

転波列の発達過程

THE DEVELOPMENT PROCESS OF ROLL WAVES

五十嵐 章¹・泉 典洋²・細田 尚³

Akira IGARASHI, Norihiro IZUMI and Takashi HOSODA

¹学生会員 東北大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

²正会員 Ph.D. 東北大学大学院助教授 工学研究科土木工学専攻 (同上)

³正会員 工博 京都大学大学院教授 工学研究科土木工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

Uniform flow on a relatively steep channel is known to be unstable to evolve into a wave train, which is termed roll waves. Though roll waves have long been studied, their wavelength cannot be theoretically determined. In this study, a linear stability analysis on the wavelength of fully-developed roll waves is performed. It is found that the instability of the fully-developed roll waves is maximized when the wavelength is 0.1–1, and roll waves with infinitely long or infinitesimally short wavelengths are neutrally stable. In order to study the development of roll waves and to verify the theory, numerical simulation is performed. As the distance from the inlet increase, roll waves tend to increase in the wavelength, and to approach a constant wavelength asymptotically.

Key Words : roll waves , wavelength, linear stability analysis, numerical simulation

1. はじめに

急斜面上の薄層流には転波列と呼ばれる波列が形成されることが知られている。雨の日に雨水でできた急斜面上のシートフローを観察すると、ほぼ一定の間隔で横断方向に平行に並んだ波列が見られる。また、雨樋を伝って流れる水量が定期的に変化するのも雨樋や屋根に形成された転波列によるものである。図-1 に水を使ったオブジェに見られる転波列の例を示す。壁面を流れる薄層流上に不規則に並んだ波列が確認できる。

転波列の物理機構を明らかにすることは工学的にも重要な意味を有している。地表面上に生じた転波列は土壌侵食に大きな影響を与え、リルやガリの形成にも影響を及ぼしている。また急斜面を流れ下る土石流や泥流などに発生した転波列は土石流サージと呼ばれ、土石流の破壊力を増大させることで災害を激甚化する大きな原因となっている¹⁾。さらに、転波列を伴う曲面上の薄層流は一種の芸術的な水の造形としての役割を果たしている(図-1 参照)。

これまでも転波列に関する研究は数多く行われており、形状を変化させずに流下する準定常転波列はフルード数と波長を与えると完全に記述できることがわかっている²⁾。しかしその理論では波長を特定することができない。本研究では、一定間隔で並んだ準定常転波列の安定性を調べるために、波長に微小な摂動を与えた線形安定解析を行うとともに、転波列の詳細な発達過程を調べるために数値計算を行った。



図-1 薄層流上に形成された転波列。

2. 準定常転波列の理論

Dressler²⁾は十分に発達し平衡状態に達した転波列の形状を浅水流方程式から求めた。ここでは Dressler の理論について簡単に説明する。傾斜角 θ の斜面上の薄層流は St. Venant の浅水流方程式を用いて次のように表される。

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{U} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} = -g \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} + g \sin \theta - C_f \frac{\tilde{U}^2}{\tilde{h}} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{U} \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} = 0 \quad (2)$$

ここで $\tilde{U}$ は水深平均した流下方向流速、 $\tilde{h}$ は水深、 $\tilde{t}$ は時間、 $\tilde{x}$ は流下方向座標、 g は重力加速度である。抵抗

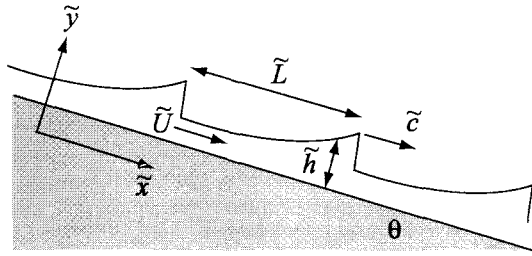


図-2 転波列の概念図.

