

台形断面水路における波状跳水の流況特性

FLOW CHARACTERISTICS OF UNDULAR JUMPS IN TRAPEZOIDAL CHANNELS

後藤 浩¹・安田 陽一²・大津 岩夫³

Hiroshi GOTOH, Youichi YASUDA and Iwao OHTSU

¹ 正会員 工修 日本大学助手 理工学部土木工学科 (〒101 - 8308 東京都千代田区神田駿河台 1-8)

² 正会員 工博 日本大学助教授 理工学部土木工学科 (〒101 - 8308 東京都千代田区神田駿河台 1-8)

³ 正会員 工博 日本大学教授 理工学部土木工学科 (〒101 - 8308 東京都千代田区神田駿河台 1-8)

The flow characteristics of the undular jumps in smooth trapezoidal channels have been investigated systematically. The flow conditions of the undular jump have been divided into four types on the basis of the cross point of the shock waves and the surface profile along the channels. Also, the flow conditions have been characterized by the first wave height, the wave length and the angle of the lateral shock wave. The hydraulic condition required to form each flow condition have been determined by the slope of the side walls, the aspect ratio and the inflow Froude number.

Key Words : undular jump, hydraulic jump, open channel flow, trapezoidal channel, river environment

1. まえがき

一般に, 射流のフルード数が 1 近くで射流から常流に遷移するとき波状跳水が形成される。波状跳水は低段落部の下流側や急勾配から緩勾配に接続する水路などにおいて観察される。

波状跳水の流況・形成条件・波高などの特性を知るとは, 水工構造物の設計や河川を管理する上で必要なことである。また, 波状跳水の形成は, ラフティングなどのウォータースポーツや公園施設などにおける景観設計に利用できると考えられる。

最近, 著者らは長方形断面水平水路における波状跳水を対象に系統的な実験を行い, 波状跳水の流況特性が流入射流のフルード数ばかりではなく跳水始端での乱流境界層の発達状態, アスペクト比およびレイノルズ数によっても変化することを明らかにした^{1,2)}。さらに, 長方形断面水路における波状跳水の流況や形成条件および波高, 波長などの諸特性を明らかにした³⁾⁵⁾。

近年, 親水・景観に配慮して低水護岸や堤防の緩傾斜化がはかられ, 河川・水路の断面形状が台形断面となっている場合が多い。また, 最近では, 生態系保全のために水路の断面形状として台形断面の採用が推奨されている⁶⁾。

水工設計上, 台形断面水路における波状跳水の水利特性を明らかにすることは意義がある。

本研究では, 台形断面水路における波状跳水について跳水始端のフルード数, 水路幅 (アスペクト比), 水路側

壁勾配を広範囲に変化させて系統的な実験を行い, 台形断面水路における波状跳水の流況特性を明らかにした。

台形断面水路において波状跳水が形成される場合, 水路側壁勾配 m とアスペクト比 b/h_1 の組み合わせによって波状水面の形状が長方形断面水路の波状跳水と類似な流況となる場合と台形断面水路特有な流況となる場合とがあることを見出した。さらに, 流入射流のフルード数 F_1 が 1.2 以上の場合, 跳水始端近くから衝撃波¹⁾が観察されるようになり, 衝撃波が一波目山頂部より上流側で交差する場合と交差しない場合とで流況が異なることを見出した。すなわち, 台形断面水路の波状跳水の流況が, 水路中央面の波状水面の形状と衝撃波の交差位置とに着目することによって 4 つに区分できることを示し, 基本物理量である流入射流のフルード数 F_1 , アスペクト比 b/h_1 および水路側壁の勾配 m を用いて各流況の形成範囲を明らかにした。ここに, F_1 は跳水始端のフルード数 $[=v_1/(gD_1)^{1/2}]$, v_1 は跳水始端断面での平均流速, g は重力加速度, D_1 は跳水始端における水利水深 $(=AT)$, A : 流積, T : 水面幅, h_1 は跳水始端水深, b は水路底面幅, m は水路側壁の勾配 $(=\tan \alpha)$ である (図 - 1 参照)。さらに, 4 つに区分された各流況に対応して一波目山頂部の高さ, 波長および衝撃波の形成などの特性を明らかにした。

