

加速・減速流の流速分布に関する簡易モデルと その水深積分モデルへの適用について

A SIMPLE MODEL OF A VELOCITY DISTRIBUTION IN ACCELERATING/ DECELERATING FLOWS AND ITS APPLICATION TO DEPTH-AVERAGED FLOW MODEL

音田 慎一郎¹・細田 尚²・木村 一郎³
Shinichiro ONDA, Takashi HOSODA and Ichiro KIMURA

¹学生員 修(工) 京都大学大学院 工学研究科土木工学専攻博士課程 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

²正会員 工博 京都大学大学院教授 工学研究科土木工学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

³正会員 博(工) 四日市大学助教授 環境情報学部環境情報学科 (〒512-8512 三重県四日市市萱生町1200)

In open channel flows with variations of bed topography, the flow is influenced by accelerating/ decelerating effects. A simple model of a velocity distribution in such flows was proposed in this paper. In the model building, we assume that a fundamental form of velocity distribution is expressed as a power law and substitute it into a steady equation of motion. Then, the coefficients of the power law are theoretically derived by making the terms at each orders zero. The characteristics of this model are examined through the comparison with the experiments by Song&Graf. In addition, the bed shear stress in this model is examined to apply it to the depth-averaged flow model.

Key Words : accelerating /decelerating flow, vertical velocity profile, depth-averaged flow model

1. はじめに

河川流域の流れと土砂輸送を数値的に予測する場合, 水深積分モデルを用いて流れ場を解析する方法が実用的である。その際, 流速分布形の変化をできるだけモデルに考慮し, 運動量方程式に現れる底面せん断応力項などを精度よく評価する必要がある。本研究は, 河床波上や河道蛇行部など, 様々な境界形状の流れ場において生ずる流れの加速・減速をモデルに反映させることを目的とし, 加速・減速流の流速分布に関する簡易モデルの開発と水深積分モデルへの適用について考察したものである。

加速・減速流については従来から実験的, 理論的研究が行われている^{1),2),3),4)}。Song&Graf¹⁾, 棚津ら^{3),4)}は, 粗面または滑面上の加速・減速流を超音波ドップラー流速計(ADVP), レーザー流速計(LDA)を用いて計測し, 加速流と減速流では平均流速, 乱れ強さおよびレイノルズ応力の分布特性が等流の分布と異なることを指摘している。さらに, Song&Grafは摩擦速度, レイノルズ応力の評価方法について理論的に考察し, 棚津らは種々の摩擦速度の算定方法について比較を行っている。ここで, 加速・減速流の流速分布, 摩擦速度を求める方法として, 対数則, あるいはべき乗則による方法が検討されているが, 対数則を用いる方法は, 水深積分モデルへの適用が困

難であり, また, べき乗則を適用したSong&Grafの方法では, 圧力勾配が変化してもべき乗数を一定としているため, 加速・減速流の流速分布特性を再現できない。

一方, 波状路床上流れの底面せん断応力の評価について様々な考察が行われている。Nakagawa & Tsujimoto⁵⁾は河床波の発生過程に関する線形不安定解析を行い, 流速と底面せん断応力との位相差がポテンシャル流解析から得られる局所流速に加速・減速効果を考慮することで評価できることを示している。また, 細田ら⁶⁾は上記の方法を発展させ, 加速・減速効果を表す項に路床の波形勾配を付加することで, 波状路床上流れの底面せん断力が再現できることを指摘している。

そこで本研究では, 等流の流速分布形を理論的に求めたEngelundモデル⁷⁾を応用し, 流れの加速・減速をモデルに導入するため, 移流項を加えた運動方程式から加速・減速流の流速分布に関する簡易モデルを誘導する。導かれたモデルを従来の実験結果と比較することで, モデルの検証を行う。さらに, 水深積分モデルへ適用する際の底面せん断応力項の評価について考察するとともに, 波状路床上流れの評価式と同様, 水深勾配に伴って変化することを示す。