係数 C_f は水深と粗度の弱い関数であることが知られているが、ここでは簡略化のために定数とする。

転波列は位相速度 $\tilde{c}$ で流下しているとし、次式のような座標変換を行う。

$$\tilde{t}^* = \tilde{t}, \quad \tilde{x}^* = \tilde{x} - \tilde{c}\tilde{t} \quad (3a, b)$$

上式の座標変換は転波列の位相速度で移動する移動座標系で見ることに対応している。

転波列の形状は図-2 に示したように、水深が流下方向に徐々に増加する部分と急激に減少する不連続部からなっている。水深の不連続部から次の不連続部までを一波長とすると、その後部では射流状態に、前部では常流状態になっており、その間に支配断面が現れる。支配断面での流速および水深をそれぞれ $\tilde{V}_c$ および $\tilde{H}_c$ とし、次式を用いて無次元化を行う。

$$\tilde{t}^* = \left(\frac{\tilde{H}_c/C_f}{\tilde{V}_c} \right) t, \quad \tilde{x}^* = \left(\frac{\tilde{H}_c/C_f}{\tilde{V}_c} \right) x \quad (4a, b)$$

$$(\tilde{V}, \tilde{c}) = \tilde{V}_c (V, c), \quad \tilde{h} = \tilde{H}_c h \quad (4c, d)$$

ここで $\tilde{V} = \tilde{c} - \tilde{U}$ である。上式を用いて無次元化を行うと式 (1) および (2) は次のようになる。

$$-\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = \sigma - \frac{(c - V)^2}{h} \quad (5)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial Vh}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

ここで σ は正規化された勾配 ($= \sin \theta / C_f = F_n^2$) であり、 F_n は等流状態におけるフルード数である。

転波列が準定常であり移動座標系上で形状を変化させないとなると、式 (5) および (6) からは時間微分項が落ちて次のようになる。

$$V \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial h}{\partial x} + \sigma - \frac{(c - V)^2}{h} \quad (7)$$

$$\frac{\partial Vh}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

式 (7) および (8) から V を消去すると次式が得られる。

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\sigma h^3 - (ch - 1)^2}{h^3 - 1} \quad (9)$$

ここで定義より明らかなように支配断面では上式の右辺の分母が 0 となるが、そのとき水面勾配が無限大とならないためには、分子も同時に 0 とならなければならない。すなわち位相速度は次の関係を満足する必要がある。

$$c = \sigma^{1/2} + 1 = F_n + 1 \quad (10)$$

式 (9) の分子および分母を $h - 1$ で割って次式を得る。

$$\frac{dh}{dx} = F_n^2 \frac{(h - h_a)(h - h_b)}{h^2 + h + 1} \quad (11)$$

ここで h_a および h_b は次のようである。

$$h_a = \frac{2F_n + 1 + (4F_n + 1)^{1/2}}{2F_n^2} \quad (12)$$

$$h_b = \frac{2F_n + 1 - (4F_n + 1)^{1/2}}{2F_n^2} \quad (13)$$

転波列 1 波長において水深が最小となる部分での x 座標を $x = 0$ 、水深が最大となる x 座標を $x = L$ とすると、 $x = 0$ および L に現れる水深の不連続部では跳水前後における運動量の保存と同様に次式が成り立つ。

$$V^2(0)h(0) + \frac{h^2(0)}{2} = V^2(L)h(L) + \frac{h^2(L)}{2} \quad (14)$$

上式と連続の式 $Vh = 1$ から転波列の最小水深 $h(0)$ と最大水深 $h(L)$ の関係が次のように得られる。

$$h(L) = -\frac{1}{2}h(0) \left\{ 1 - [1 + 8h^{-3}(0)]^{1/2} \right\} \quad (15)$$

式 (11) を最小水深 $h(0)$ から任意の水深 $h(x)$ まで積分すると転波列の水面形状が x の関数として得られる。また最大水深 $h(L)$ まで積分すると次式のようになり、転波列の波長 L が得られる。

$$h(L) - h(0) + \frac{1 + h_a + h_a^2}{h_a - h_b} \ln \left[\frac{h(L) - h_a}{h(0) - h_a} \right] - \frac{1 + h_b + h_b^2}{h_a - h_b} \ln \left[\frac{h(L) - h_b}{h(0) - h_b} \right] = F_n^2 L \quad (16)$$

しかしここで $h(0)$ は h_a から $h(L)$ までの範囲の任意の水深を取ることができるため、波長 L を一意的に定めることはできない。

3. 準定常転波列の波長の線形安定解析

(1) 定式化

一定間隔で並んだ準定常転波列の安定性を調べるため、波長に次のような摂動を導入する。

$$L = L_0 + \epsilon e^{\Omega t} \quad (17)$$

ここで添え字 0 は基本状態、 ϵ は摂動の振幅を表す微小パラメータ、 Ω は擾乱の成長率を表す。上式はある波長

L_0 に対して大きさ ϵ の擾乱を与えることを意味している。線形安定解析によって Ω が求められ、それが正であれば与えられた擾乱は指数関数的に増大することになり、波長 L_0 は安定的に存在できないことになる。また Ω が負であれば擾乱は減衰し、元の波長に戻るため波長 L_0 は安定であることになる。

