1, \quad G(\mathbf{x}, \xi) \geq 0 \quad (2)$$

の条件を満たすフィルタ関数で、 D が無限領域の場合 Gaussian関数やtophat関数などが用いられる。 D が半無限あるいは有限領域の場合、対称なカーネル関数 $w(\mathbf{x}-\xi)$ を流れ領域内の重みの合計で正規化した

$$G(\mathbf{x}, \xi) = \frac{w((\mathbf{x}-\xi)/\Delta)}{W(\mathbf{x})}, \quad W(\mathbf{x}) = \iiint_D w\left(\frac{\mathbf{x}-\xi}{\Delta}\right) d\xi \quad (3)$$

がこの条件を満たす。 Δ はフィルタ幅で一般に $\mathbf{x}$ あるいは方向により異なっても良いが、ここでは一定の場合を考える。式(1)及び(3)で定義されるフィルタ平均をベクトル関数 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ の発散に適用すると

$$\begin{aligned} \overline{\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x})} &= \iiint_D G(\mathbf{x}, \xi) \nabla_\xi \cdot \mathbf{F}(\xi) d\xi \\ &= \iint_S G(\mathbf{x}, \xi) \mathbf{F}(\xi) \cdot \mathbf{n} dS_\xi - \iiint_D \nabla_\xi G(\mathbf{x}, \xi) \cdot \mathbf{F}(\xi) d\xi \\ &= \iint_S G(\mathbf{x}, \xi) F_n(\xi) dS_\xi + \iiint_D \frac{\nabla_x (w(\mathbf{x}-\xi)/\Delta)}{W(\mathbf{x})} \cdot \mathbf{F}(\xi) d\xi \\ &= \iint_S G(\mathbf{x}, \xi) F_n(\xi) dS_\xi + \iiint_D \nabla_x G(\mathbf{x}, \xi) \cdot \mathbf{F}(\xi) d\xi \\ &\quad + \frac{\nabla_x W}{W} \iiint_D G(\mathbf{x}, \xi) \cdot \mathbf{F}(\xi) d\xi \\ &= \overline{F_n}^S(\mathbf{x}) + \nabla \cdot \overline{\mathbf{F}(\mathbf{x})} + \frac{\nabla_x W}{W} \cdot \overline{\mathbf{F}(\mathbf{x})} \end{aligned} \quad (4)$$

となる。ここで $\mathbf{n}$ は S の外向き法線方向単位ベクトル、 F_n は $\mathbf{F}$ の $\mathbf{n}$ 方向成分、 ∇_x, ∇_ξ はそれぞれ $\mathbf{x}, \xi$ につ

いてのベクトル微分演算子、右辺第1項の $\overline{F_n}^S$ は $\mathbf{F}$ の S 上でのフィルタ平均である。右辺最後の項は W の変化によるもので境界近傍でのみ値を持つ。フィルタ平均される領域($w>0$ の領域)が完全に境界内にある場合は $W=1$ で、完全に境界の外に出る場合 $W=0$ となる。従って W が0と1の間の値をとる位置は境界近傍にあり、 ∇W は境界の垂直外向き方向のベクトルになる。そこで $W=W_0=\text{Const}$ で定義される面をフィルタ平均された境界面($\bar{S}$)とし、その外向き単位法線方向ベクトルを $\bar{\mathbf{n}}$ (図-1)とすると

$$\frac{\nabla W}{W} \cdot \overline{\mathbf{F}(\mathbf{x})} = \frac{\nabla W}{|\nabla W|} \frac{|\nabla W|}{W} \cdot \overline{\mathbf{F}} = -\chi \bar{\mathbf{n}} \cdot \overline{\mathbf{F}} = -\chi \overline{F_n}^{\bar{S}} \quad (5)$$

と書ける。ここで χ はフィルタ関数と境界の位置と形状にのみにより決まるパラメータで、境界位置からフィルタ幅以内の領域で値をもつ。この関係を用いると式(4)は

$$\overline{\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x})} = \nabla \cdot \overline{\mathbf{F}(\mathbf{x})} + \overline{F_n}^S - \chi \overline{F_n}^{\bar{S}} \quad (6)$$

となる。すなわち発散のフィルタ平均はフィルタ平均の発散に境界法線方向成分の境界面での面積分(右辺第2項)及び流れ領域の変化による修正項(右辺第3項)の差を補正したものである。第2、第3項はいわゆる commutation error に相当する⁹⁾。