表-1 Song&Grafの実験の水理量

Exp.	S %	Q l/s	h cm	δ cm	U cm/s	Fr	Re ($\times 10^5$)	u_{*c} cm/s	u_* cm/s	u_{*r} cm/s	dh/dx	β
AS00-Q145	0	145	20.0	14.12	120.83	0.86	2.50	9.24	9.30	9.70	-0.0170	-3.86
AS00-Q100	0	100	16.2	13.72	102.88	0.82	1.72	8.05	8.00	8.23	-0.0122	-3.03
AS00-Q80	0	80	14.5	12.13	91.95	0.77	1.38	7.21	7.16	7.55	-0.0090	-2.50
AS25-Q100	-0.25	100	16.9	12.92	98.62	0.77	1.73	8.26	7.91	7.89	-0.0160	-3.58
AS25-Q80	-0.25	80	15.1	12.13	88.30	0.73	1.38	7.36	7.28	7.36	-0.0130	-2.87
AS25-Q60	-0.25	60	13.1	10.54	76.34	0.67	1.04	7.12	6.68	7.54	-0.0118	-2.68
AS50-Q110	-0.50	110	17.9	12.13	102.42	0.77	1.89	7.32	7.68	8.05	-0.0200	-4.47
AS50-Q80	-0.50	80	15.9	12.13	83.86	0.67	1.37	6.86	6.90	6.85	-0.0146	-3.15
AS75-Q100	-0.75	100	18.2	11.73	91.58	0.69	1.73	7.45	7.20	7.42	-0.0200	-4.31
AS75-Q80	-0.75	80	16.5	11.73	80.81	0.64	1.38	6.54	6.46	7.17	-0.0170	-3.69
AS93-Q100	-0.93	100	19.0	12.13	87.72	0.64	1.73	7.14	6.85	6.52	-0.0205	-4.45
AS93-Q80	-0.93	80	17.2	11.33	77.52	0.60	1.38	6.96	6.30	6.80	-0.0189	-4.08
DS25-Q90	0.25	90	20.0	20.0	75.00	0.54	1.56	5.19	5.12	4.95	0.0016	-0.69
DS25-Q70	0.25	70	16.0	16.0	72.92	0.58	1.21	5.07	5.04	4.72	0.0013	-0.71
DS50-Q90	0.50	90	18.5	18.5	81.08	0.60	1.55	6.84	6.91	6.54	0.0038	-0.456
DS50-Q70	0.50	70	16.5	16.5	70.71	0.56	1.21	6.20	5.86	6.28	0.0038	-0.566
DS50-Q55	0.50	55	14.5	14.5	63.22	0.53	0.95	5.68	5.20	5.53	0.0038	-0.631
DS75-Q80	0.75	80	20.5	20.5	65.04	0.46	1.38	5.04	4.95	5.07	0.0079	0.330
DS75-Q60	0.75	60	17.0	17.0	58.82	0.46	1.04	4.96	4.91	4.97	0.0076	0.070
DS90-Q80	0.90	80	18.0	18.0	74.07	0.56	1.38	6.58	6.42	6.52	0.0095	0.214
DS90-Q70	0.90	70	18.0	18.0	64.81	0.49	1.21	5.45	5.30	5.36	0.0096	0.337

2. 加速・減速流に関する実験結果の考察

Song&Graf¹⁾は、長さ16.8m、幅0.6m、高さ0.8mの可変勾配水路において、粗面での加速・減速流を超音波ドップラー流速計により計測している。実験の水理量を表-1に示す。表の水理量は、流れが十分に発達し、平衡状態に達した断面での計測結果である。ここに、 S :路床勾配、 Q :流量、 h :水深、 δ :路床から最大流速点までの距離、 U :断面平均流速、 Fr :フルード数、 Re :レイノルズ数、 u_{*c} : St.Venant方程式から計算される摩擦速度($\sqrt{gh\{S-dh/dx[1-Fr^2]\}}$)、 u_* : Clauser法による摩擦速度、 u_{*r} : レイノルズ応力分布から算出される摩擦速度、 dh/dx : 水深勾配、 β : 無次元圧力勾配パラメータ($\rho gh(-S+dh/dx)/\tau_{bx}$)、 ρ : 水の密度、 g : 重力加速度である。

図-1は、加速・減速が最も強いケースでの主流方向流速について実験結果を示したものである。図中の u は主流方向流速、 η は相対水深($=y/h$)である。

Song&Grafは、減速流の場合の流速分布が加速流に比べてやせた分布を示すこと、最大流速点のdipが起こらないことを指摘している。瀬津ら³⁾の計測においても同様な傾向が示されている。