式 (17) のようにすべての転波列が一斉に波長を ϵ だけ増減させる状況は現実的には考えにくい、ここで考えているのは実際に波長が増減する過程ではなく、波長一定の準定常転波列が安定に存在できるか否かであって、その安定性を明らかにするために成長のごく初期における擾乱の挙動を調べている。その際、考え得る擾乱の一つとして、解析の容易な式 (17) のような擾乱を想定する。その擾乱によって流速および水深も変形を受け、次のように表すことができる。

$$V = V_0 + \epsilon V_1 e^{\Omega t}, \quad h = h_0 + \epsilon h_1 e^{\Omega t} \quad (18, 19)$$

ここで添え字 1 は摂動量を表す。式 (5) および (6) に (18) および (19) を代入し、 ϵ の 1 次の項のみ取り出すと次式が得られる。

$$\frac{dV_1}{dx} = \frac{\Omega h_0 + 2(ch_0 - 1)h_0^{-1} + (h_0^{-1} + h_0^2)h_0'}{1 - h_0^3} V_1 - \frac{\Omega h_0^2 + h_0' - (ch_0 - 1)^2 h_0^{-3}}{1 - h_0^3} h_1 \quad (20)$$

$$\frac{dh_1}{dx} = -\frac{\Omega h_0^3 + 2(ch_0 - 1)h_0 + 2h_0 h_0'}{1 - h_0^3} V_1 + \frac{\Omega h_0 + h_0^{-1} h_0' - (ch_0 - 1)^2 h_0^{-1}}{1 - h_0^3} h_1 \quad (21)$$

(2) 境界条件

a) 運動量の保存

$x = 0$ での流速と水深は次のように表される。

$$V(0) = V_0(0) + \epsilon V_1(0) e^{\Omega t} \quad (22)$$

$$h(0) = h_0(0) + \epsilon h_1(0) e^{\Omega t} \quad (23)$$

また $x = L$ での速度および水深は次のように表される。

$$\begin{aligned} V(L) &= V_0(L_0 + \epsilon e^{\Omega t}) + \epsilon V_1(L_0 + \epsilon e^{\Omega t}) e^{\Omega t} \\ &= V_0(L_0) + \epsilon [V_1(L_0) + V_0'(L_0)] e^{\Omega t} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} h(L) &= h_0(L_0 + \epsilon e^{\Omega t}) + \epsilon h_1(L_0 + \epsilon e^{\Omega t}) e^{\Omega t} \\ &= h_0(L_0) + \epsilon [h_1(L_0) + h_0'(L_0)] e^{\Omega t} \end{aligned} \quad (25)$$

上式を用いて運動量の保存式 (14) を展開すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} &2V_1(0) + [h_0^{-2}(0) + h_0(0)] h_1(0) \\ &= 2V_1(L_0) + [h_0^{-2}(L_0) + h_0(L_0)] h_1(L_0) \\ &\quad + [-h_0^{-2}(L_0) + h_0(L_0)] h_0'(L_0) \end{aligned} \quad (26)$$

b) 正則条件

式 (20) および (21) において、 $h_0 = 1$ であるとき分子も 0 でなければならない。よって次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} &-\left(\Omega + \frac{2}{3}F_n^2 + \frac{2}{3}F_n\right) V_1(\lambda) \\ &\quad + \left(\Omega - \frac{2}{3}F_n^2 - \frac{2}{3}F_n\right) h_1(\lambda) = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

ここで λ は $h_0 = 1$ となる x 座標である。

c) 平均流量の保存

固定座標上から見たときの平均流量 q_{av} は次のように表される。

$$q_{av} = \frac{1}{L} \int_0^L U h dx = \frac{1}{L} \int_0^L (c - V) h dx \quad (28)$$

上式に摂動展開を導入し展開する。摂動を与える前後では平均流量は一定であるので次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} &\int_0^{L_0} [(c - h_0^{-1}) h_1 - h_0 V_1] dx \\ &\quad + c \left[h_0(L_0) - \frac{1}{L_0} \int_0^{L_0} h_0 dx \right] = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