またスカラー関数 $f(\mathbf{x})$ の勾配は、 $\nabla f = \nabla \cdot (f\mathbf{I})$ であるので、 $f\mathbf{I}$ について式(6)を適用すると、同様な関係が導け

$$\overline{\nabla f(\mathbf{x})} = \nabla \overline{f(\mathbf{x})} + \overline{f\mathbf{n}}^S - \chi \overline{f\mathbf{n}}^{\bar{S}} \quad (7)$$

となる。

以上の関係より非圧縮流の連続の式及び運動方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (9)$$

のフィルタ平均をとると

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = \chi \bar{u}_n \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{u}\mathbf{u}}) - \chi \overline{\mathbf{u}\mathbf{u}}_n = & -\frac{1}{\rho} \left(\nabla \bar{p} + \overline{p\mathbf{n}}^S - \chi \overline{p\mathbf{n}} \right) \\ & + \nu \left(\nabla \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial n}^S - \chi \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial n} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

が得られる。式(10)は、境界が平滑化される場合、フィルタ平均の発散は必ずしもゼロではなく境界近傍で湧き出しまたは吸い込みがあることを意味する。式(11)は

$$\nabla \bar{\mathbf{u}} = \nabla \bar{\mathbf{u}} + \overline{\mathbf{u}\mathbf{n}}^S - \chi \overline{\mathbf{u}\mathbf{n}} = \nabla \bar{\mathbf{u}} - \chi \overline{\mathbf{u}\mathbf{n}} \quad (12)$$

であるので、通常のSGS応力 τ 及び、面平均の項を

$$\tau = \rho(\overline{\mathbf{u}\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}), \quad (13)$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\rho} \overline{p\mathbf{n}}^S, \quad \mathbf{T} = \nu \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial n}^S \quad (14)$$

のように定義すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}) = & -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \nabla \cdot (\nu \nabla \bar{\mathbf{u}} - \tau) \\ & + \mathbf{P} + \mathbf{T} + \chi \left(\overline{\mathbf{u}\mathbf{u}}_n - 2\nu \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial n} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

が得られる。この式の第1行目は通常のLES式と同一であるが、境界が平滑化される場合、2行目が追加され、圧力の面平均項 $\mathbf{P}$ 、摩擦応力の面平均項 $\mathbf{T}$ 及び χ に依存する項が付加されることを意味する。2行目最後の χ の掛かった項であるが、最初の項は境界法線方向速度および粘性による運動量の輸送で、どちらも $\mathbf{P}, \mathbf{T}$ に比べると小さいと推察される。従って、モデリングの必要なのは元の境界にかかる圧力と摩擦応力で、前者はいわゆる形状抵抗にあたるものである。

3. DNS瞬時データのフィルタリング

(1) DNSの概要

前節では複雑な境界がフィルタリングにより平滑化できるが、それにより境界近傍で値を持つ項が付加されることが示された。この付加項は瞬時壁面圧力や摩擦応力を含み、実験で求めることは不可能に近いが、直接数値シミュレーション結果から評価することは可能である。著者ら^{6, 7)}は図-2に示すような大小二種の正弦波の重ね合わせである底面の開水路乱流のDNSを行ったが、ここではこのシミュレーションデータのフィルタ平均をとることにより、境界の平滑化や付加項を厳密に評価する。

DNS計算は、完全発達したフルード数が実質ゼロの開

No. grids	$L_x \times L_y \times H$	λ	δ	λ'	δ'	Re_H
192x128x96	3x2x1	1.0	0.05	0.2	0.02	6760