2. 実験

実験は, 図 - 1 に示される台形断面の水平水路を用いて行った。系統的な実験を行うために広範囲な実験条件を

設定した $[1 < F_1 \leq 3, 1.6 \leq b/h_1 \leq 47, 1.95(\text{cm}) \leq h_1 \leq 12.3(\text{cm}), 10.5(\text{cm}) \leq b \leq 198(\text{cm}), m=0, 1/5, 1/2, 2/3, 1, 3/2, 2]$ 。実験値の解析は、波状跳水の形成に対して粘性の影響が無視でき、フルードの相似則を満足する条件、すなわち、 $Re \geq 6.5 \times 10^4$ のものを対象にした。ここに、 Re はレイノルズ数 $(=v_1 h_1 / \nu)$ であり、 ν は動粘性係数である。なお、この条件を満足する流量規模のもとで、水路底面幅と水路側壁勾配を幅広く変化させた実験の実施は、従来例がないものである。

波状跳水始端は、乱流境界層が十分に発達した領域⁴⁾に跳水始端が位置するように調整した。なお、始端断面は、波状跳水による流線の曲がりの影響を受ける直前の断面として定めた。このことから、跳水始端断面での圧力は静水圧分布している。

3. 波状跳水の流況

水路中央面の水面形状が連続した波状を呈す流況は、 $1 < F_1 \leq F_{1lim}$ で形成され、波状跳水始端のフルード数 F_1 、水路側壁の勾配 m およびアスペクト比 b/h_1 によって種々の流況が観察される。ここに、 F_{1lim} は波状跳水が形成されるフルード数の上限値を示している。

F_1 の値が 1.2 よりも大きくなると、跳水始端付近の両側壁から衝撃波が形成される。 $1.2 < F_1 \leq F_{1lim}$ における波状跳水の流況区分を図-2 に示す。

台形断面水路上で形成される波状跳水は、水路中央面の水面形状および衝撃波の交差位置によって 4 つに区分できる。

水路中央面の波状水面の形状に注目すると、長方形断面水路の場合と類似な波状水面を呈する流況と台形断面水路特有な波状水面を呈する流況の 2 つに区分できる。ここに、長方形断面水路の場合と類似な流況を“Type A”[図-2(i), (ii)], 台形断面水路特有な流況を“Type B”[図-2(iii), (iv)]とする。Type A の場合、図-2(i), (ii) に示すように、一波目から顕著な波状水面が形成され下流側遠方まで続く。Type B の場合、水路中央部の水面形状が断面形状の影響を受け変化する。特に、断面形状の影響が大きくなると、図-2(iii), (iv) に示すように、波状水面の凹凸が小さくなり水面がほぼフラットになるまで山頂の水位が徐々に流下方向へ高くなる。

Type A の場合、衝撃波の交差位置に注目すると、流況はさらに 2 つに区分することができる。衝撃波が一波目山頂部より上流側で交差しない場合、水路中央部の流れに対する衝撃波の交差の影響はほとんど無視できる。この場合、水路側壁付近を除いて流況は二次元的となる。この場合を“Type A-I”とする[図-2(i)]. 一方、一波目山頂部より上流側で衝撃波が交差する場合、水路中央の流れに対する衝撃波の交差の影響が認められる。この場合を“Type A-II”とする[図-2(ii)].

Type B の場合、衝撃波の交差位置に注目すると流況はさらに 2 つに区分することができる。衝撃波が一波目山頂部より上流側で交差しない場合は、波状跳水の流況に

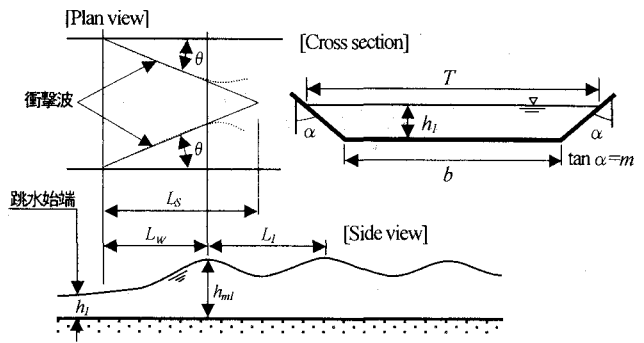


図-1 定義図

対する衝撃波の交差の影響は無視できる。この場合を“Type B-I”とする[図-2(iii)]. 一方、衝撃波が一波目山頂部より上流側で交差する場合は、波状跳水の流況に対する衝撃波の交差の影響が認められる。この場合を“Type B-II”とする[図-2(iv)].

