

# 透水係数を変量とした地下水位変分量の厳密解 と透水係数の不均一分布構造の同定

EXACT VARIATION IN GROUNDWATER LEVELS AMONG DIFFERENT  
PERMEABILITIES AND DISTRIBUTED STRUCTURE IDENTIFICATION OF  
INHOMOGENEOUS PERMEABILITIES

浜口 俊雄<sup>1</sup>  
Toshio HAMAGUCHI

<sup>1</sup>正会員 農博 京都大学防災研究所 (〒611-0011 宇治市五ヶ庄)

This paper evinces a great performance of geostatistically estimating the modeling errors and a spatial distribution of permeabilities for two-dimensional groundwater flow. The exact variation in the water levels, which is equivalent to the accurate modeling errors, is formulated from the series solution of the finite element equation. A hypothetical aquifer into twenty piecewise zones, each of which has a constant permeability, is designed to allow assessing the errors and the level-variations in the homogeneous and heterogeneous aquifers. Spatial estimation of the error complements and distributed structure identification of inhomogeneous permeabilities are herein carried out. A geostatistical model of the distributed permeabilities is integrated into the physical-based model. The statistical-based parameters in the integrated system are successfully identified from the physical-based observed data. It can be proven that such estimation and identification approaches are powerful and helpful in perfectly modeling.

**Key Words :** *groundwater level, inhomogeneous permeability, exact variation, modeling error, parameter identification*

## 1. 序論

広域地下水解析では、観測データの量と質に見合うような地下水モデルを構築することが重要である。特に、地下水に関する物性値の空間分布の与え方がモデル再現性の良し悪しを左右する。例えば、少ない観測データ数から局所的な透水特性による局所的な水位変動を再現したり、変動が小さく類似した観測データから不均一な透水特性の空間分布を推定することは困難といえる。しかし、前者のような場合はデータ数を適切な場所に数を増やすほど局所性が表現しやすくなり、後者のような場合はデータの変動回数が多いほどデータの類似性が解消されてくるため、データの量も質もできるだけ向上させるべく上記の方向で実現へ向けて検討するのがよい。その一方で観測に関して制約が存在することも事実であり、これは予め認識していなければならない。

一般的に対象領域内の観測点は、地表の土地利用状態や観測点設置の予算問題等で物理的・経済的制約を強く受けることが多く、これが観測データの量や質の向上を妨げる主要因となり得る。通常の場合は、透水特性の分布や境界条件を単純化することで地下水モデル自身を単純化し、それにより生じた全体のモデル誤差と観測データからのモデルの残差(すなわち、観測点

でのモデル誤差+観測誤差)との間のバランスを考慮した最適な透水特性の分布または境界条件を同定することで最終的な地下水モデルを定めることになる。それ故に、たとえ地下水の挙動が複雑であっても、その観測データが不十分であれば地下水モデルの単純化が必要になってくる。

ところで非定常透水特性としては、透水係数を有効間隙率で除した値、またはその逆数、のいずれかで検討を進めるべきであるが、いずれにしてもひとまとめで扱えることから透水係数または有効間隙率の一方が一様分布であっても本稿議論内容の一般性は失われない。そこで本稿では有効間隙率を一定として扱うことで議論の焦点を透水係数に絞り、地下水解析時に透水係数分布の単純化設定の相違からくる地下水位の違い、すなわち、地下水位変分量を厳密に考えることでモデル誤差との関係から同誤差の厳密解を算出し、それを出来るだけ埋め得る地盤統計的手法の適用性を検討する。また、同じ観測条件であっても不均一な透水係数分布のモデルに関して工夫することで、そのモデル誤差をさらに小さくする手法も紹介する。なお、本論文の内容は地下水モデルが不圧・被圧どちらの状態でも、また平面二次元でも三次元でも検討可能であるが、ここでは不圧平面地下水モデルを採用して検討していくことにする。

## 2. 水位変分量とモデル誤差

### (1) 有限要素法による水位解

平面地下水モデルの基礎式は、*Boussinesq* 方程式

$$\lambda \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ k(h-s) \frac{\partial h}{\partial x_i} \right\} + \varepsilon \quad (1)$$

で表される。ここに  $\lambda$ : 有効間隙率,  $h$ : 地下水位,  $k$ : 透水係数,  $s$ : 基盤高,  $\varepsilon$ : 地下水涵養量を表す。

実際の数値計算では式(1)を用いるが、ここでは厳密解を導出する際の読者の理解を容易にするため、式(1)を線形化した方程式とその境界条件は

$$\lambda \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k d_0 \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) + \varepsilon \quad (2)$$

$$\text{境界条件: } h = \hat{h} \quad \text{on } S_h$$

$$q = -\hat{q} = k d_0 \frac{\partial h}{\partial n} \quad \text{on } S_q$$

(ただし,  $S_h$ : 水位境界,  $S_q$ : 流量境界)