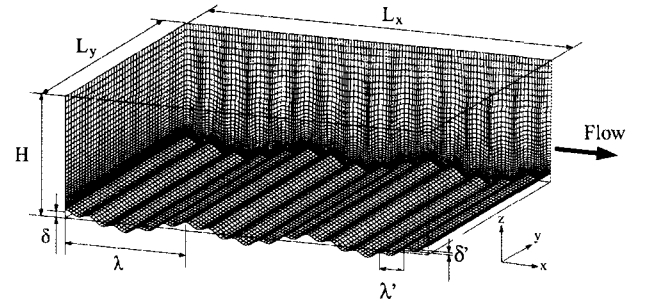


図-2 波状面上の乱流のDNS

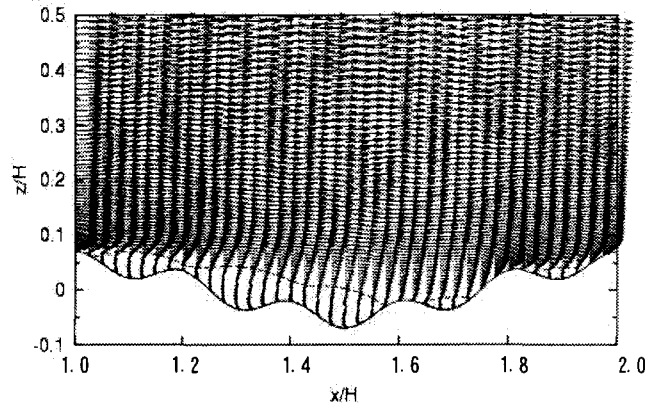


図-3 中央 1/3 区間の平均流速ベクトル分布

表-1 フィルタサイズ

フィルタ	フィルタサイズ
F1	$\lambda' \times \delta' \times \delta'$
F2	$2\lambda' \times 2\delta' \times 2\delta'$
F3	$\lambda \times 2\delta \times 2\delta$

水路等流について行われ、路床形状は水深1に対し大スケール波の波長 $\lambda=1$ 振幅 $\delta=0.05$ 、その上に波長 $\lambda'=0.2$ 振幅 $\delta'=0.02$ の小スケール波が重ね合わさったものである。水深 H と断面平均流速 U_m を基にしたレイノルズ数は6760である。詳細は参考文献^{6, 7)}に報告されているのでここでは概要の記述のみにする。中央 1/3 区間 ($1.0 < x/H < 2.0$), 下半部 ($-0.1 < z/H < 0.5$) の平均流速ベクトルを図-3に示す。本正弦波底面では大スケール波の山から下流にかけ逆流域が存在し、また個々の小スケール波の山の下流側でも小スケール逆流域が存在する。小スケール波のない場合のシミュレーションはMaass & Schumann⁸⁾ により行われているが、本DNSはそのケースについても行われ、結果の一致が確認されている⁶⁾。また

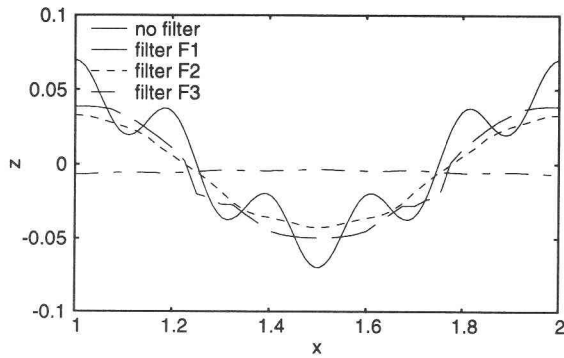


図-4 境界の平滑化

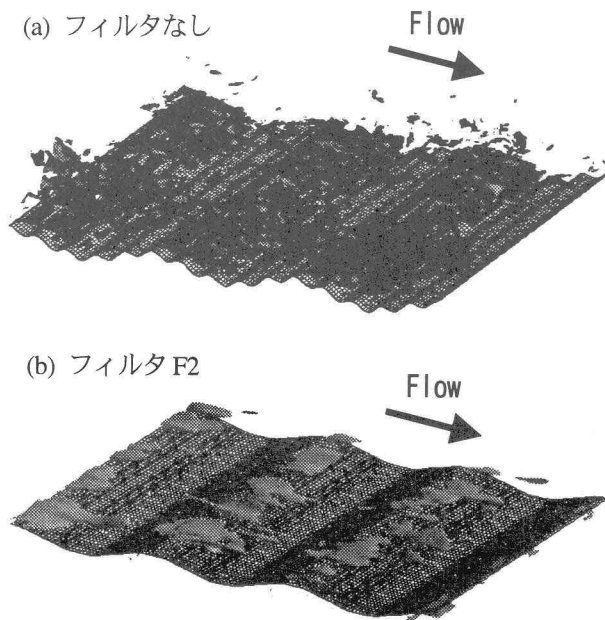


図-5 フィルタ平均された流れの渦構造 (速度勾配テンソル第2不変量の等値面)