4. 各流況の形成範囲

図-3 は、各流況の形成範囲を示したものである。図中実線は、Type A と Type B の境界を示し、図中破線は Type A および Type B の流況“Ⅰ”と流況“Ⅱ”との境界を示す。

Type A と Type B との境界(実線)は、図に示されるように側壁勾配 m およびアスペクト比 b/h_1 によって定めることができ、式(1)で近似される。

$$\frac{b}{h_1} = -6.4m^2 + 32m \quad [r^2=0.992] \quad (1)$$

ここに、 r は相関係数である。図に示されるように、 m が大きくなるにつれて Type A が形成されるために必要な b/h_1 は大きくなる。これは、側壁勾配 m が大きいほど水路中央部の流れに対する断面形状の影響が大きく、その影響が無視できるようになるためにはアスペクト比が大きくなる必要があるためと考えられる。

Type A および Type B における流況“Ⅰ”と流況“Ⅱ”との境界(破線)については、図に示されるように b/h_1 、 m および F_1 によって定められる。また、この境界は、衝撃波の交差位置が一波目山頂部となる条件($L_s=L_w$ の場合; 図-1 参照)を示し、衝撃波始端から交差位置までを図-1 に示すように直線近似すると、次のような関係式(2)が得られる。

$$\frac{b}{h_1} = 2 \left(\frac{L_w}{h_1} \tan \theta - m \right) \quad (2)$$

さらに、5 章で示す衝撃波の角度 θ および衝撃波始端から一波目山頂部までの相対長さ L_w/h_1 の実験結果[式(7), (8)]を式(2)に代入することによって、流況“Ⅰ”と流況“Ⅱ”との境界を示す条件(破線)を予測することができる。

なお、図-3 に示す境界線(実線および破線)を $T/h_1 = b/h_1 + 2m$ を用いて $T/h_1 = f(m, F_1)$ の関係で表示すると図-3 と類似な結果が得られる。

