

固液混相流解析のためのDEM-MPS法の構築

LAGRANGIAN COUPLING FOR SOLID-LIQUID TWO PHASE FLOW

BY DEM-MPS METHOD

後藤仁志¹・林 稔²・安藤 怜³・酒井哲郎⁴

Hitoshi GOTOH, Minoru HAYASHI, Satoshi ANDOH and Tetsuo SAKAI

¹正会員 工博 京都大学助教授 工学研究科土木工学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

²正会員 工修 和歌山県西牟婁振興局建設部治水課 技師 (〒646-8580 田辺市朝日ヶ丘23-1)

³学生会員 京都大学大学院修士課程 工学研究科土木工学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

⁴フェロー 工博 京都大学教授 工学研究科土木工学専攻 (同上)

The Lagrangian model of solid-liquid two phase flow is proposed by combining the Moving Particle Semi-implicit (=MPS) method with the Distinct Element Method (=DEM). The governing equations of two fluid model is discretized by the MPS method, with the model of interparticle collision in solid phase based on the DEM. The relationships of present model with the previous Lagrangian model of a motion of single sediment particle and the non-Newtonian fluid model are discussed. The performance of the present model is investigated by simulating the dropping lump of mud into still water. By comparing the solutions of three models, such as the present model; the two fluid model by the MPS method without the DEM; and the MPS method with the passively moving solids module, the effect of cohesion of mud is reproduced well by the present model.

Key Words: *solid-liquid two phase flow, MPS method, DEM, cohesive sediment*

1. 緒言

自然水域における実現象としての流れは、多くの場合、混相流となる。土石流・流砂・漂砂といった固液混相流、火砕流・雪崩といった固気混相流、溪流でのシュートプール・跳水、あるいは海岸汀線付近の碎波に伴う気泡混入による気液混相流など、対象は多岐に亘る。

混相流は学際的な研究対象であるが、機械系や化学系の流体力学の分野では、反応槽内の流れやプラント内の粉体輸送が主対象であり、気液および固気混相流が多く扱われてきた。これに対して、水工学では、移動床問題の研究が混相流研究を後押ししてきた経緯から、固液混相流についての研究の集積が進んでいる（近年は、碎波帯のダイナミックスの数値モデルが急速に進歩する中で、気液混相流を扱った研究も増加しつつあるが）。そこで、本研究でも、固相（土砂）と液相（水）から成る固液混相流を対象とする。

固液混相流の内部機構については、高濃度粒子混入状態での粒子濃度や粒子移動速度の計測が容易で

はないことが、実験的アプローチの大きな障害となっており、数値モデルによる計算力学的アプローチが実験・計測に先行している。固液混相流のモデリングに関する水理委員会共同研究グループのレビュー^{1)・2)}では、移動床の混相流モデルが、(i)混合体モデル（一流体モデル）、(ii)二流体モデルおよび(iii)流体～粒子モデルに分類され、各モデルの特徴が紹介されている。

混合体モデルは、固相・液相が十分に混合され、固体粒子が十分に分散した状態での平衡流動を対象としたモデルで、土石流の流動則に多く適用されてきた。その一方で、侵食・堆積といった現象は、土砂輸送の非平衡性に起因するものであるから、平衡流動則の適用には一定の限界があるのも事実である。内部機構に立脚した取り扱いで、流砂・漂砂の非平衡過程を扱うには、固相・液相を個別に記述する枠組み（二流体モデル、流体～粒子モデル）が必要となる。なお、上記のレビューでは、液相をEuler的に取り扱うことが前提とされ、固相がEuler的に扱われるEuler-Euler Couplingを二流体モデル、固相がLagrange的に扱われるEuler-Lagrange Couplingを流体