剥離流線が破線で示されているが、この形状は実際の境界形状の逆位相になっているのが注目される。

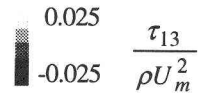
(2) 流れと境界のフィルタリング

DNS瞬時データに、先に述べたようなフィルタ平均を陽的に施すことにより、フィルタ平均量、平滑化された領域及びLES基礎式中の付加項を評価することができる。解析に使用するフィルタはいろいろ考えられる。Dynamicサブグリッドモデル³⁾のように陽的フィルタを用いるLES法では近似積分の可能なGaussianフィルタがよく用いられるが、ここでは表-1に示すような3種のサイズの矩形のtophatフィルタを w に用いる。図-4はこれらフィルタを上DNSの行われた流れ場に適用したとき $W=0.5$ で定義される平滑化された境界形状を示す。フィルタF1はサイズが $\lambda' \times 8' \times 8'$ でちょうど小スケール波

(a) フィルタ F1



(b) フィルタ F2



(c) フィルタ F3

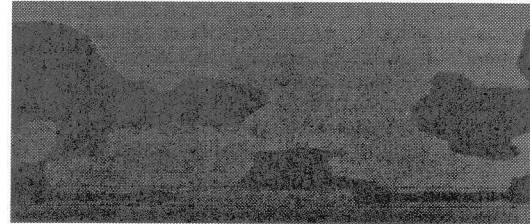


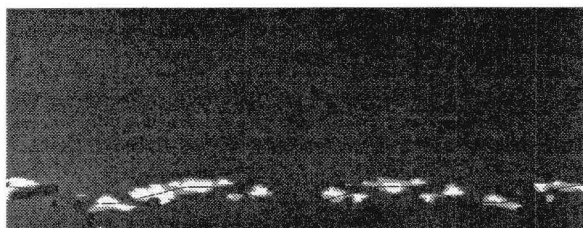
図-6 フィルタ平均によるサブグリッド応力

の波長と振幅と等しい。F2はその2倍の $2\lambda' \times 28' \times 28'$ で、小スケール波の影響がほとんど平均化されるもの、F3はその5倍の $5\lambda' \times 58' \times 58' = \lambda \times 28 \times 28$ で大スケール波の影響も平均化してしまうものである。最も小さいサイズのフィルタの場合、 $x=1.25$ 及び 1.75 あたりで矩形tophatの影響によりやや角張った形状になっている。

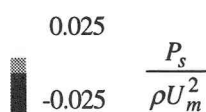
図-5は瞬時の流れ場とそのフィルタ平均場の渦構造を速度勾配テンソルの第2不変量であらわす。この方法は同様な波状チャンネル流の解析にも用いられている¹⁰⁾。フィルタはF2でちょうど小スケール波の2倍で大スケール波よりは小さいものである。底面は $W=0.5$ で定義される平滑化された境界面である。渦の詳細が平均化され平たくなっているのと同時に境界形状の小スケール波も平滑化されているのが分かる。LESではこのなまった渦構造の流れを解析対象にすることになる。

図-6は瞬時流れ場の流速ベクトル、それをフィルタ平均することにより発生する通常のSGS応力の全領域での分布を示す。平滑化された境界も示してある。用いられたフィルタは先に説明した3種のもので、図示されているのはせん断応力成分 $\tau_{13} = \rho(\overline{uw} - \overline{u}\overline{w})$ である。SGS応力は流れ全域に分布し、瞬時流速の変化の激しいとこ

(a) フィルタ F1



(b) フィルタ F2



(c) フィルタ F3

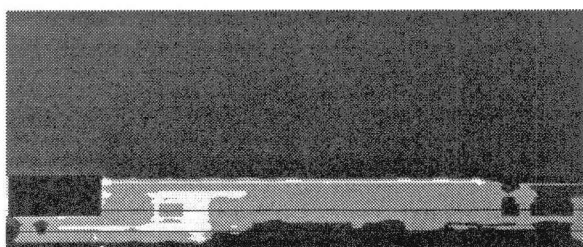
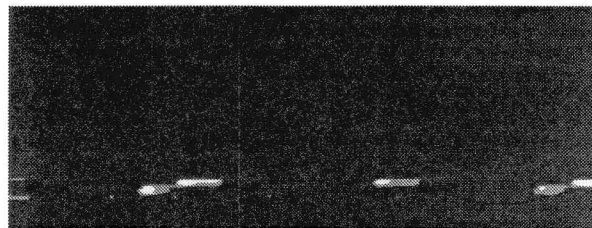
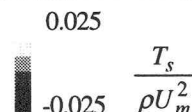