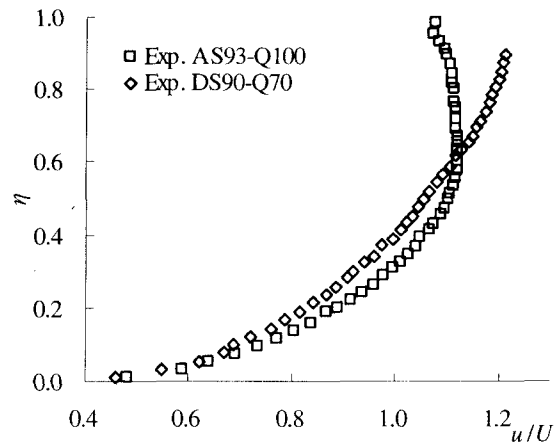


図-1 主流方向流速分布に関する実験結果

3. 簡易モデルの誘導

(1) 加速・減速効果を考慮した流速分布の誘導

まず、定常等流での運動方程式(1)から主流方向流速分布を誘導したEngelundモデル⁷⁾を簡単に紹介す

る。座標系は路床に沿うようにx軸，路床と直交方向にy軸をとる。

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} = -g \sin \theta \quad (1)$$

ここに、 τ :せん断応力、 θ :路床勾配である。

渦動粘性係数 ε を一定とし、せん断応力を以下のように仮定すると、式(1)は式(3)となる。なお、渦動粘性係数 ε は、式(2)で与えられる。

$$\frac{\tau}{\rho} = \varepsilon \frac{du}{dy}$$

$$\varepsilon = \beta u_* h, \quad \beta = 0.077 \quad (2)$$

$$\beta u_* h \frac{d^2 u}{dy^2} = -g \sin \theta \quad (3)$$

上式をy軸方向に積分すると、次のようになる。

$$\beta u_* h (u - u_b) = g \sin \theta \left(hy - \frac{y^2}{2} \right) \quad (4)$$

ここで、主流方向流速分布(4)が式(5)を満足することを考慮すると、底面 $y=y_b$ (この場合 $y_b=0$)での流速 u_b について式(6)が得られる。

$$Uh = \int_{y_b}^y u dy \quad (5)$$

$$u_b = U - \frac{u_*}{3\beta} \quad (6)$$

底面流速 u_b と摩擦速度 u_* の関係を式(7)のように r_* を用いて定義し、式(6)から u_b を消去すると式(8)のように変形され、式(4)は最終的に式(9)となる。

$$u_b = r_* u_* \quad (7)$$

$$u_* \left(r_* + \frac{1}{3\beta} \right) = U \quad (8)$$

$$\frac{u}{U} = \frac{\beta r_* + \xi - \xi^2/2}{1/3 + \beta r_*}, \quad \xi = y/h \quad (9)$$

上記のEngelundモデルは、等流の運動方程式から流速分布を誘導しているため、加速・減速に伴う移流が考慮されておらず、実験結果に見られるような加速・減速流の流速分布および底面せん断応力の特性を再現できない。

そこで本研究では、Engelundモデルを応用し、加速・減速効果をモデルに導入するため、移流項を加えた運動方程式から流速分布形を求める。誘導過程を以下に示す。実験結果の流速分布を詳細に再現するため、まず、流速分布を式(10)のように相対水深 η に関する5次のべき乗表示で仮定する。なお用いる座標系は図-2のとおりである。

$$\frac{u}{U} = u_0 + u_1 \eta + u_2 \eta^2 + u_3 \eta^3 + u_4 \eta^4 + u_5 \eta^5 \quad (10)$$

ここに、 $\eta = (y - y_b)/h$ である。

式(10)を連続式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

に代入し、 y_b から y まで積分すると、鉛直方向流速分布 v に関して次式が得られる。

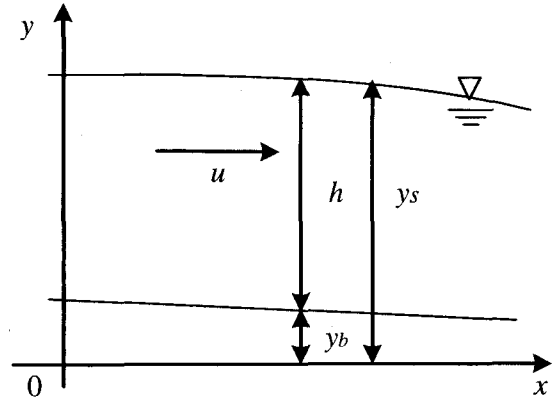


図-2 座標系の説明

$$\begin{aligned} v = & -\frac{\partial Uh}{\partial x} \left(u_0 \eta + u_1 \frac{\eta^2}{2} + u_2 \frac{\eta^3}{3} \right. \\ & \left. + u_3 \frac{\eta^4}{4} + u_4 \frac{\eta^5}{5} + u_5 \frac{\eta^6}{6} \right) \\ & + U \left(u_0 + u_1 \eta + u_2 \eta^2 + u_3 \eta^3 \right. \\ & \left. + u_4 \eta^4 + u_5 \eta^5 \right) \left(\eta \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial y_b}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、水深積分モデルの定常状態の連続式(12)を用いると、式(11)は式(13)となる。