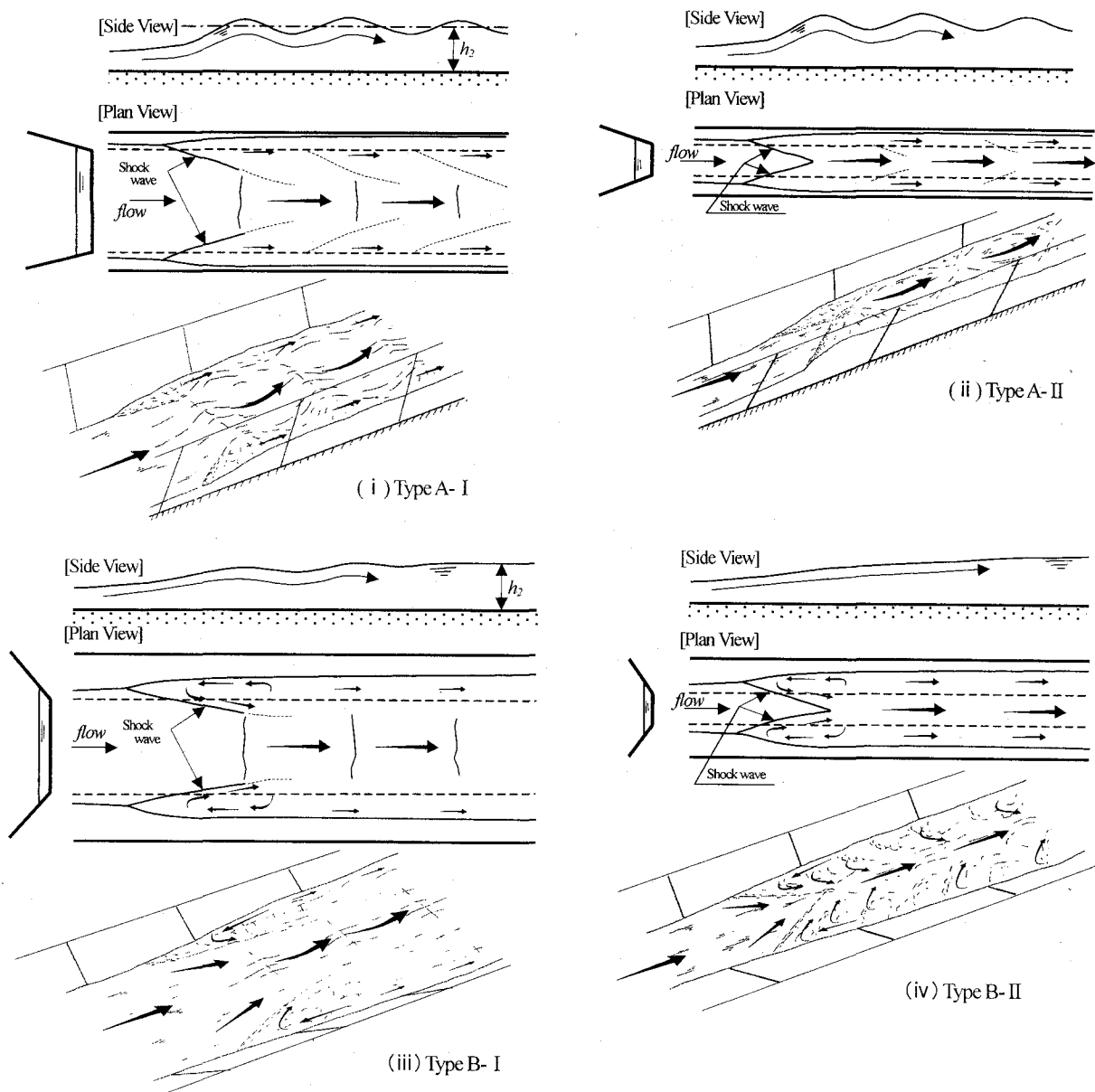


図 - 2 波状跳水の流況区分 [$1.2 < F_1 \leq F_{limit}$]