図-7 壁面圧力のフィルタ平均による境界近傍付加項

(a) フィルタ F1



(b) フィルタ F2



(c) フィルタ F3

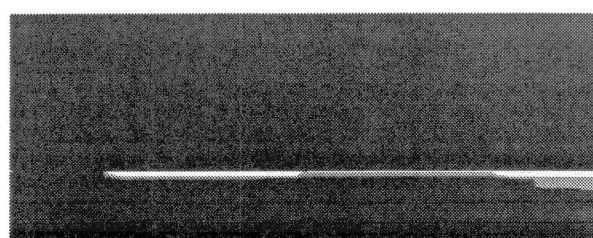


図-8 壁面せん断応力のフィルタ平均による境界近傍付加項

ろで大きくなっている。フィルタサイズに対応した変化が見られる。絶対値は F2 のケースが最も大きくなっており、F3 では大きいサイズでフィルタリングされるので全体に広がった分布になっている。

(3) 付加項の評価

次に境界平滑化による付加項を評価する。図-7 は境界近傍で重要になる付加項 P の、平滑化された境界の接線方向の成分 P_s の分布を示す。値は正、負両方とり、フィルタサイズが増大するに従い、分布する領域が広がっている。絶対値は通常の SGS 項 (図-6) より大きい値になっておりこの項の重要性が分かる。F3 の結果では上流端の底面近傍で負の値をとりそこから下流ではなだらかに変化しているのが見られる。これに対し、図-8 はせん断応力に起因する応力の接線方向成分 T_s である。まず注目されるのは、絶対値は P_s の比べかなり小さいという点、もうひとつは、フィルタサイズが大きくなるにつれ、絶対値も分布する領域が減少していることである。これは平滑化された境界の接線方向にかかる抵抗は、不規則に

変化する境界にかかる応力の平均的合力で、それには圧力が大きく寄与することを意味している。これは時々刻々変動する乱流場の一例にしか過ぎないが典型的な傾向は表わしていると考えられる。いわゆる形状抵抗を直接シミュレーションより評価していると考えられる。植生抵抗のモデリングなどでは、形状抵抗係数を一定としてモデル化される²⁾。本 DNS データからこの抵抗係数を推定したが、レイノルズ数が十分でないためか、一定値というより、局所流速に依存する遷移領域の抵抗係数の傾向が見られた。