で考察を進めるものとする。ここに,  $d_0$ : 平均水深(要素毎の定数)であり,  $h-s$ の線形近似部である。本研究では数値計算に有限要素法(FEM)の利用を考える。この弱形式を求め、空間的に離散化して  $\Delta t$  による時間差分や  $\theta$  法によって時間展開し、最後に両辺を上記境界水位  $\hat{h}$  の縮約処理を施して ( $\det(\mathbf{A}) = 0 \rightarrow \det(\mathbf{A}) \neq 0$ ) 得られる有限要素方程式は

$$\mathbf{A} \mathbf{h}_{t+1} = \mathbf{B} \mathbf{h}_t + \boldsymbol{\omega}_{t+\theta} \quad (3)$$

ただし,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} + \theta \mathbf{S}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} - (1-\theta) \mathbf{S} \quad (4)$$

$$\mathbf{M} = \int_V \lambda \phi^T \phi dV, \quad \mathbf{S} = \int_V k d_0 \frac{\partial \phi^T}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dV \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{t+\theta} = - \int_{S_q} \hat{q} \phi^T dS + \int_V \varepsilon \phi^T dV \quad (6)$$

となる。式(3)を解くと、水位の数値解

$$\mathbf{h}_{t+1} = \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{B} \mathbf{h}_t + \boldsymbol{\omega}_{t+\theta}) \quad (7)$$

を得る。

### (2) 透水係数を変量とした水位変分量

本節では、式(7)を基にして、透水係数を変量とした水位変分量を導出する。ここでは、 $\|\mathbf{M}\|$  と  $\theta \Delta t \|\mathbf{S}\|$  の大小関係で場合分けして検討を進める。

#### a) $\|\mathbf{M}\| > \theta \Delta t \|\mathbf{S}\|$ の場合

まず、 $\mathbf{A}^{-1}$  を級数展開する。

$$\mathbf{A}^{-1} = \Delta t \left( \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{\infty} (-\theta \Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S})^i \right) \mathbf{M}^{-1} \quad (8)$$

上式を式(7)に代入して整理すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{t+1} = & \left( \mathbf{I} - \sum_{i=1}^{\infty} (-\theta)^{i-1} (\Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S})^i \right) \mathbf{h}_t \\ & + \Delta t \left( \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{\infty} (-\theta \Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S})^i \right) \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\omega}_{t+\theta} \end{aligned} \quad (9)$$

が得られる。

式(4)の  $\mathbf{M}$  は貯留行列,  $\mathbf{S}$  は透水行列と呼ばれ、後者は透水係数  $k$  を含むことから同行列が間接的に水位変分量を考える上での変量となっている。上記とは異なる空間分布を示す透水係数  $k'$  (そのときの透水行列を  $\mathbf{S}'$  とする) のモデルで、式(9)の様に解  $\mathbf{h}'_{t+1}$  を求める。続いて透水係数の空間分布に関する時刻  $t+1$  の水位変分量  $\delta \mathbf{h}_{t+1} = (\mathbf{h}_{t+1} - \mathbf{h}'_{t+1})$  を求める。いま1時刻分の水位変分量を考察するために、分布の異なる両者の水位を時刻  $t$  で同じ ( $\mathbf{h}_t = \mathbf{h}'_t$ ) とおいて考える。 $k$  と  $k'$  がそれほど離れていない分布 ( $\|\mathbf{S}\| \approx \|\mathbf{S}'\|$  の成立程度) であれば、 $\|\mathbf{M}\| > \theta \Delta t \|\mathbf{S}'\|$  と考えてもよいと言える。よって、この場合の水位変分量は比較的容易に

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{h}_{t+1} = & - \sum_{i=1}^{\infty} (-\theta)^{i-1} (\Delta t)^i \\ & \times \mathbf{I}_{i-1} \mathbf{M}^{-1} \delta \mathbf{S} (\mathbf{h}_t + \theta \Delta t \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\omega}_{t+\theta}) \end{aligned} \quad (10)$$

ここに  $\mathbf{I}$ : 単位行列,

$$\mathbf{I}_{i-1} = \sum_{j=0}^{i-1} (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{S})^{i-j-1} (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}')^j \quad (11)$$

と求まる。 $\mathbf{S}$  の変分量  $\delta \mathbf{S} (= \mathbf{S} - \mathbf{S}')$  が変量となっているために、透水係数の空間分布の違いが各時刻  $\delta \mathbf{h}_{t+1}$  ずつ解に累積的な影響を及ぼすことがわかる。

#### b) $\|\mathbf{M}\| \leq \theta \Delta t \|\mathbf{S}\|$ の場合

前場合と同様に算出していく。 $\mathbf{A}^{-1}$  を級数展開した結果とそれを式(7)に代入して整理した結果は

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\theta} \left( \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{\theta \Delta t} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{M} \right)^i \right) \mathbf{S}^{-1} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{t+1} = & \left( \mathbf{I} + \sum_{i=0}^{\infty} \left( -\frac{1}{\theta} \right)^{i+1} \left( \frac{1}{\Delta t} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{M} \right)^i \right) \mathbf{h}_t \\ & + \frac{1}{\theta} \left( \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{\theta \Delta t} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{M} \right)^i \right) \mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{\omega}_{t+\theta} \end{aligned} \quad (13)$$