～粒子モデルと分類している。

近年、連続体の基礎式のLagrange的な離散化を可能とする粒子法（SPH³⁾ あるいはMPS法⁴⁾）が急速に発展し、二流体モデルの離散化にも適用されるようになってきており⁵⁾、上記のレビューで示された範疇の枠を越えたCouplingが可能な状況となってきた。粒子法への期待は、自由表面流解析（特に水塊分裂・合体を伴うような碎波等の急変流の解析）への柔軟で広範囲な適用性に下支えされているので、粒子法型の固液混相流モデルの汎用性が向上すれば、溪流での土石流の流動や碎波帯内部の土砂輸送、粘着性土砂の落下流による侵食過程など、これまで混相流モデルに基づく計算力学的なアプローチが困難であった諸問題への適用が可能となる。

本稿では、これまでの著者らの二流体型のMPS法固液二相流モデル⁵⁾を、固相内部の粒子間干渉を表現するDEM型の付加項を導入して拡張する。新しいモデルの解の特性は、泥塊の水面への突入現象を対象に、従来の二流体型のMPS法、剛体モジュール付きMPS法による解との比較を通じて議論される。

2. 基礎式と計算手法

(1) 基礎式の一般形

著者らの二流体型の固液二相流モデル⁵⁾に固相粒子間の衝突項を導入すると、液相・固相の連続式および運動方程式は以下ようになる。

$$\nabla \cdot ((1-\alpha)\rho_l \mathbf{u}_l) = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot (\alpha\rho_s \mathbf{u}_s) = 0 \quad (2)$$

$$\rho_l \frac{D}{Dt}((1-\alpha)\mathbf{u}_l) = -(1-\alpha)\nabla p_l + (1-\alpha)\mu_l \nabla^2 \mathbf{u}_l + \mathbf{f}_{ls} + (1-\alpha)\rho_l \mathbf{g} \quad (3)$$

$$\rho_s \frac{D}{Dt}(\alpha\mathbf{u}_s) = -\alpha\nabla p_s + \alpha\mu_s \nabla^2 \mathbf{u}_s - \mathbf{f}_{ls} + \alpha\rho_s \mathbf{g} + \alpha\mathbf{f}_{col} \quad (4)$$

ここに、ここに、 $\mathbf{u}_m$ ：流速ベクトル、 p_m ：圧力、 ρ_m ：各相の密度、 $\mathbf{f}_{ls}$ ：固相・液相間相互作用力ベクトル、 $\mathbf{g}$ ：重力加速度ベクトル、 μ_m ：粘性係数、 $\mathbf{f}_{col}$ ：固相粒子間衝突力ベクトル、 α ：固相の体積が単位体積に占める割合であり、添字 $m=l, s$ は液相および固相を表している。

(2) 固相の運動方程式

粒子法では、個々の計算点を『粒子』呼ぶが、注目する単位体積に、 N_l 個の液相粒子と N_s 個の固相粒子が存在すると、

$$\alpha = N_s / (N_l + N_s) \quad (5)$$

と書ける。計算は個々の粒子のLagrange的追跡によって実現されるので、基礎式も単一の粒子（計算点）について

$$\rho_l \frac{D\mathbf{u}_l}{Dt} = -\nabla p_l + \mu_l \nabla^2 \mathbf{u}_l + \mathbf{f}_{lsp} + \rho_l \mathbf{g} \quad (6)$$

$$\rho_s \frac{D\mathbf{u}_s}{Dt} = -\nabla p_s + \mu_s \nabla^2 \mathbf{u}_s - \mathbf{f}_{lsp} + \rho_s \mathbf{g} + \mathbf{f}_{colp} \quad (7)$$

のように記述するのが都合がよい。ここに、 $\mathbf{f}_{lsp}$ ：単一粒子に作用する固相・液相間相互作用力ベクトル、 $\mathbf{f}_{colp}$ ：単一粒子に作用する固相粒子間衝突力ベクトルである。なお、グリッドを用いた離散化では、固・液両相の物理量が全てのグリッドで定義されるが、粒子法では、各粒子は固相粒子・液相粒子の何れかである。故に粒子法では、各相間の相互作用が粒径の数倍（重み関数の影響半径程度）のスケールで取り扱われることとなる。移動床を対象とした従来のEuler-Lagrange Coupling⁶⁾では、固相の記述には、単一砂粒子の流体中の運動方程式

$$M_p \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \frac{M_p}{\rho_s} (-\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}) + \mathbf{F}_f + M_p \mathbf{g} + \mathbf{F}_{col} \quad (8)$$