$$\frac{\partial Uh}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

$$\begin{aligned} v = & U \left(u_0 + u_1 \eta + u_2 \eta^2 + u_3 \eta^3 \right. \\ & \left. + u_4 \eta^4 + u_5 \eta^5 \right) \left(\eta \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial y_b}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

式(10)、(13)を定常でのx方向の運動方程式

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \beta u_* h \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (14)$$

に代入し、 η に関する5次のオーダーまでで整理すると式(15)が得られる。但し、せん断応力を表す式(14)右辺最終項は、Engelundモデルと同様に評価することとし、また、式(15)を導く際、底面せん断応力の定義から u_1 と u_* の関係について式(16)を用いている。

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dx} \{ & u_0^2 + 2u_0 u_1 \eta + (u_1^2 + 2u_0 u_2) \eta^2 \\ & + (2u_0 u_3 + 2u_1 u_2) \eta^3 + (2u_0 u_4 + 2u_1 u_3 + u_2^2) \eta^4 \\ & + (2u_0 u_5 + 2u_1 u_4 + 2u_2 u_3) \eta^5 \} - \frac{h}{\rho U^2} \frac{\partial p}{\partial x} \\ & + \beta^2 u_1 (2u_2 + 6u_3 \eta + 12u_4 \eta^2 + 20u_5 \eta^3) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\beta u_* U u_1 = u_*^2 \quad (16)$$

a , b をそれぞれ以下のように置き、 η の各次数の係数を0とすることで、 u_0 - u_5 に関する代数方程式(17)-(20)が得られる。

$$a = \frac{dh}{dx}, \quad b = -\frac{h}{\rho U^2} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$au_0^2 + b + 2\beta^2 u_1 u_2 = 0 \quad (17)$$

$$2au_0 u_1 + 6\beta^2 u_1 u_3 = 0 \quad (18)$$

$$a(u_1^2 + 2u_0 u_2) + 12\beta^2 u_1 u_4 = 0 \quad (19)$$

$$a(2u_0 u_3 + 2u_1 u_2) + 20\beta^2 u_1 u_5 = 0 \quad (20)$$

さらに、式(10)が式(5), (7)の関係を満足することを考慮すると、次式が求められる。

$$u_0 = \beta r_* u_1 \quad (21)$$

$$u_0 + \frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{3} + \frac{u_3}{4} + \frac{u_4}{5} + \frac{u_5}{6} = 1 \quad (22)$$

以上より得られた代数方程式を解くと、式(10)の係数 u_0 - u_5 は次のようになる。

$$u_0 = \beta r_* u_1 \quad (23)$$

$$u_1 = \frac{u_*}{\beta U} \quad (24)$$

$$u_2 = -\frac{b}{2\beta^2 u_1} - \frac{ar_*^2}{2} u_1 \quad (25)$$

$$u_3 = -\frac{ar_* u_1}{3\beta} \quad (26)$$

$$u_4 = \left(-\frac{a}{12\beta^2} + \frac{a^2 r_*^3}{12\beta} \right) u_1 + \frac{abr_*}{12\beta^3 u_1} \quad (27)$$

$$u_5 = \frac{a^2 r_*^2 u_1}{12\beta^2} + \frac{ab}{20\beta^4 u_1} \quad (28)$$

なお、圧力分布について静水圧を仮定すると、上式中の係数 b は以下のように表される。

$$b = -\frac{gh}{U^2} \frac{dy_s}{dx}$$

(2) 流速分布形の計算手順

断面平均流速 U 、水深 h 、路床勾配 dy_b/dx 、水深勾配 dh/dx について、加速・減速流の実験結果の値を与えれば、 a 、 b は既知量となる。また、 r_* は等流での底面流速と摩擦速度の比であり、普遍定数として考える。しかし、本研究で比較するSong&Grafの実験結果には等流の結果が示されていないため、便宜的ではあるが、以下の方法で r_* を決める。まず、粗面の平均流速式(29)に各実験結果の水深 h を代入し、 U/u_* を求める。次に、得られた U/u_* を式(8)に代入し、 r_* を計算すると、 r_* が7.5から8.5となることから、8.5と小さい場合の6.5として評価した。

$$\frac{U}{u_*} = A_r - \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{h}{k_s} \quad (29)$$