と書ける。同様に透水係数  $k'$  (透水行列を  $\mathbf{S}'$ ) のモデルに対して、式(13)の様に解  $\mathbf{h}'_{t+1}$  を求める。続いて透水係数の空間分布に関する時刻  $t+1$  の水位変分量  $\delta \mathbf{h}_{t+1}$  を求める。 $\|\mathbf{M}\| \leq \theta \Delta t \|\mathbf{S}'\|$  の仮定も成立しているとして、この場合の水位変分量は比較的容易に

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{h}_{t+1} = & \sum_{i=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{\theta} \right)^{i+1} \left( \frac{1}{\Delta t} \right)^i \\ & \times (\mathbf{N}_{i-1} \delta \mathbf{S}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{h}_t - \mathbf{N}_i \delta \mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{\omega}_{t+\theta}) \\ & + \frac{1}{\theta} \delta \mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{\omega}_{t+\theta} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{ここに } \mathbf{N}_{i-1} = \sum_{j=0}^{i-1} (\mathbf{S}^{-1} \mathbf{M})^{i-j-1} (\mathbf{S}'^{-1} \mathbf{M})^j \quad (15)$$

と求まる。先の場合と同じく、 $\mathbf{S}^{-1}$  の変分量  $\delta \mathbf{S}^{-1} (= \mathbf{S}^{-1} - \mathbf{S}'^{-1})$  が変量となっているために、透水係数の空間分布の違いが各時刻  $\delta \mathbf{h}_{t+1}$  ずつ解に累積的な影響を及ぼすことがわかる。

### (3) 水位変分量と地盤統計学的モデル補完量

いま上述の議論において、真の地下水挙動が本論文で与えたモデルで完全に表せると仮定した上で、 $k$ が真の透水係数の分布状態、 $k'$ が所与の解析モデル分布を当てはめて考えた場合、 $\delta h_{t+1}$ は逐次的ではあるがモデル誤差を表すことになる。しかしながら、各時刻毎に式(10)または式(14)を用いてモデル誤差を厳密に計算することはかなりの計算労力が必要となって現実的ではない。本研究ではその代替手法として、比較的容易に計算できる後述のような地盤統計学的手法を考える。

有限要素法では導出の過程で計算残差の総和をゼロにする条件を与えているだけであり、任意点での計算残差をゼロにする解(厳密解)を得られるかどうかは保証の限りではない(“弱形式”と呼ばれる条件)点が特徴の1つである。地盤統計学的手法にもこれと類似した特徴があり、同手法は、観測点において計算値と観測値が一致する条件(条件付確率場の確定条件)を与えているだけで、任意点での計算値と真値との残差をゼロにする解(厳密解)を得られるかどうかの保証がない方法となる。また、そこには計算値が観測値を基にして統計的な空間特性から求められているために物理的検討も生まれにくい。したがって、同手法では、本来モデル誤差の検討もできない状況が普通であった。そこで筆者は、物理モデルと地盤統計モデルの融合によるモデル誤差の補完手法の確立を目指してきた。成果の詳細は参考文献1),2)に譲るとして要点だけを列挙すると、

- [1] 既往の研究ではモデル全体を統計モデル(トレンド成分+ランダム成分)で表現していたが、筆者はトレンド成分に物理モデルの数値解を採用することで物理特性を組み込んだモデルにすると同時にモデル誤差をランダム成分で考慮できるようにし、その観点からモデル誤差を補完するようにした。
- [2]トレンド成分として物理モデル数値解の他に不確定的な定数を導入し、その定数をモデル誤差の一部と捉えることで、モデル誤差補完の推定量を空間相関性から算出したランダム成分にばかり依存するのではなく、領域に様な傾向量も考慮したかたちでモデル誤差を求めて補完精度を向上させた。
- [3] 地下水モデルに限らず一般の物理モデルで適用可能なかたちに理論展開されているため、汎用性が高く、他モデルへの応用が利きやすい。