が用いられ、個々の砂粒子の運動の影響が重畳されて固相から液相への影響が評価されてきた。ここに、 M_p ：砂粒子の質量、 $\mathbf{v}_p$ ：砂粒子速度ベクトル、 $\mathbf{F}_f$ ：砂粒子に作用する流体力ベクトル（抗力以外）、 $\mathbf{F}_{col}$ ：粒子間衝突力ベクトルである。この場合、固相から液相への影響は粒子に作用する抗力の反力として取り扱われ、砂粒子と周囲流体の速度差を計算して抗力が推定される。一方、式(8)の表現では、粒子周囲の圧力分布・流速分布の粒子表面上の面積分として得られる流体力を周囲流体の圧力勾配項と粘性項を用いて記述する形式を導入している。したがって、粒子の回転や粒子近傍での局所的な非定常性などの付加的な要素（Magnus揚力、Basset項）を無視する取り扱いでは、 $\mathbf{F}_f=0$ とすればよい。

ところで、粒子法型二相流モデルでは、粒子 i の圧力項および粘性項は、

$$-\frac{1}{\rho} \langle \nabla p \rangle_i = -\frac{1}{\rho} \frac{D_0}{n_0} \sum_{j \neq i} \left\{ \frac{p_j - p_i}{|\mathbf{r}_{ij}|^2} \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{w}(|\mathbf{r}_{ij}|) \right\} \quad (9)$$

$$\nu \langle \nabla^2 \mathbf{u} \rangle_i = \frac{2\nu D_0}{n_0 \lambda} \sum_{j \neq i} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) w(|\mathbf{r}_{ij}|) \quad (10)$$

$$\lambda = \sum_{j \neq i} w(|\mathbf{r}_{ij}|) |\mathbf{r}_{ij}|^2 / \sum_{j \neq i} w(|\mathbf{r}_{ij}|) \quad (11)$$

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i \quad (12)$$

$$w(r) = \begin{cases} \frac{r_e}{r} - 1 & \text{for } r \leq r_e \\ 0 & \text{for } r > r_e \end{cases} \quad (13)$$

のように近傍に存在する粒子との相互作用としてモデル化される⁷⁾ (D_0 : 次元数; $\mathbf{r}_i$: 粒子 i の位置ベクトル; $w(r)$: 重み関数⁸⁾ (相互作用の影響範囲); r : 距離; r_e : 影響半径). そこで, 固相粒子の運動方程式 (式(7)) に関して, 圧力項および粘性項を固相粒子間 (添字ss) と固相・液相粒子間 (添字ls) に分けて, 粒子の回転や粒子近傍での局所的な非定常性などの付加的な要素を無視すれば,

$$\rho_s \frac{D\mathbf{u}_s}{Dt} = (-\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u})_{ss} - \mathbf{f}_{isp} + \rho_s \mathbf{g} + \mathbf{f}_{colp} \quad (14)$$

$$\mathbf{f}_{isp} = -(-\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u})_{ls} \quad (15)$$

が得られる. 以上より, 固相粒子の運動方程式は,

$$\rho_s \frac{D\mathbf{u}_s}{Dt} = (-\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u})_{ls} + \rho_s \mathbf{g} + \mathbf{f}_{colp} + (-\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u})_{ss} \quad (16)$$

と書ける. この式で,

$$(-\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u})_{ls} = \text{流体力}$$

であるから,

$$\mathbf{f}_{colp} + (-\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u})_{ss} = \text{固相粒子間相互作用}$$

と意味付けることができる.