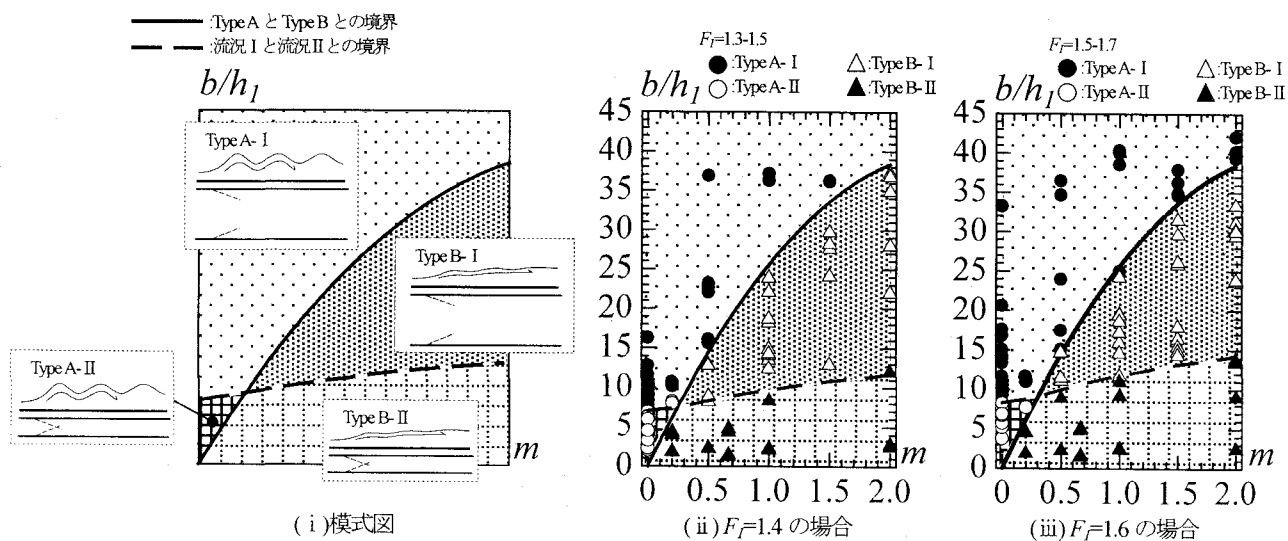


図 - 3 各流況の形成範囲

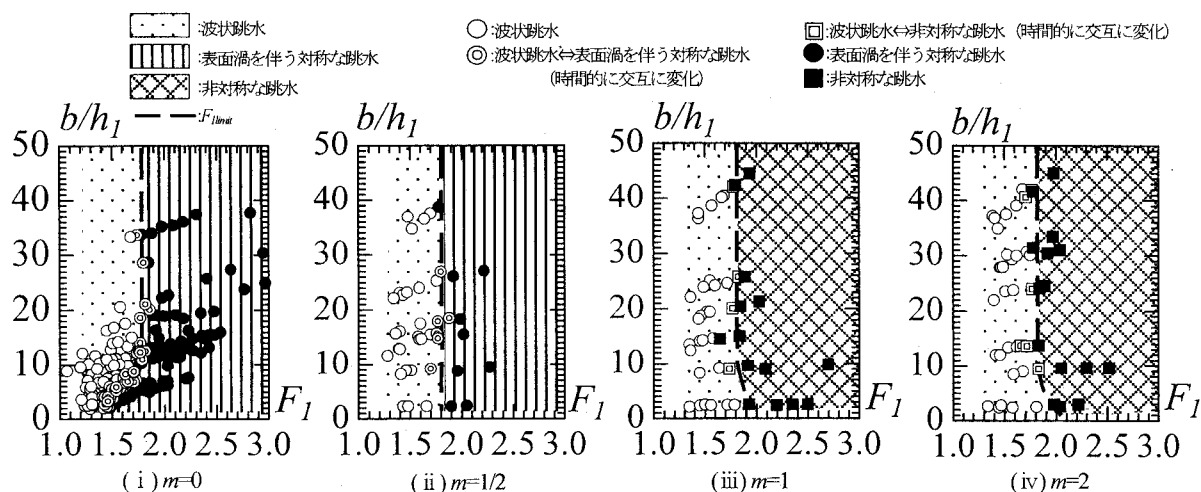


図 - 4 波状跳水の形成範囲

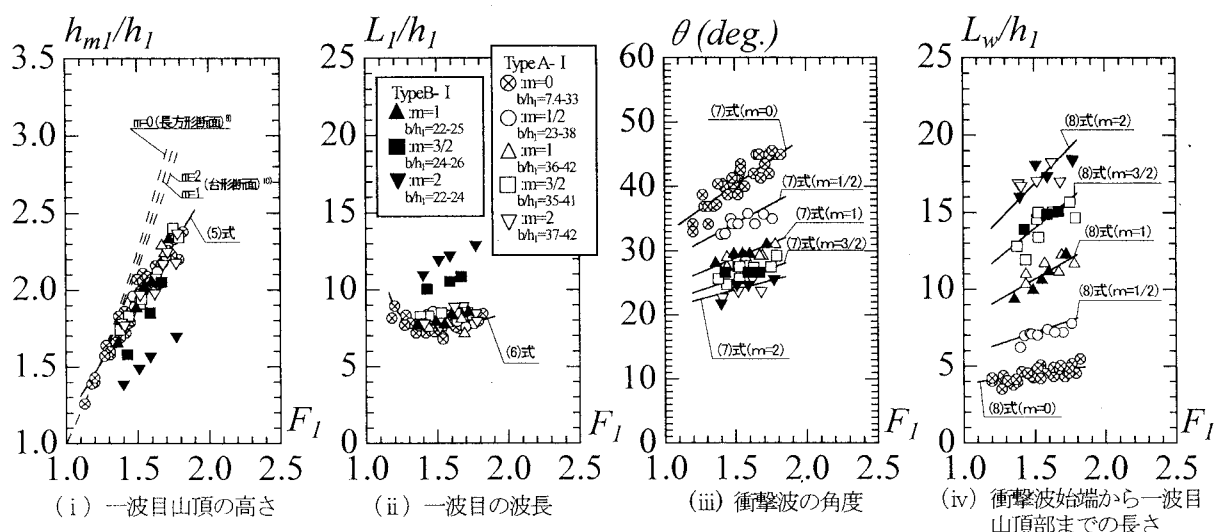


図 - 5 諸特性 (Type A-I と Type B-I の特性を比較)

波状跳水の一波目下流側での平均水深について、実験によると Type A の場合、波状水面を平均した水深が運動量方程式から導かれる共役水深の関係式(3)⁷⁾から求めた値と一致する。Type B の場合、水面がほぼフラットとみなせる断面での水深は、共役水深の関係式(3)⁷⁾から求めた値と一致する。

$$\frac{2}{3}\delta_1^2 X^4 + \left(\frac{5}{3}\delta_1 + \frac{2}{3}\delta_1^2\right)X^3 + \left(1 + \frac{5}{3}\delta_1 + \frac{2}{3}\delta_1^2\right)X^2 + \left\{\left(1 + \frac{2}{3}\delta_1\right) - 2F_1^2 \frac{(1+\delta_1)^2\delta_1}{1+2\delta_1}\right\}X - 2F_1^2 \frac{(1+\delta_1)^3}{1+2\delta_1} = 0 \quad (3)$$

ここに、 $X=h_2/h_1$ 、 $\delta_1=mh_1/b$ である。

図 - 4 は、種々の側壁勾配 m に対する波状跳水の形成範囲を示したものである。図中破線は、波状跳水が形成される流入射流のフルード数の上限値 F_{lim1} を示す。図に示されるようにアスペクト比 b/h_1 が小さくなると F_{lim1} の値が b/h_1 および m の値によって変化する。このとき F_{lim1} の b/h_1 および m による変化が見られる領域では、衝撃波が一波目山頂部より上流側で交差している。衝撃波が一波目山頂部より上流側で交差しない場合、図に示されるように、 m の値に関わらず F_{lim1} の値は、ほぼ 1.8 近くと