となった。数式で簡単に触れると、真値 $\phi(x, t)$ をトレンド成分 $m(x, t)$ とランダム成分 $w(x, t)$ に分解して考え、

$$\phi(x, t) = m(x, t) + w(x, t) \quad (16)$$

とし、ランダム成分が時間に独立と仮定した上で、推定値 $\phi^*(x, t)$ が

$$\phi^*(x, t) = \nu^T \phi \quad (17)$$

によって算出できるように考える手法が地盤統計学<sup>3),4)</sup>の一手法として有名なuniversal kriging(UK)である。

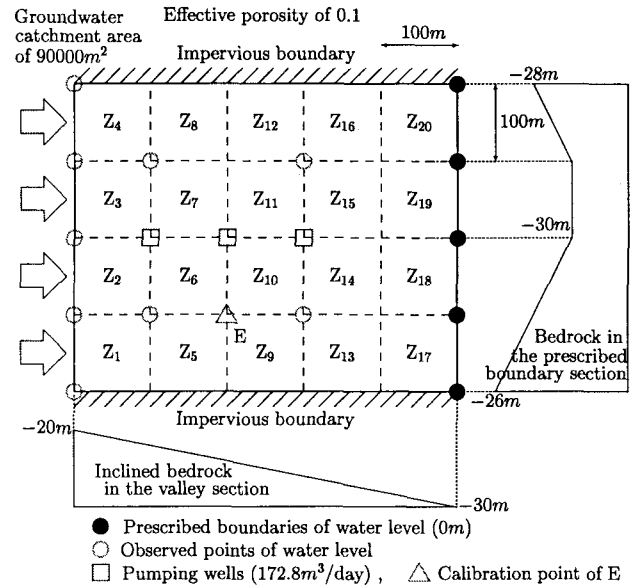


図-1 仮想帯水層

ここに、観測数を $n$ 個として、 $\nu$ : 観測値への重み係数ベクトル $[n \times 1]$ 、 $\phi$ : 観測値ベクトル $[n \times 1]$ を表す。筆者が用いるkriging推定の手順と式導出に関する詳細は参考文献1)を参照されたい。ここではトレンド成分にモデル数値解と定数のスカラー和を考えるため、UKを最も単純化したordinary kriging(OK)と一致し、数式で記述すると以下の様に見える。

$$\phi^*(x, t) = f(x, t) + \hat{b} + c(x)^T C^{-1} \hat{w} \quad (18)$$

$$\text{ただし、} \quad \hat{b} = \frac{\alpha^T C^{-1} \phi}{\alpha^T C^{-1} \alpha} \quad (19)$$

$$\hat{w} = \phi - \alpha \frac{\alpha^T C^{-1} \phi}{\alpha^T C^{-1} \alpha} \quad (20)$$

ここに、 $f(x, t)$ : 地下水モデルによる水位の数値解[スカラー]、 $\hat{b}$ : 空間不確定的偏り[定数]、 $w$ : 観測点でのランダム成分ベクトル $[n \times 1]$ 、 $\alpha$ : 成分が全て1の定数ベクトル $[n \times 1]$ 、 $c(x)$ : 求める推定点 $x$ と各観測点間の共分散ベクトル $[n \times 1]$ 、 $C$ : 各観測点間の $w(x)$ の共分散行列 $[n \times n]$ である。本研究では $w(x)$ の共分散関数 $C(d)$ として、一次元球型関数の

$$C(d) = \begin{cases} \sigma^2 \left\{ 1 - 1.5 \left( \frac{d}{a} \right) + 0.5 \left( \frac{d}{a} \right)^3 \right\} & (0 \leq d \leq a) \\ 0 & (d > a) \end{cases} \quad (21a)$$

を採用している<sup>5)</sup>。

### 3. モデル誤差補完の数値実験

#### (1) 実験モデル

本研究では図-1のような仮想の不圧帯水層を対象とした。この帯水層の不透水基盤面は、流れ断面が谷状になっており、流下方向に一定傾斜している。図中の○印は水位観測位置(9点)、●印は水位境界(5点)、□

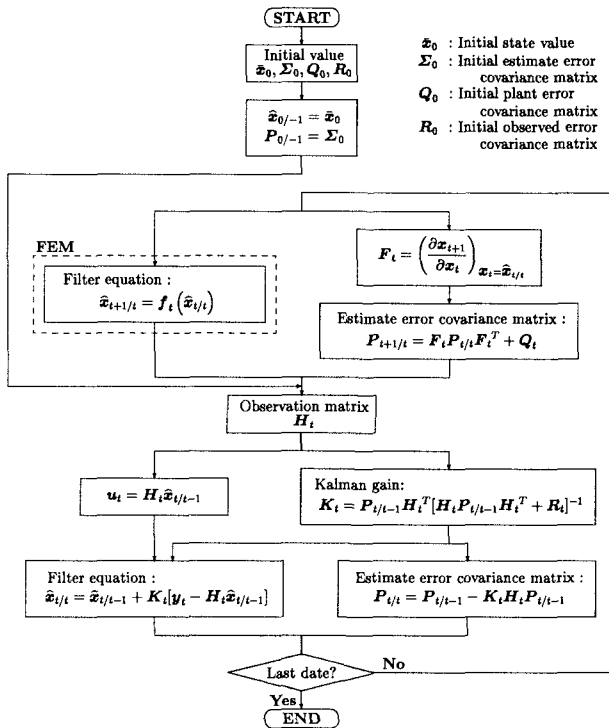


図-2 拡張 Kalman フィルタ有限要素法のアルゴリズム

印は揚水位置(3点)である。また図の左端(地下水集水域)と上方(地表面)から地下水涵養があるものと設定して、有限要素法を用いた非定常平面地下水モデルの数値実験を試みた。基礎式ならびにその有限要素方程式は、先述の2.(1)節を参照されたい。実験では均一/不均一な透水係数分布の2ケースを想定し、その透水係数分布同定後のモデル解析で得られた地下水位解と観測値との残差から地盤統計学的に水位の空間不確定量を評価し、それをモデル解に補完的に加えて得られる水位解の算出を目的とする。ただし、観測値には真のモデルを順解析で予め算出しておいた模擬観測値を用意する。