ここで次のような関数を定義する。

$$\psi = \int_0^x [(c - h_0^{-1}) h_1 - h_0 V_1] dx \quad (30)$$

式 (30) を x について微分することで次式が得られる。

$$\frac{d\psi}{dx} = -h_0 V_1 + (c - h_0^{-1}) h_1 \quad (31)$$

また式 (30) において $x = 0$ とすると次式が得られる。

$$\psi(0) = 0 \quad (32)$$

式 (29) の第 1 項は $\psi(L_0)$ と表せることから、式 (29) は次のように表せる。

$$\psi(L_0) = -c \left[h_0(L_0) - \frac{1}{L_0} \int_0^{L_0} h_0 dx \right] \quad (33)$$

式 (20) および (21), (31) は V_1 および h_1 , ψ , Ω の 4 つの未知数を含んでおり、(26) および (27), (32), (33) の 4 つの境界条件とともに 2 点境界値問題を形成している。これを 2 点境界値問題の数値解法の一つであるねらい撃ち法を用いて解く。

(3) 理論解析の結果

図-3 に擾乱の成長率 Ω の L_0 - F_n 平面上におけるコンタ図を示す。転波列は $F_n < 2$ の領域では発生しないことが知られているので $F_n > 2$ の領域のみ示している。図-3 によると波長 L_0 が 0.1 から 1 の間に擾乱の成長率のピークが現れており、 $C_f = 0.01$ とすると $\tilde{H}_c$

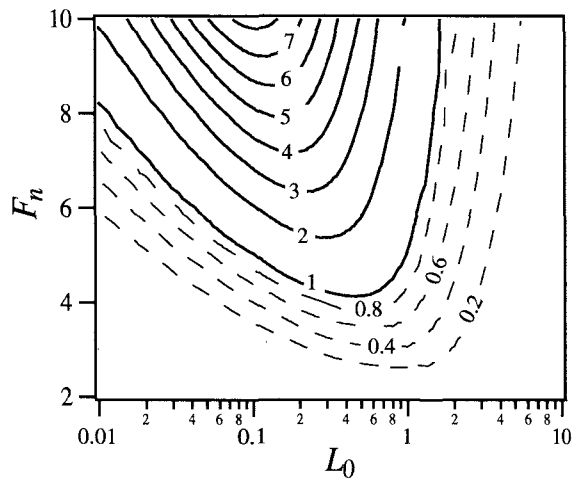


図-3 擾乱の成長率 Ω のコンタ図.

の10倍から100倍程度の波長のとき最も不安定となることが判る。また擾乱の成長率は図-3中に示した波長 L_0 の範囲において常に正の値をとり、波長 L_0 が無限小か無限大のときゼロに漸近することがわかる。これは波長一定の準定常転波列は無限小および無限大の波長で中立安定となる以外、有限なすべての波長において不安定となることを意味している。

ここで行った解析は線形安定解析であって、その結果は発達のごく初期における擾乱の挙動を表しているに過ぎない。さらにその後の発達過程や平衡状態を知るためには非線形安定解析を行う必要がある。ただし本解析は通常の線形安定解析とは異なり、擾乱の成長率 Ω が波長 L_0 の関数として求められており、この結果を平衡波長に対してもそのまま適用することができる。すなわち非線形安定解析によって平衡波長が得られたとしても、本解析の結果から波長が無限小か無限大でない限りその平衡波長は不安定であることが既に明らかである。したがって上述の結果は、一定間隔で並んだ準定常転波列はいずれの有限な波長においても安定的に存在できず、無限大あるいは無限小の波長においてのみ中立安定的に存在できることを意味している。

ここで理論結果の物理的意味を明らかにするために Brock³⁾の実験で観測された波長の流下方向変化を見つめる。実験結果および実験条件をそれぞれ図-4および表-1に示す。図-4中の縦軸および横軸はそれぞれ平均波長 $\tilde{L}$ および水路上流端からの流下距離 $\tilde{x}$ を等流水深 $\tilde{H}_n$ で無次元化したものである。流下距離が大きくなるにつれて波長も増加していく様子がわかる。ただし実験で用いられた水路は長さが40mであり、未だ長さが不十分であるため平衡に達せず波長が増加している可能性も否定できない。そこで次節で数値シミュレーションを行い理論結果の妥当性を検証するとともに、転波