なる。

なお、 $F_1 > F_{lim1}$ では、 $m \geq 2/3$ で平面渦を伴う非対称な流況が、 $m \leq 1/2$ で対称な弱跳水が形成される⁷⁾。

5. 波状跳水一波目の水理量の特性

波状跳水の流況は、一波目山頂部の高さ、波長および衝撃波の角度などによって特徴づけられる。一波目山頂部の高さ h_{m1}/h_1 、波長 L_1/h_1 、衝撃波の角度 θ および衝撃波始端から一波目山頂部までの長さ L_w/h_1 (図 - 1 参照) の特性について以下に示す。

図 - 5 は、Type A-I および Type B-I の流況を対象にして式(4)の関係で実験値を整理したものである。

$$\frac{h_{m1}}{h_1}, \frac{L_1}{h_1}, \frac{L_w}{h_1}, \theta = f\left(F_1, m, \frac{b}{h_1}\right) \quad (4)$$

なお、山頂の高さ h_{m1} 、波長 L_1 は水路中央面で測定したものである。

Type A-I の場合、 h_{m1}/h_1 、 L_1/h_1 については、図 - 5(i)、(ii) に示されるように、長方形断面水路の場合の実験式(5)、

(6)³⁾と同様な式で近似される。

$$\frac{h_{mi}}{h_i} = 1.51F_1 - 0.35 \quad [r^2=0.935] \quad (5)$$

$$\frac{L_i}{h_i} = \left(\frac{0.85}{F_1 - 1} + 2.75 \right) \frac{h_2}{h_i} \quad [r^2=0.843] \quad (6)$$