ここに、 k_s :相当粗度(実験での砂礫の平均粒径1.23 cm)、 A_r :8.5、 κ :カルマン定数(=0.4)である。

よって、式(23)-(28)より u_1 が U/u_* のみの関数として表され、 u_1 が決まると u_0 、 u_2 - u_5 が計算できる。そこで、式(23), (25)-(28)を式(22)に代入すると、 u_1 に関する2次方程式が得られる。

$$\left\{ \beta r_* + \frac{1}{2} - a \left(\frac{r_*^2}{6} + \frac{r_*}{12\beta} + \frac{1}{60\beta^2} \right) + a^2 \left(\frac{r_*^3}{60\beta} + \frac{r_*^2}{72\beta^2} \right) \right\} u_1^2 - u_1$$

$$-b \left(\frac{1}{6\beta^2} - \frac{ar_*}{60\beta^3} - \frac{a}{120\beta^4} \right) = 0 \quad (30)$$

式(30)を u_1 について解き、式(23), (25)-(28)に代入することで、流速分布式(10)の各係数が求められる。

また、本簡易モデルによる底面せん断応力は、式(26)から以下のように評価される。

$$\frac{\tau_{bx}}{\rho} = u_*^2 = (\beta U u_1)^2 \quad (31)$$

4. 実験結果と簡易モデルの比較

本簡易モデルを検証するため、Song&Grafの実験に適用する。

図-3は、簡易モデルの流速分布式(10)と実験結果を比較したものであり、右側の図が $r_*=8.5$ の場合を左側の図が6.5の場合を示している。加速流(a), (b)の場合については、ふっくらとした流速分布になるという実験結果の特徴を捉えているが、簡易モデルと実験結果が十分に適合しているとは言い難い。これは、流れの3次元性が十分にモデルに考慮されていないためであると考えられる。この点については今後さらに検討を要する。一方、減速流(c), (d)の場合には、Engelundモデルよりも実験結果にほぼ適合する結果が得られた。

図-4は、実験の水理量で断面平均流速 U 、水深 h 、路床勾配 dy_b/dx を固定し、水深勾配 dh/dx を変化させた場合の底面せん断応力分布を示したものである。図には、実験結果も併せてプロットした。なお、ここでの r_* は8.5を用いている。摩擦速度の評価法によって、実験結果に多少のばらつきがあるが、流速分布の結果と同様、加速流では適合性が十分ではなく、減速流についてはほぼ一致している。また、水深勾配の変化に伴って、底面せん断応力がほぼ直線的に分布しており、波状路床上流れの底面せん断応力の評価式(32)と同様に評価されることがわかる。

$$u_*^2 = \frac{\tau_{bx}}{\rho} = c_{f0} u_b^2 \left(1 - \Gamma \frac{dh}{dx} \right) \quad (32)$$

(Nakagawa&Tsujimoto)

ここに、 u_* :摩擦速度、 τ_{bx} :底面せん断応力、 c_{f0} :抵抗係数である。

5. おわりに

本研究は、加速・減速流の流速分布に関する簡易モデルの誘導と水深積分モデルへ適用する際の底面せん断応力項の評価について考察したものである。流れの加速・減速をモデルに導入することで、減速流の場合には、本モデルによる流速分布、底面せん断応力が実験結果とほぼ適合することを確認した。