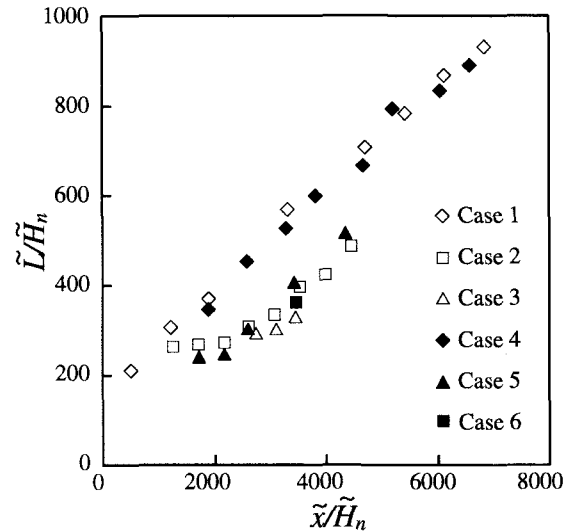


図-4 Brockの実験で観測された波長³⁾.

表-1 Brockの実験条件³⁾.

Case	水路勾配	F_n	$\tilde{H}_n$ (m)
1	0.05011	3.45	0.005232
2	0.05011	3.71	0.007976
3	0.05011	3.81	0.01026
4	0.08429	4.63	0.005283
5	0.08429	4.96	0.007976
6	0.08429	5.06	0.01026

列の発達過程の詳細を調べた。

4. 数値計算

(1) 計算条件

開水路における一次元非定常流の基礎式として式(1)および(2)と同様の式を用い、有限体積法に基づいて離散化を行った。不連続部において数値振動を起こさないように特性曲線法に基づいた流束差分法(FDS)によって得られる数値粘性が付加されている⁴⁾。水路形状としては長さ600m、幅5mの長方形断面を仮定した。等流状態におけるフルード数 F_n および抵抗係数 C_f 、等流水深 $\tilde{H}_n$ は Brockが行った実験とほぼ同条件とし、それぞれ3.77および0.0035, 0.00788mとした。またメッシュ間隔は0.01m、時間間隔は0.001秒である。

転波列を発生させるためには何らかの方法で擾乱を与える必要がある。ここでは次の2つの方法を用いた。1つは上流端の流量に擾乱を与える方法であり、もう1つは水路全体で抵抗係数に擾乱を与える方法である。

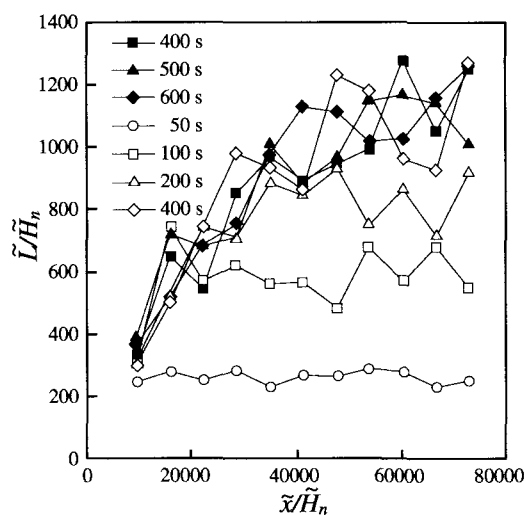


図-5 時間および流下距離による平均波長の変化。黒塗りシンボルは上流端のみに擾乱を与えた場合、白抜きシンボルは水路全体に擾乱を与えた場合を示す。

(2) 数値解析の結果

a) 上流端のみへ擾乱を与えた場合

水路の上流端における流量に5%の擾乱をランダムに与え、転波列を発生させた。図-5中の黒塗りシンボルが、そのときの水路の上流端からの流下距離と時間による平均波長の変化を示している。ここでいう平均波長とは各点の前後25m(計50m)の区間に存在する転波列の波長の平均をとったものである。上流からの伝播に時間がかかるため400s以前は水路の下流部に転波列が形成されていない。また $\tilde{x}/\tilde{H}_n$ がおおよそ3000以下の範囲では擾乱は明確な転波列にまで発達していないため波長を示していない。400s以降は時間によらず流下距離が長くなるにつれて平均波長は大きくなるが、 $\tilde{x}/\tilde{H}_n = 40000$ を超えると増加率が減少し $\tilde{L}/\tilde{H}_n = 1000-1200$ のほぼ一定値に漸近する様子が見られる。

b) 水路全体へ擾乱を与えた場合

波長が十分に大きくなると、転波の後部に水深がほぼ一定の等流状態と見なせる部分が現れる。この等流状態は不安定であり、そこに新たに転波列が発生することが予想される。前述の上流端にのみ擾乱を与える方法では下流側に十分な擾乱が存在しないため、新たな転波列の発生がなく波長が大きくなる可能性が考えられる。そこで次に水路全体に擾乱を与える方法を用いて同様の計算を行った。