(3) 固相の運動方程式と混合体モデル

混合体モデルは, 固相と液相が十分に混合した状態の流動則を与えるためのモデルであるが, 液相の濃度が十分に小さい状態では, 固相が支配的な状態を記述するモデルとなるはずである. そこで, 非Newton流体を対象とした混合体モデルの運動方程式と本稿で用いる固相の運動方程式を比較して, 先に類推的に扱った固相粒子間相互作用項の意味について, 検討する.

Dilatant流体およびBingham流体の運動方程式は,

$$\begin{aligned} \rho_{NN} \frac{Dv_{NNi}}{Dt} &= \rho_{NN} K_{NNi} - \frac{\partial p_{NN}}{\partial x_i} \\ &+ \mu_{NN} (2\Pi)^{\frac{n-1}{2}} \nabla^2 v_{NNi} \\ &+ 2\mu_{NN} e_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left((2\Pi)^{\frac{n-1}{2}} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \rho_{NN} \frac{Dv_{NNi}}{Dt} &= \rho_{NN} K_{NNi} - \frac{\partial p_{NN}}{\partial x_i} \\ &+ \left(\eta_B + \frac{\tau_y}{\sqrt{2\Pi}} \right) \nabla^2 v_{NNi} \\ &+ 2e_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\tau_y}{\sqrt{2\Pi}} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (19)$$

$$\Pi = 4 \sum_{i,j} e_{ij} e_{ji} \quad (20)$$

で与えられる⁹⁾. ここに, τ_y : 降伏応力; μ_B : Bingham粘性; K_i : 体積力 (重力); n : 定数; e_{ij} : 歪速度テンソルであり, 添字NNは非Newton流体を意味する. これらの運動方程式は, Newton流体と比較すると, (i) 付加的粘性 (粘性項の変化) および(ii) 付加力 (Bingham流体では降伏応力に関係) が出現する点で異なっている.

ここで, 本稿の固相粒子の運動方程式の付加項に再度着目すると,

$$(\mu \nabla^2 \mathbf{u})_{ss} = \text{付加的粘性}$$

$$\mathbf{f}_{colp} + (-\nabla p)_{ss} = \text{付加力}$$

という対応があることが分かる.

(4) 固相粒子間相互作用モデル

固相粒子間の相互作用モデルとしては, MPS法の固相粒子 (計算点) と同一径, 同一質量の仮想的円盤を導入し, 接触する円盤間にスプリング-ダッシュポットを置いて相互作用をモデル化する個別要素法型の取り扱いとする.

固相粒子間の相互作用は,

$$\mathbf{f}_{colp} = \begin{bmatrix} \sum_j \{ -f_n \cos \alpha_{ij} + f_s \sin \alpha_{ij} \}_j \\ \sum_j \{ -f_n \sin \alpha_{ij} + f_s \cos \alpha_{ij} \}_j \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} f_n(t) &= e_n(t) + d_n(t) \\ f_s(t) &= e_s(t) + d_s(t) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} e_n(t) &= e_n(t - \Delta t) + k_n \cdot \Delta \xi_n \\ e_s(t) &= e_s(t - \Delta t) + k_s \cdot \Delta \xi_s \\ d_n(t) &= \eta_n \cdot \Delta \dot{\xi}_n \\ d_s(t) &= \eta_s \cdot \Delta \dot{\xi}_s \end{aligned} \quad (23)$$

と書ける. f_n, f_s : 固相粒子 ij 間の法線 (添字 n) および接線 (添字 s) 方向の作用力, α_{ij} : 固相粒子 ij の接触

角, k_n, k_s : 弾性スプリング定数, η_n, η_s : 粘性ダッシュポット定数, e_n, e_s : バネによる抗力, d_n, d_s : ダッシュポットによる抗力, $\Delta\xi_n, \Delta\xi_s$: 時間 Δt 間の変位である。

土砂の粘着性の表現のため、法線方向に引っ張り抵抗を想定して、粒子間距離の10%を越える変位が累積するまでは結合が切断されないように

$$f_n(t) = f_s(t) = 0 \quad \text{when} \quad \xi_n < -0.1 \left(\frac{d_i + d_j}{2} \right) \quad (24)$$