(4) フィルタ平均流速の相似性

フィルタ平均された流速が境界近傍で相似性があれば LES 計算に有用である。

図-9 にフィルタ平均流速をフィルタ平均した境界面上での接線方向応力の平方根で定義される摩擦速度

$$u_* = \sqrt{T_s / \rho} \quad (16)$$

で値の等値線図を示す。図-9 (a) は F2 のフィルタをかけ

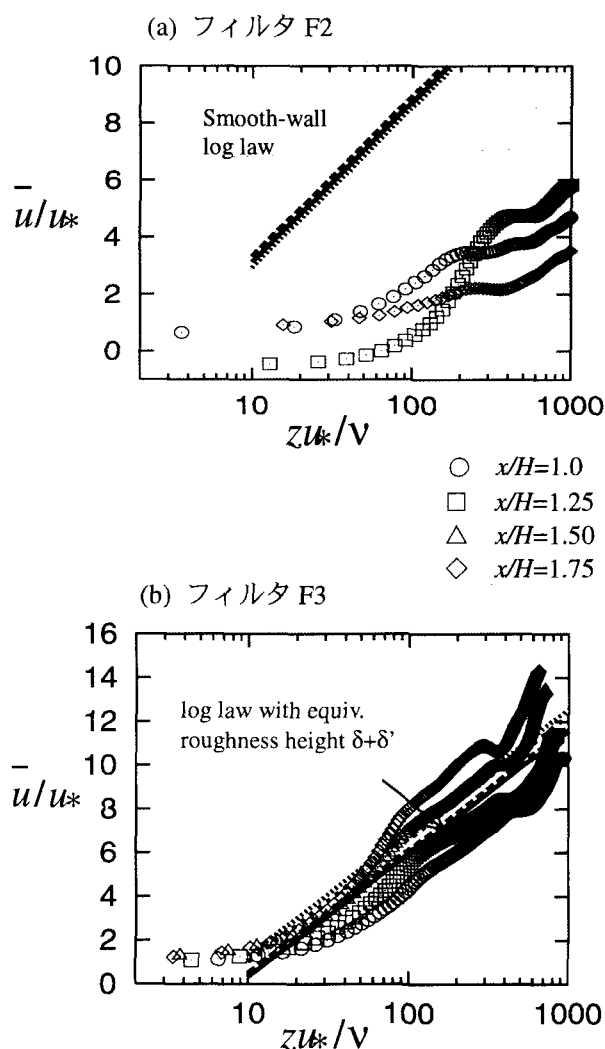


図-9 瞬時フィルタ平均流速の対数プロット

たものである。滑面の対数則に比べかなり下方にずれているが、大スケール波上の流れに小スケール波の高さに対応した粗度の影響と解釈できる。図-9 (b) は大スケール波をも平均化してしまう F3 フィルタの結果である。この図には等価粗度高さが全体の振幅 $\delta + \delta^*$ の平坦な粗面の対数則も併せてプロットしているが、4箇所の流速分布は、滑面对数則よりこの対数則にかなり近いプロファイルになっている。多少上下のばらつきがあるが、これはフィルタより大きいスケールの乱れの影響と考えられる。

4. 結論

複雑な境界上の乱流をラージ・エディ・シミュレーション法で扱う場合の境界形状の取扱い方について、直接数値シミュレーションで求められた詳細

なデータをもとに詳しく検討した。理論的には複雑流れ場のフィルタ平均量の基礎式には、流れ領域内で表れるサブグリッドスケール応力項以外に、境界近傍で粗度による抵抗に似た形の付加項が必要になることを示した。この項の大きさや分布は直接シミュレーションデータより詳細に解析し、評価した。壁面の凹凸は一般に形状抵抗として扱われるが、本解析によりその形状抵抗が、瞬時局所圧力の面平均からの寄与が卓越し、面の接線方向に働くせん断応力の寄与は非常に小さいことが定量的に明らかにされた。しかし、レイノルズ数が十分大きくないためか抵抗係数は一定でなく、局所流速依存性が見られた。またフィルタ平均された流速分布の相似性は、フィルタ平均された壁面応力に強く依存することも判明した。

参考文献

- 1) 大宮司久明, 三宅裕, 吉澤徹: 乱流の数値流体力学—モデルと計算法, 東京大学出版会, 1998.
- 2) Yamada, T.: A Numerical Model Study of Turbulent Airflow in Above Forest Canopy, *J. Met. Soc. Japan*: Vol.60, pp.439-454, 1982.
- 3) Germano, M., Piomelli, U., Moin, P. and Cabot, W.: A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model, *Phys. Fluids*, Vol. 3(7), pp.1760-1765, 1991.
- 4) Carati, D., Winckelmans, G. and Jeanmart, H.: On the modeling of the subgrid-scale and filtered-scale stress tensors in large-eddy simulation, *J. Fluid Mech.*, Vol.441, pp. 119-138, 2001.
- 5) Ghosal, S. and Moin, P.: The basic equations of the large-eddy simulation of turbulent flows in complex geometry, *J. Comput. Phys.*, Vol.118, p.24-40, 1995.
- 6) 中山昭彦, 崎尾幸司: 波状粗面上乱流の直接数値シミュレーション, 土木学会応用力学論文集, Vol.6, pp.839-846, 2003.
- 7) Nakayama, A. and Sakio, K.: Simulation of Flows Over Wavy Rough Boundaries, Center for Turbulence Research, Annual Research Briefs, Stanford University/NASA, Ames Research Center, pp.313-324, 2002.
- 8) Maass, C. and Schumann, U.: Numerical simulation of turbulent convection over wavy terrain. *Direct and Large-Eddy Simulation I*, ed. By P. R. Voke, L. Kleiser and J. P. Chollet, 287-297, Kluwer Academic, 1992.
- 9) Calhoun, R. J. & Street, R. L.: Turbulent flow over wavy surface: Neutral case, *J. Geophys. Res.* Vol.106, pp.9277-9293, 2001.
- 10) 林俊一郎, 大本照憲: DNS解析による砂堆型河床を有する開水路乱流の構造解析, 応用力学論文集, Vol.5, pp.743-752, 2002.

(2003. 9. 30 受付)