## (2) 透水係数の同定

平面地下水モデルを最適化するため、透水係数の最尤同定値が必要である。本研究では、モデル誤差に相当するランダム成分ならびに $\hat{b}$ を取り除かねばならないという問題がある。そこで、逆解析手法には拡張 Kalman フィルタ有限要素法<sup>6),7)</sup>を採用する。同手法はモデル誤差や異常値をフィルタしながら観測値を使ってパラメータを同定する処理機構であるため、本モデルに対する逆解析としては極めて理に適った方策である。同手法のアルゴリズムを図-2に示す。いま状態変数 $x_t$ を式(22)のように与える。

$$x_t = \begin{Bmatrix} h_t^1 \\ L_t \end{Bmatrix} \quad (22)$$

ここに、 $h_t^1$ は未知水位量(式(7)の境界水位成分を除いた水位解ベクトル)、 $L_t (= \log k_t)$ は常用対数透水係数量を表す。

|       |                               |                               |                                |                                |                                |
|-------|-------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| Exact | 215.3322<br>(Z <sub>4</sub> ) | 255.5558<br>(Z <sub>8</sub> ) | 321.1791<br>(Z <sub>12</sub> ) | 400.0000<br>(Z <sub>16</sub> ) | 383.3276<br>(Z <sub>20</sub> ) |
|       | 173.9983<br>(Z <sub>3</sub> ) | 200.0000<br>(Z <sub>7</sub> ) | 272.5400<br>(Z <sub>11</sub> ) | 329.4123<br>(Z <sub>15</sub> ) | 346.6049<br>(Z <sub>19</sub> ) |
|       | 136.6654<br>(Z <sub>2</sub> ) | 171.4817<br>(Z <sub>6</sub> ) | 226.1393<br>(Z <sub>10</sub> ) | 273.9904<br>(Z <sub>14</sub> ) | 300.0000<br>(Z <sub>18</sub> ) |
|       | 100.0000<br>(Z <sub>1</sub> ) | 146.4934<br>(Z <sub>5</sub> ) | 194.3980<br>(Z <sub>9</sub> )  | 235.9593<br>(Z <sub>13</sub> ) | 265.2360<br>(Z <sub>17</sub> ) |

Unit: m/day

図-3 真の透水係数空間分布

|        |                                                 |                               |                                |                                |                                |
|--------|-------------------------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| Case 1 | 221.5426<br>(Z <sub>1</sub> ~ Z <sub>20</sub> ) |                               |                                |                                |                                |
| Case 2 | 219.3408<br>(Z <sub>4</sub> )                   | 263.1140<br>(Z <sub>8</sub> ) | 289.9044<br>(Z <sub>12</sub> ) | 382.6352<br>(Z <sub>16</sub> ) | 380.4207<br>(Z <sub>20</sub> ) |
|        | 168.8113<br>(Z <sub>3</sub> )                   | 224.7142<br>(Z <sub>7</sub> ) | 254.9413<br>(Z <sub>11</sub> ) | 348.1349<br>(Z <sub>15</sub> ) | 352.3683<br>(Z <sub>19</sub> ) |
|        | 135.8332<br>(Z <sub>2</sub> )                   | 185.8441<br>(Z <sub>6</sub> ) | 215.4022<br>(Z <sub>10</sub> ) | 273.9089<br>(Z <sub>14</sub> ) | 295.5448<br>(Z <sub>18</sub> ) |
|        | 101.7502<br>(Z <sub>1</sub> )                   | 144.2885<br>(Z <sub>5</sub> ) | 180.1621<br>(Z <sub>9</sub> )  | 237.3977<br>(Z <sub>13</sub> ) | 260.8399<br>(Z <sub>17</sub> ) |

Unit: m/day

図-4 均一/不均一な透水係数分布の同定結果

## (3) 数値実験における透水係数分布

まず真の地下水挙動を得るための地下水モデルに諸元を設定し、これに対して順解析を行って図-1で示した9点の観測点での模擬観測値を作成した。実際の透水係数分布は空間的に複雑な様相を呈していると思われるが、解析モデルの要素毎では要素内の平均透水量から得られる等価な透水係数として表現される。ここで用いた透水係数の空間分布は図-3に簡略的に設定している。

次に、数値実験に用いるためのモデルの透水係数分布の空間構造を同定する。本実験のモデル透水係数分布は、予め設定した真の透水係数分布に対し、下記の2つの場合を想定する。