と設定している。なお、スプリング-ダッシュポットの諸定数の決定には、著者らの推定法¹⁰⁾を用いて k_n の標準値を求め、泥塊の挙動を確認しつつ調整を行った。モデル定数は、 $k_n = 1.0 \times 10^6 (\text{N/m})$; $k_s = 1.0 \times 10^6 (\text{N/m})$; $\eta_n = 1.0 \times 10^5 (\text{Ns/m})$; $\eta_s = 1.0 \times 10^4 (\text{Ns/m})$ とした。

(5) 計算アルゴリズム

MPS法の解法については、越塚⁷⁾によって詳しく解説されているので、二相流計算を対象に、概要のみを述べる(図-1参照)。運動方程式の時間積分過程には2段階法が用いられる。第1段階は、粘性項を与えて粒子の速度(流速)を計算し、粒子の仮位置および仮数密度を算定する陽的なプロセスである。第1段階で更新された場では、質量保存(粒子数密度が一定値 n_0 に一致すること)が満足されていないから、第2段階では圧力項と数密度で記述された質量保存則から誘導される圧力のPoisson方程式を陰的に解いて圧力場を更新し、流速の修正量を求めて流速場および粒子の位置を修正する。固相・液相間の相互作用が計算されるのは、粘性項の評価と圧力場の算定においてである。なお、固相に関しては、固相粒子の座標の更新の後に、個別要素法による固相粒子間衝突項の計算を実施する。

MPS法の計算時間間隔は、 $\Delta t_{\text{MPS}} = 0.5 \times 10^{-4} \text{s}$ と設定しているが、個別要素法部分は陽解法で計算しているため、計算時間間隔を $\Delta t_{\text{DEM}} = 0.01 \Delta t_{\text{MPS}}$ とし、MPS法の1step中に、個別要素法ルーチンを100stepに分割して実行した。

(6) 計算領域・計算条件

計算対象は、水深7.0cmの静水に水面上10.0cmから泥塊が自由落下して水面に突入する過程であり、総粒子数1044個、水粒子(液相)545個、泥塊粒子(固相)37個、壁粒子462個である。粒子径は均一で、 $d=1.0\text{cm}$ 、泥塊粒子の比重は2.65である。

計算は、同一の計算領域(粒子配列)を対象に、3種のフレームワーク(DEM-MPS法(本稿のモデル)、従来の二流体型のMPS法⁵⁾および剛体モジュール付きMPS法¹¹⁾)で実施した。

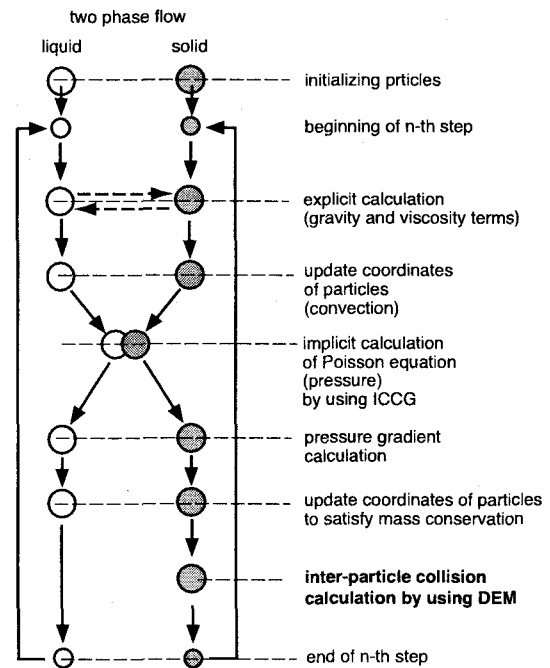


図-1 計算のフロー

3. 泥塊の水面突入過程

DEM-MPS法による泥塊の水面突入過程(泥塊の着水から0.1sの間)の計算結果を、二流体型のMPS法および剛体モジュール付きMPS法の計算結果とともに、図-2に示す。