水路全体に擾乱を与える方法として、抵抗係数を位置および時間ごとに5%の範囲でランダムに変化させた。図-5の白抜きのシンボルがそのときの平均波長を示している。50sでは流下距離によらずにほぼ一定の平均波長をとっているが、それ以降は距離とともに平

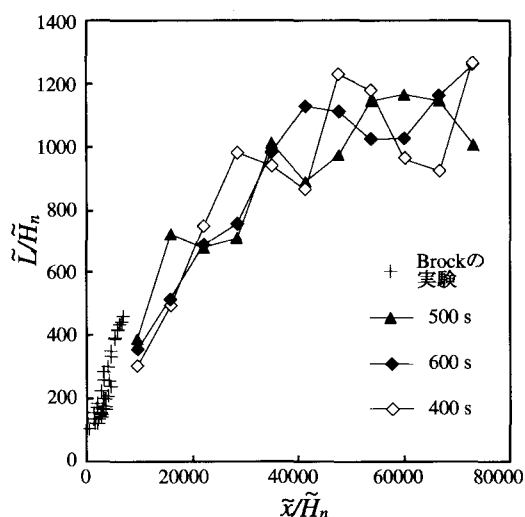


図-6 実験および数値計算による波長の変化。黒塗りシンボルは上流端のみに擾乱を与えた場合、白抜きシンボルは水路全体に擾乱を与えた場合を示す。

均波長は大きくなり、400s以降は上流端にのみ擾乱を与えた場合と同様に $\tilde{L}/\tilde{H}_n = 1000-1200$ 程度の波長に漸近する様子が見られる。

c) 実験との比較

図-6に上流端にのみ擾乱を与えた場合および水路全体に擾乱を与えた場合の数値計算によって得られた平均波長とともに、実験による波長をプロットした。数値計算と実験では初期に与えられる擾乱の強度の違いから原点がずれる傾向にあるが、発達初期における波長の増加速度はほぼ一致しており、両者の結果はほぼ同一曲線状に位置することがわかる。

5. 波長の増大過程

波長が大きくなる原因の1つとして波の合体がある。波速の異なる複数の波が存在すると、速い波は遅い波に追いつき合体して1つの波となる。したがって合体により転波列はその波長を増加させる。図-7および8は数値計算によって再現された転波列の合体の過程を示している。破線の円で囲った波は同一の波である。図-7は波高の小さい波が大きい波に追いつき合体する様子である。合体に伴いその波高、波長ともに大きくなる様子が見られる。図-8は波高の大きい波が波高の小さい波に追いつき合体する様子である。波高の大きい波は波高を小さくしながら近づき合体している。波の合体はそれぞれの波の波速の違いにより起こるが、図-7および8から波速は波高によらないことがわかる。同様のことがBrockの実験でも観察されている³⁾。

§3の理論結果によれば、有限の波長は安定的に存在できない。この結果を波列の合体にそのまま適用する

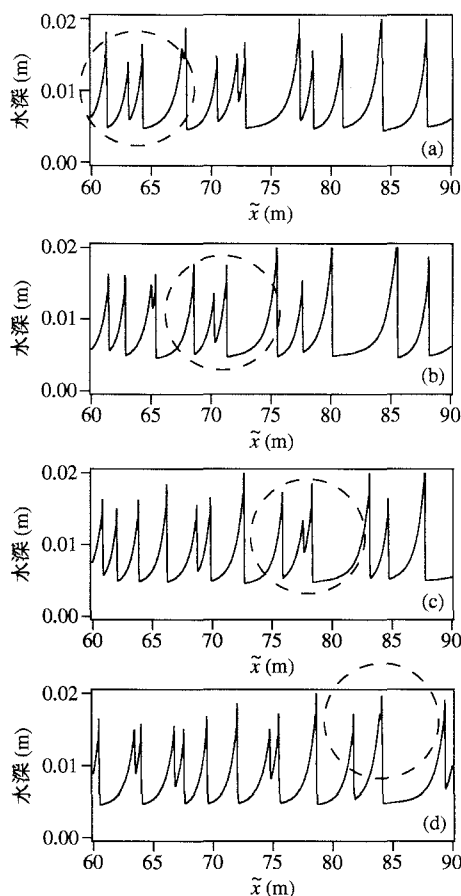


図-7 転波列の合体。波高の小さい波が大きい波に追いつく場合。(a) $t = 184$ s, (b) $t = 189$ s, (c) $t = 194$ s, (d) $t = 198$ s.