ケース1：全域{Z<sub>1</sub>~Z<sub>20</sub>}が均一区域の分布

ケース2：真に同じく各区域Z<sub>1</sub>~Z<sub>20</sub>毎に異なる分布

図-4はケース毎の区域化設定ならびに各区域での透水係数の最尤同定結果を簡略に示している。ただし、同図に描かれた分布は図-1や図-3と方向等が対応しているものとする。また、その透水係数同定計算には前節に記載の逆解析手法を用いている。これらの結果から各ケース毎のモデル解析解(水位)を算出し、その後、各ケース毎の空間不確定量を地盤統計学的に評価して観測点での任意時刻の水位残差が0になる推定を行った。上記手法によって、観測点以外の各節点の誤差もモデル解析解に比べて小さくなると期待される。モデル誤差を空間補完する本手法に基づいて再現推定した水位を各ケース毎に各点で検証した。その結果、どの節点においてもほぼ同様の傾向を示したため、ここでは代表的な検証点として図-1の△印のE点に着目することとした。本稿では誤差補完の効果を見るために、両ケースのモデル解析解と提案モデル解を取り上げて図-5に

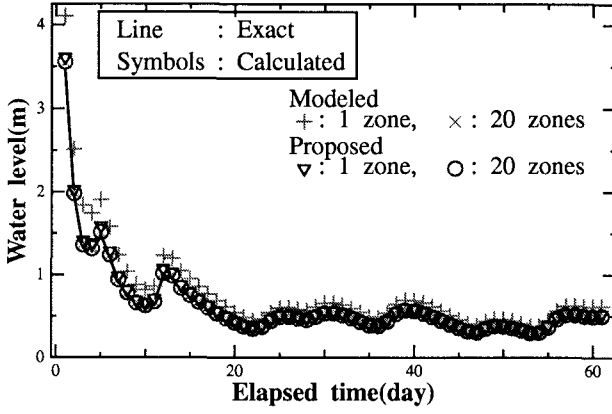


図-5 ケース毎のE点での水位変動

表した。ここに、実線は真の変動、+、×印はそれぞれケース1,2のモデル解析解を、▽、○印はそれぞれケース1,2の提案手法解を表している。この図では+と▽、×と○という記号間の差異が各ケースの誤差補完量を示しているが、任意の時間においても、▽印の方が+印よりも、また、○印の方が×印よりもそれぞれ実線(真値)に近いことが見て取れる。これは筆者の手法によって再現性の精度が向上していると言え、モデル誤差を空間補完した効果の程が窺える。特にモデル誤差の大きなケース1の方が顕著に現れている。また任意点でのモデル誤差の補完量が先に議論した水位変分量と等しければ、この解は必要十分な解(厳密解と同値)となるが、本実験ではE点で既に残差があることから解の必要十分性を満たせていない。しかしこの解が再現性がよくないというわけではない。真の地下水挙動がモデル解に完全に一致しない場合、透水特性分布の解析設定のどこかに不備があって、そこからモデル誤差が生じていても、その場所と誤差状況を特定できないため、モデル誤差の厳密解を算出することは困難で、モデル誤差を埋められないままになる。これに対して本方法ではモデル誤差を観測データから空間的に算定し解析解に加えて必要十分な解に近づけるため、本手法が従来の手法より汎用性は高いと言える。以上の実験から、本提案手法によるモデル誤差の空間補完能力の高さと有効性が確認できる。

#### 4. 透水係数分布モデル構築とモデル誤差

##### (1) 透水係数分布モデル

前節に述べたとおり、実際の透水係数分布は空間的に複雑な様相を呈しているため、解析時の同分布設定がモデル誤差発生の一役を担う可能性がある。特に前節ケース2のように各要素毎に未知な透水係数区域を設けても、観測方程式に入れる観測データ数の不足や、観測点配置の拙さによる類似観測データ発生などの不適切条件下では、パラメータ同定の状態方程式が不定になって高精度の同定解が一意的に求まりにくくなる。図-3に対するケース2の解が図-4のようになってしま

うことからその事実が窺い知れる。

そこで、透水係数分布そのもの、ないしは、その常用対数値の分布が空間的に連続分布していると仮定し、本論文では分布モデルとしてordinary block kriging(OBK)による地盤統計モデルを当てはめる。この利点は透水係数の空間不均一性をひとまとめで扱うことで、未知数が同一透水係数の区域数(=要素数)からOBKのパラメータ数まで減少して観測数の方が上回り、同定解の一意性が得られる点である。ただし、上述したように観測データに類似性があれば実質的に観測数が減少していることになるために解が求まらない場合もある。OBKによる推定式は基本的に式(18)と同じで、

$$k^*(x) = \hat{k}_0 + c(x)^T C^{-1} \hat{w} \quad (23)$$

$$\text{ただし、} \quad \hat{k}_0 = \frac{\alpha^T C^{-1} \phi}{\alpha^T C^{-1} \alpha} \quad (24)$$

$$\hat{w} = \phi - \alpha \frac{\alpha^T C^{-1} \phi}{\alpha^T C^{-1} \alpha} \quad (25)$$