DEM-MPS法の結果を見ると、気相の影響は考慮していないので、泥塊は初期形状(正六角形)を保持したまま水面に到達する。その後、水中への泥塊の貫入が進行する過程で泥塊は側方へと引き伸ばされ、粒径の数倍の厚さの板状の塊へと変形し(時刻 $t=0.08\text{s}$)、3つの塊に分裂する(時刻 $t=0.1\text{s}$)。これに対して、二流体型のMPS法では、泥塊の水面到達直後から、泥塊の下面が押し潰されるようにして側方へと広がり、六角形の形状は失われて、腕を伏せたような形状へと変形する(時刻 $t=0.02\text{s}$)。その後、上に凸の皿状(時刻 $t=0.04\text{s}$)、粒径の数倍の厚さの板状(時刻 $t=0.06\text{s}$)と側方へと引き伸ばされて、粒径程度の厚さの膜状の分布を水面上に呈する(時刻 $t=0.08-0.1\text{s}$)。DEM-MPS法の泥塊の解は、大略的には、二流体型のMPS法と剛体モジュール付きMPS法の中間的な特性を有している。DEM-MPS法では、二流体型のMPS法のフレームワークに個別要素法型の粒子間干渉項を付加しており、今回の計算では引張抵抗を導入していることから、泥塊粒子間の結合力がDEM-MPS法で大きく設定される。このため、泥塊の粘着性の影響を見込んだ解が得られることとなる。