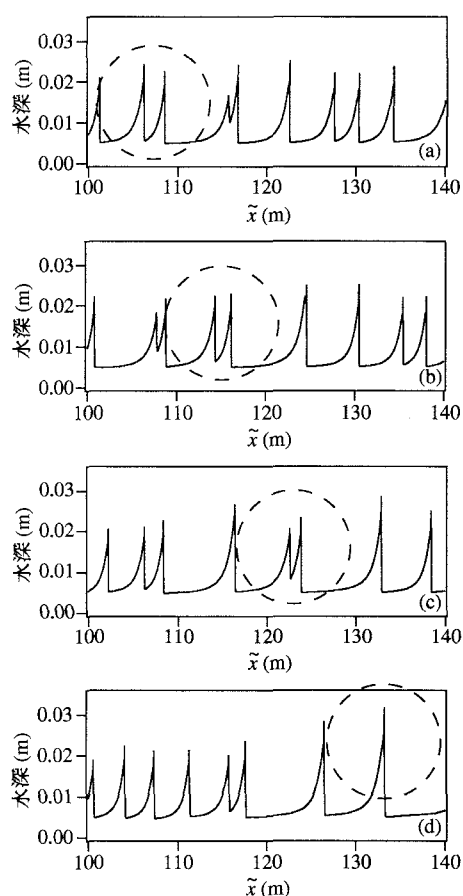


図-8 転波列の合体。波高の大きい波が小さい波に追いつく場合。(a) $t = 170$ s, (b) $t = 175$ s, (c) $t = 180$ s, (d) $t = 186$ s.

ことはできないが、波列の合体を、有限な波長が不安定であるため無限小の波長に漸近する過程ととらえることもできる。波列の合体により波長は大きくなるが、1つの波が複数の波に分裂し波長が小さくなる現象は実験でも数値計算でも確認されていない。したがって有限な波長が不安定であるとすれば、無限大無限小いずれに漸近するにしても波長は増加を続けることになる。実験や数値計算の上流域で見られた波長の増加は上記のことに対応していると考えられる。

しかし数値計算では図-5に示すように $\tilde{x}/\tilde{H}_n$ が40000を超えると波長が一定値に漸近しているように見える。この原因として次のようなことが考えられる。合体が進んで波長が大きくなればなるほど合体に要する時間と距離は飛躍的に増加するため、波長の増加速度は非常に小さくなり波長は一定値に漸近するようになる。また前述したように、波長が十分大きくなると水深一定の等流が再び現れるが、等流状態の不安定性によって転波列が再形成される機構と波長が増加する機構がバランスすることによって波長が一定値に漸近する可能性もある。これについては今後の課題である。

6. 結論

本研究では準定常転波列の波長に摂動を与えて線形安定解析を行い、波長一定の転波列はいずれの有限な波長に対しても不安定であり、無限大か無限小の波長に対してのみ中立安定であることを明らかにした。実験および数値計算の結果は、転波列の波長が流下方向に増加することを示しており、理論結果を部分的に支持することが示された。

参考文献

- 1) 高橋保, 長谷川伸, 固定床一様水路における土石流の流動特性, 第35回土木学会年次学術講演会講演概要集, Vol. II, pp. 354-355, 1980.
- 2) Dressler, R. S., Mathematical solution of the problem of roll-waves in inclined open channels, *Commun. Pure Appl. Maths.* Vol. 2, pp. 149-194, 1949.
- 3) Brock, R. R., Development of roll waves in open channels, Report No. KH-R-16, W. M. Kech Laboratory, California Institute of Technology, 226p, 1967.
- 4) 細田尚, 朝位孝二, ダム破壊流れの1次元解析, 水工学における計算機利用の講習会講義集, 土木学会水理委員会基礎水理部会, pp. 23-31, 1999.

(2003. 9. 30 受付)