と書ける。ここに、 $\hat{k}_0$ :トレンドのドリフト[定数]である。なお、常用対数透水係数の分布を推定するならば、左辺を $\log k^*(x)$ とおいて考えればよい。

##### (2) 状態変数の変更

同定時に用いる式(22)の状態変数 $x_t$ の透水係数に関する成分を共分散関数の未知定数ベクトルに変更し、

$$x_t = \begin{Bmatrix} h_t^1 \\ \zeta_t \end{Bmatrix} \quad (26)$$

とする。ここに、 $\zeta_t = \{(\zeta_1)_t, (\zeta_2)_t\}^T = \{(\sigma^2)_t, (a_1)_t\}^T$ と定義した部分変数ベクトルを表す。なお $\hat{k}_0$ は $\zeta$ に合わせて式(24)で自動的に求まる従属変数のため、状態変数に入れていない。これに伴い、図-2の状態遷移行列 $F_t$ も以下の4つの感度行列から構成される。

$$F_t = \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial h_{t+1}^1}{\partial h_t^1} \right) h_t^1 = \hat{h}_{t/t}^1 & \left( \frac{\partial h_{t+1}^1}{\partial \zeta_t} \right) \zeta_t = \hat{\zeta}_{t/t} \\ \left( \frac{\partial \zeta_{t+1}^1}{\partial h_t^1} \right) h_t^1 = \hat{h}_{t/t}^1 & \left( \frac{\partial \zeta_{t+1}^1}{\partial \zeta_t} \right) \zeta_t = \hat{\zeta}_{t/t} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$= \begin{bmatrix} J_{hh} & J_{h\zeta} \\ J_{\zeta h} & J_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} \quad (28)$$

いま、 $h_t^2$ を既知境界水位量(式(7)の境界水位成分を抽出した水位ベクトル)とし、これに呼応して、

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\omega_{t+\theta} = \begin{Bmatrix} \omega_{t+\theta}^1 \\ \omega_{t+\theta}^2 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

の様に小行列/小ベクトルに分解する。式(7)を $h_{t+1}^1$ について書き下せば、

$$h_{t+1}^1 = A_{11}^{-1} [B_{11} h_t^1 + B_{12} h_t^2 - A_{12} h_{t+1}^2 + \omega_{t+\theta}^1] \quad (32)$$

であるので、各感度行列は

$$J_{hh} = A_{11}^{-1} B_{11} \quad (33)$$

$$J_{h\zeta} = A_{11}^{-1} \left[ \frac{\partial B_{11}}{\partial \zeta_t} \hat{h}_{t/t}^1 + \frac{\partial B_{12}}{\partial \zeta_t} h_t^2 - \frac{\partial A_{11}}{\partial \zeta_t} \hat{h}_{t+1/t}^1 - \frac{\partial A_{12}}{\partial \zeta_t} h_{t+1}^2 \right] \quad (34)$$

$$J_{\zeta h} = 0 \quad (35)$$

$$J_{\zeta\zeta} = I_2 \quad (36)$$

となる。なお、上記の  $J_{h\zeta}$  において、

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial \zeta_t} = \theta T_{ij} \frac{\partial k_t}{\partial \zeta_t} \quad \left[ T_{ij} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial k_t} \text{ と定義} \right] \quad (37)$$

である。ここに、

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_t}{\partial \zeta_t} &= \frac{\partial \hat{k}_0}{\partial \zeta_t} + \frac{\partial}{\partial \zeta_t} \left( c(x)^T C^{-1} \hat{w} \right) \\ &= \left\{ \left( \frac{\alpha^T C^{-1} c(x) - 1}{\alpha^T C^{-1} \alpha} \alpha^T - c(x)^T \right) C^{-1} \frac{\partial C}{\partial \zeta_t} + \frac{\partial c(x)}{\partial \zeta_t} \right\} \left\{ C^{-1} - \frac{1}{\alpha^T C^{-1} \alpha} C^{-1} \alpha \alpha^T C^{-1} \right\} \phi \end{aligned} \quad (38)$$

と書ける。同様に、

$$\frac{\partial B_{ij}}{\partial \zeta_t} = -(1 - \theta) T_{ij} \frac{\partial k_t}{\partial \zeta_t} \quad (40)$$

と記述でき、最終的に

$$J_{h\zeta} = -A_{11}^{-1} \left[ (1 - \theta) \left\{ T_{11} \frac{\partial k_t}{\partial \zeta_t} \hat{h}_{t/t}^1 + T_{12} \frac{\partial k_t}{\partial \zeta_t} h_t^2 \right\} + \theta \left\{ T_{11} \frac{\partial k_t}{\partial \zeta_t} \hat{h}_{t+1/t}^1 + T_{12} \frac{\partial k_t}{\partial \zeta_t} h_{t+1}^2 \right\} \right] \quad (41)$$