ただし、 $h_2/h_i (=X)$ は、跳水の共役水深比を示し、(3)式から求まる。Type B-I の場合、 h_{mi}/h_i 、 L_i/h_i については、図-5(i)、(ii)に示されるように同一な b/h_i のもとで m が大きくなるにつれて波状跳水の流況に対する水路側壁勾配 m の影響が大きくなるため、長方形断面の場合に比べ h_{mi}/h_i は小さくなり、 L_i/h_i は大きくなる。

衝撃波の角度 θ 、衝撃波始端から一波目山頂部までの相対長さ L_w/h_i については、図-5(iii)、(iv)に示されるように、Type A-I、B-I において F_1 および m によって変化し次式で示される。

$$\theta(\text{deg}) = (1.43m^2 - 7.57m + 15.3)F_1 + 1.04m^2 - 3.19m + 17.3 \quad [r^2=0.968] \quad (7)$$

$$\frac{L_w}{h_i} = (1.3 + 6m^{1.4} - 1.9m^2)F_1 + 2.56 \quad [r^2=0.987] \quad (8)$$

また、与えられた F_1 に対して、 m の値が大きくなるにつれて θ の値は小さくなり、 L_w/h_i の値は大きくなる。

図-6 は、一波目山頂部の水深と波長について、与えられた F_1 と b/h_i に対して長方形断面の場合の大きさと比較したものである。なお、図-6 中の h_{mi}/h_{mir} 、 L_i/L_{ir} は長方形断面水路の場合の山頂部の高さ、波長を示し、 h_{mi}/h_{mir} 、 L_i/L_{ir} は台形断面水路の場合を示す。図-6 に示されるように、Type A の場合、山頂部の高さおよび波長は長方形断面の場合と同一な値 (h_{mi}/h_{mir} 、 $L_i/L_{ir}=1$) を示す。Type B の場合、 h_{mi}/h_{mir} は b/h_i が小さくなるにつれて小さくなる[図-6(i)]。また、 L_i/L_{ir} の値は、 b/h_i が小さくなるにつれ Type B-I が形成される領域では大きくなり、Type B-II が形成される領域では小さくなる[図-6(ii)]。

図-7 は、衝撃波の角度 θ および衝撃波始端から一波目山頂部までの長さ L_w について、流況“Ⅰ”と“Ⅱ”との特性の違いを示したものである。なお、図-7 中の θ_{cal} および L_{wcal} は、式(7)、(8)から求めた値をそれぞれ示す。衝撃波の角度 θ については、流況による違いが認められない[図-7(i)]。また、衝撃波始端から山頂部までの長さ L_w については、衝撃波が一波目山頂部より上流側で交差しない場合（流況“Ⅰ”の場合）、 $L_{wex}/L_{wcal}=1$ となるが、衝撃波が一波目山頂部より上流側で交差する場合（流況“Ⅱ”の場合）、 b/h_i が小さくなるにつれ L_{wex}/L_{wcal} は小さくなる[図-7(ii)]。

以上のように、4 つに区分された各流況に対応して一波目の水理量の特徴づけることができた。

6. Undular surge wave と波状跳水の波状水面との比較

従来、波状跳水の波状水面の特性については、波状跳水を undular surge wave と類似な現象とみなし、長方形断

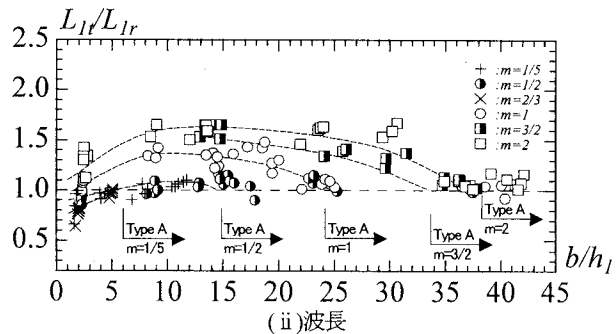
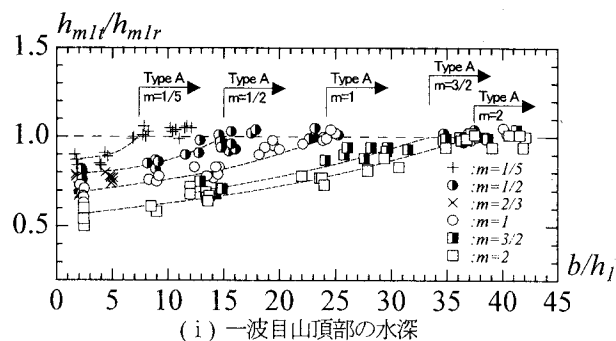