今後、加速流の場合についてモデルの検討を行うとともに、河床波上などの流れの数値解析に本モデルを適用したい。

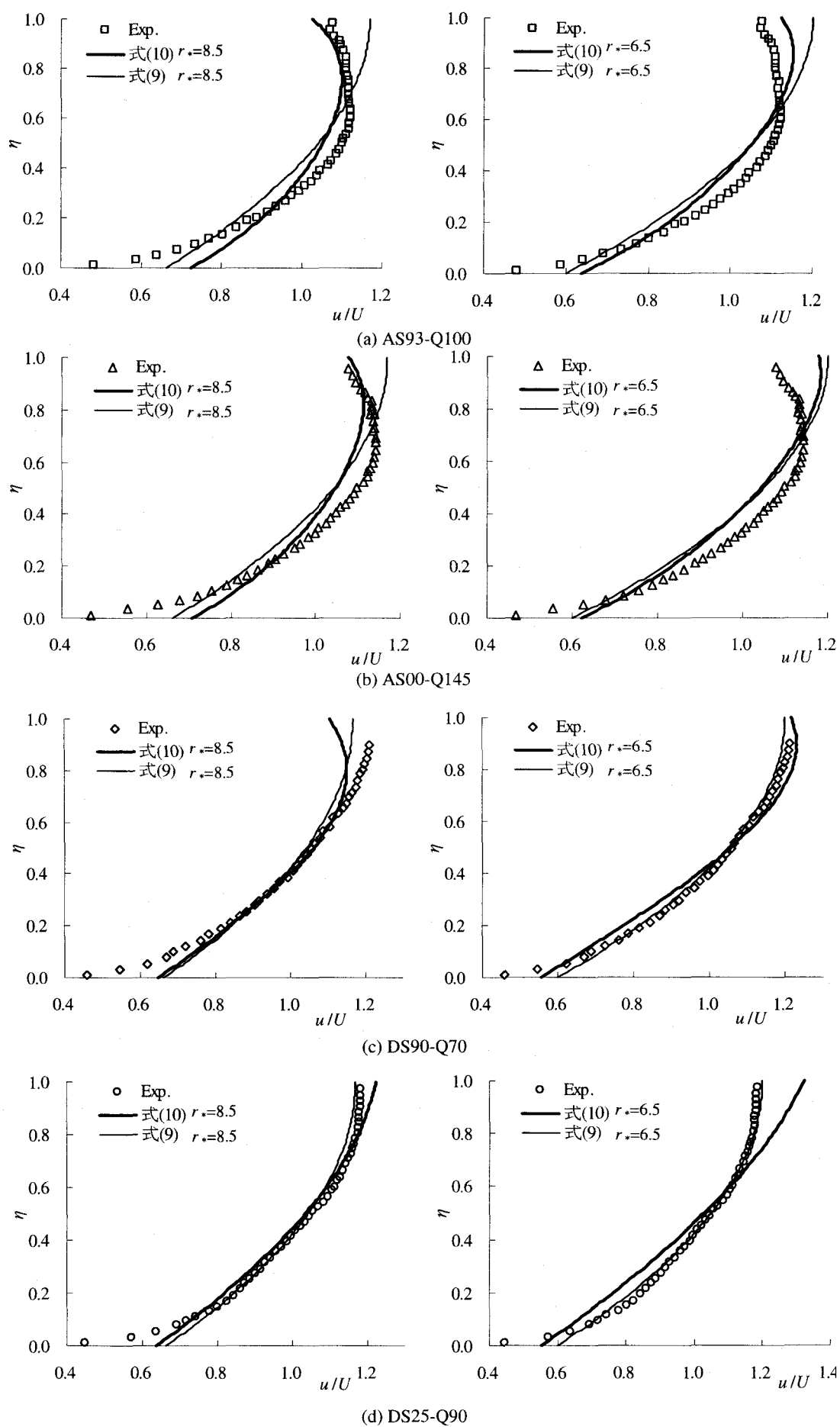


図-3 簡易モデルと実験結果の比較

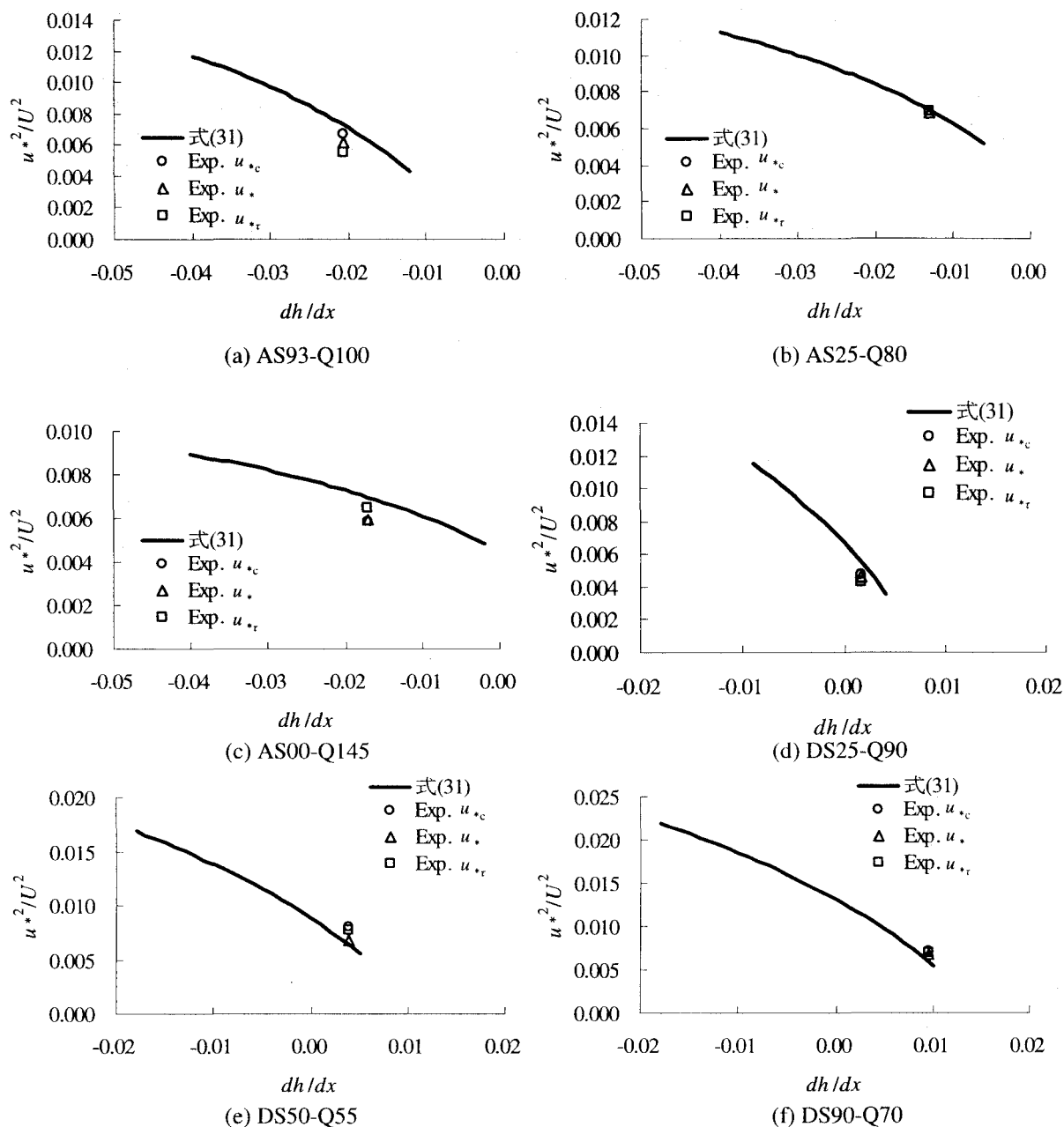


図-4 底面せん断応力と dh/dx の関係

参考文献

- 1) Song, T. and Graf, W.H.: Non-Uniform open-channel flow over a rough bed, *J. of Hydrosoci. and Hydraulic Eng.*, JSCE, vol.12, pp. 1-25, 1994.
- 2) 古川恵太, 市村知也, 関根正人, 吉川秀夫: 水路床勾配が漸変する開水路流れ場の解析, 土木学会論文集, No.417/II-13, pp.63-71, 1990.
- 3) 瀬津家久, 門田章宏, 戸田孝史, 中川博次: 加速流および減速流の解析特性とその乱流特性, 土木学会論文集, No.509/II-30, pp.89-97, 1995.
- 4) 瀬津家久, 鬼束幸樹, 藤田正樹: 開水路加速流の乱流特性に関する実験的研究, 土木学会論文集, No.642/II-50, pp.57-66, 2000.

- 5) Nakagawa H. and Tsujimoto T.: Sand bed instability due to bed load motion, *Proc. ASCE*, Vol.106, HY 12, pp.2029-2051, 1980.
- 6) 細田 尚, 村本嘉雄, 宮本雅章: 水深積分モデルによる波状路床上の流れの底面せん断応力解析, 土木学会論文集, No.558/II-38, pp.81-89, 1997.
- 7) Engelund, F.: Flow and bed topography in channel bends, *Proc. ASCE*, Vol.100, HY 11, pp.1631-1648, 1974.

(2002. 9. 30受付)