を得る。

### (3) モデル分布同定とモデル誤差の数値実験

ここで提案した分布モデルに対しての同定精度ならびにモデル誤差について検討すべく前節の変更を反映して、数値実験を行った。このときの場合をケース3とする。透水係数の観測は、 $Z_1, Z_7, Z_{16}, Z_{18}$  にて、本稿での一要素以上に大きくならない影響圏での原位置試験ないしは室内要素試験で観測値が得られたと考える。その他の境界条件や観測条件は3節の数値実験と同じとする。その同定実験を行ったところ、 $\sigma^2 = 20.0 (\text{m}^2/\text{day}^2)$ ,  $a = 1000.0 (\text{m})$ ,  $\hat{k}_0 = 243.7905 (\text{m}/\text{day})$  が得られた。それを地盤統計学のOBKで推定した結果、図-6のようになった。これは図-3と比較しても同じものが得られていることがわかる。当然ながら、この場合のモデル誤差は計算するまでもなくゼロである。このように空間相関性が強い場合、本手法で行うことで物理性を考慮しつつもその特性分布を地盤統計学的にモデル化してやれば、不均一な透水係数分布を比較的容易に同定できるようになると言える。

|        |                       |                       |                          |                          |                          |
|--------|-----------------------|-----------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Case 3 | 215.3322<br>( $Z_4$ ) | 255.5558<br>( $Z_8$ ) | 321.1791<br>( $Z_{12}$ ) | 400.0000<br>( $Z_{16}$ ) | 383.3276<br>( $Z_{20}$ ) |
|        | 173.9983<br>( $Z_3$ ) | 200.0000<br>( $Z_7$ ) | 272.5400<br>( $Z_{11}$ ) | 329.4123<br>( $Z_{15}$ ) | 346.6049<br>( $Z_{19}$ ) |
|        | 136.6654<br>( $Z_2$ ) | 171.4817<br>( $Z_6$ ) | 226.1393<br>( $Z_{10}$ ) | 273.9904<br>( $Z_{14}$ ) | 300.0000<br>( $Z_{18}$ ) |
|        | 100.0000<br>( $Z_1$ ) | 146.4934<br>( $Z_5$ ) | 194.3980<br>( $Z_9$ )    | 235.9593<br>( $Z_{13}$ ) | 265.2360<br>( $Z_{17}$ ) |

Unit: m/day

図-6 OBKを用いた透水係数分布の同定結果

## 5. 結論

本研究では、平面地下水モデルに対して空間分布の異なる透水係数を変量とした水位変分量の厳密解を有限要素法を基にして求めた。特に、一方が厳密な透水係数分布を完全に表せていた場合に、その水位変分量はモデル誤差に等しくなると言える。そこで、本論文はそのモデル誤差を補完するために、物理モデルと地盤統計モデルが融合したモデルを導入し、透水係数によるモデル誤差発生を出来る限り軽減する方向で検討した。数値実験を通して、筆者の方法が有効に働き、モデル誤差は全体的に軽減されたことが示された。

しかしながら、観測数が透水係数の未知数に対して不足する条件下であるために物理モデルの構造同定解として高精度な一意性のものが得られず、この条件下ではモデル誤差の完全な解消には至れない。したがって透水係数の空間不均一性もまた地盤統計学の一手法であるOBKによってモデル化し、地下水モデルの透水係数分布として与え、そのパラメータを物理モデル上で直接的に同定する数値実験を試みた。この結果より、非常に高精度の一意解を得られたため、モデル誤差はゼロとなった。以上より、本手法は物理定数の空間分布の解析設定から来るモデル誤差を解消するには非常に有効な手段であることが分かった。

## 参考文献

- 1) 浜口俊雄：統計学的に評価した空間不確定量の地下水流動モデルへの適用，京都大学防災研究所年報，第45号B-2，pp.677-685，2002。
- 2) 浜口俊雄：地下水流動に対するモデル誤差の地盤統計学的改善策と最適モデルの選択法，水工学論文集，第47巻，pp.295-300，2003。
- 3) Wackernagel, H.: Multivariate Geostatistics, Springer, 1995。
- 4) Chilés, J. and Delfiner, P.: Geostatistics Modeling Spatial Uncertainty, John Wiley & Sons, Inc., 1999。
- 5) 浜口俊雄：地下水流況推定における地盤統計学的アプローチの効用，京都大学防災研究所年報，第44号B-2，pp.455-463，2001。
- 6) 長谷川高士，村上 章，浜口俊雄：拡張Kalmanフィルタによる地下水モデルのパラメータ同定と地下水位変動量評価による揚水量決定，土木学会論文集，No.505/III-29，1994。
- 7) 浜口俊雄，村上 章，長谷川高士：平面解析で移動境界を考慮した地下水モデルと逆解析への応用，土木学会論文集，No.568/III-39，pp.133-145，1997。

(2003.9.30 受付)