次に、泥塊の周囲の流体の挙動について見ると、

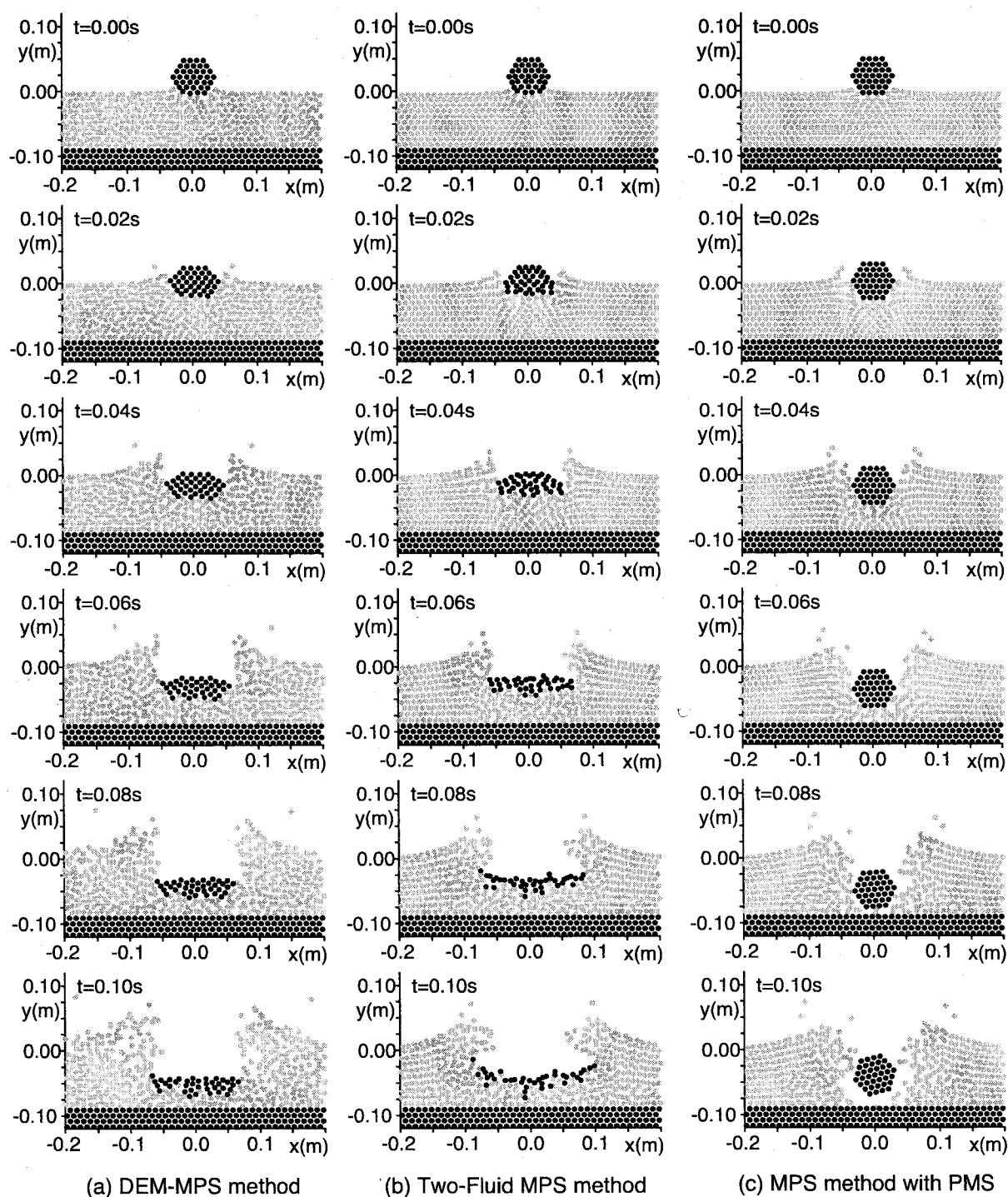


図-2 泥塊の水面突入（DEM-MPS・二相流型MPS・剛体モジュール付きMPSの比較）

DEM-MPS法が最も激しく周囲水を乱しており、広範囲に飛沫が上がっている。剛体モジュール付きMPS法では、幅の狭い領域に剛体の質量が集中するので、水幕が素早く切り裂かれ、周囲水に及ぶ影響が限定的となる。これに対して、DEM-MPS法や二流体型のMPS法では、泥塊が側方に引き伸ばされることから、影響域が大きくなり、大規模な水塊の上昇が生じる。二流体型のMPS法では、固相が周囲の液相と

協調的に挙動するので、周囲水の乱れは限定的であるが、DEM-MPS法では、泥塊が下方へと一体化して沈降するので、側方へと押し退けられる水塊が側方で湧昇して、周囲水を乱している。

図-3に、DEM-MPS法の固相粒子間の接触応力分布を示す。粒子の中心間を結ぶ線の太さが応力レベルを、線の向きが応力の作用方向を表している。

時刻 $t=0.06\text{ s}$ には、顕著な引張領域が固相粒子分布

域の端部で確認され、中心部でも引張傾向が強くなっている。泥塊は全体としても側方へ引き伸ばされるように変形するが、固相粒子間の引張の顕在化はこの挙動と対応している。時刻 $t=0.08\text{ s}$ に大きな引張力が作用する粒子間の結合（図中に bond A と表示）は、時刻 $t=0.1\text{ s}$ には切断されている。時刻 $t=0.1\text{ s}$ に3つの塊に分裂した後も、全体として引張を受ける結合点が多くなっており、分裂傾向が継続していることが分かる。

4. 結 語

本稿では、固相内部の粒子間衝突を表現するDEM型の付加項を導入して、二流体型のMPS法固液二相流モデル⁵⁾を拡張するDEM-MPS法を提案し、泥塊の水面への突入現象を対象として、モデルの特性を検討した。粒子間の引張抵抗を導入して泥塊の粘着性を記述したDEM-MPS法の解は、従来の二流体型のMPS法と剛体モジュール付きMPS法の中間の特性を示し、少なくとも定性的には、モデルの構築意図が実現できていることが確認できた。

本稿では、従来の粒子法で剛体粒子群あるいは液体粒子群として表現せざるを得なかった固相の挙動を、両者の中間状態（粘弾性体の性質）にまで拡張する可能性を示すことができた。しかし、モデルは発展途上であり、以下の諸課題への対応が急務である。

(1) 固相粒子間干渉を表現するDEMルーチンは、陽解法で記述されているので、安定性の確保には計算時間間隔を十分に小さくする必要がある。DEMルーチンを陰解法化して、計算効率を向上させる改良が必要である。

(2) 現在のモデルでは、粒子の回転の周囲流体への影響が考慮されていない。流体力の評価において回転の影響を加味することを検討すべきである。

(3) 混合体モデルと本モデルの関係については、付加項の対応を定性的に検討したに過ぎない。より詳細な検討を進めて、既往の理論との関係を明らかにする必要がある。

なお、これら以外にも、3次元性への対応、サブ粒子スケール(=SPS)の乱流モデルの導入など、MPS法共通の課題にも平行して対応する必要があるのは言うまでもない。

参考文献

- 1) 水理委員会共同研究グループ（芦田和男・江頭進治・佐々木幹夫・清水義彦・関根正人・玉井昌宏・藤田正治・宮本邦明・森 明巨）：固液混相流における支配方程式の構造について，水工学論文集，第38巻，pp.563-570，1994.
- 2) 水理委員会共同研究グループ（芦田和男・江頭進

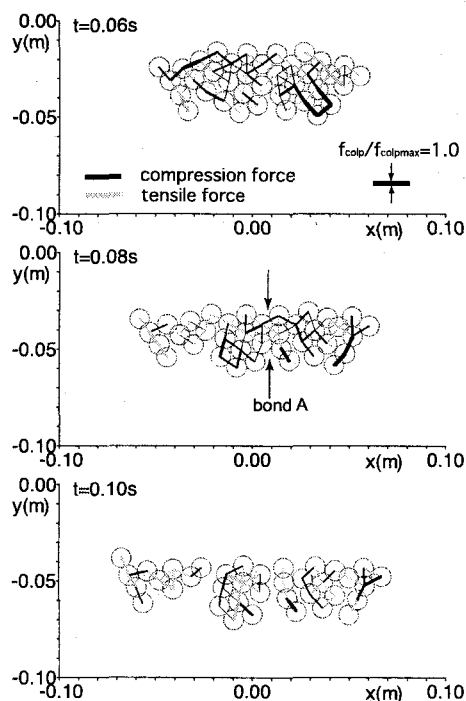


図-3 固相粒子間応力

治・佐々木幹夫・清水義彦・関根正人・玉井昌宏・藤田正治・宮本邦明・森 明巨）：固液混相流における支配方程式とその適用性，水工学論文集，第39巻，pp.537-550，1995.

- 3) Monaghan, J. J. and Kos, A.: Solitary waves on a cretan beach, *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng.*, ASCE, Vol. 125, pp.145-154, 1999.
- 4) Koshizuka, S. and Oka, Y.: Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid, *Nuclear Science and Engineering*, Vol. 123, pp.421-434, 1996.
- 5) 後藤仁志・Jørgen Fredsøe: Lagrange型固液二相流モデルによる海洋投棄微細土砂の拡散過程の数値解析，海岸工学論文集，第46巻，pp.986-990，1999.
- 6) 後藤仁志・Yeganeh, A.・酒井哲郎：混相流モデルと個別要素法の融合による高濃度掃流層の数値解析，土木学会論文集，第649号/II-51，pp.17-26，2000.
- 7) 越塚誠一：数値流体力学，インテリジェントエンジニアリングシリーズ，培風館，p223，1997.
- 8) Koshizuka, S. and Oka, Y.: Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid, *Nuclear Science and Engineering*, Vol. 123, pp.421-434, 1996.
- 9) 日本流体力学会編：流体力学ハンドブック（第2版），丸善，p1294，1998.
- 10) 後藤仁志・原田英治・酒井哲郎：個別要素法に基づく移動床シミュレーターのモデル定数の最適化，土木学会論文集，第691号/II-57，pp.159-164，2001.
- 11) Koshizuka, S., Nobe, A. and Oka, Y.: Numerical analysis of breaking waves using the moving particle semi-implicit method, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 26, pp.751-769, 1988.

(2002. 9. 30受付)