図-6 一波目山頂部の水深・波長の特性

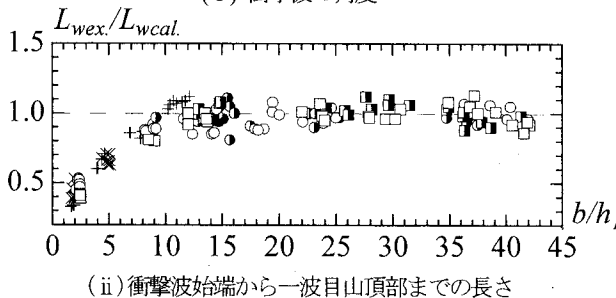
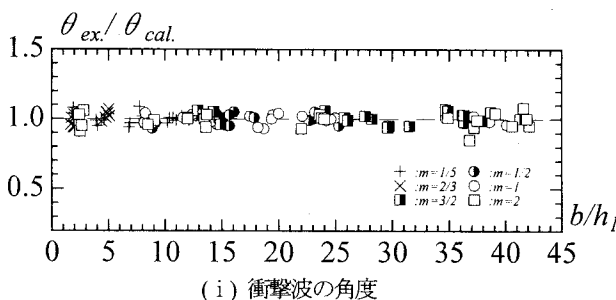


図-7 衝撃波始端から一波目山頂部までの長さ・衝撃波の角度の特性

面水路の場合を対象に研究がされている^{3), 8), 9)}。長方形断面水路の場合、 $F_1 \leq 1.3 \sim 1.4$ で undular surge wave の山頂の高さの一次元的な解析結果⁸⁾とがほぼ同じとなる³⁾。なお、 $F_1 \geq 1.3 \sim 1.4$ では、undular surge wave の理論で用いた仮定と実際の差が大きくなるため一致しなくなる。

ここでは、台形断面水路の場合を対象に同様な比較検討を行った。図-5(i)の破線は、台形断面の形状を考慮した undular surge wave の基礎式(9)¹⁰⁾による波高の計算結果を示す。なお、図中の計算結果は、 $b/h_i=22$ を条件として $m=0, 1, 2$ に対応する h_{mi}/h_i と F_1 との関係を示したものである。また、 $b/h_i=22$ の場合の計算結果と $b/h_i=42$ の場

合の計算結果はほとんど変わらない結果となった。

$$\frac{d^2 h}{dx^2} - \varphi_1(h) \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 - \varphi_2(h) = 0 \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(h) = \frac{1}{h} \left\{ \frac{b^2 + 2mhb + 2m^2 h^2}{(b + mh)(b + 2mh)} \right\} \\ \varphi_2(h) = \left\{ \frac{12g(b + mh)^3}{Q^2(3mh + 4b)(b + 2mh)} \right\} \left\{ M_{x=0} - \frac{h^2}{6}(3b + 2mh) - \frac{Q^2}{gh(b + mh)} \right\} \end{array} \right.$$

ここに、 x は流下方向の座標、 h は $x=x$ での水深、 $M_{x=0}$ は $x=0$ での比力を表す。

図に示されるように、Type A-I の流況が形成される場合、 $F_1 \leq 1.3 \sim 1.4$, $0 \leq m \leq 2$ の範囲で、実験結果は計算結果と同様となる。また、Type A-II、B-I、B-II の実験結果は一次元的な解析結果と異なる。これは、Type A-II では衝撃波、Type B-I では断面形状、Type B-II ではこれら両者の影響によるものと考えられる。

7. 結論

台形断面水平水路において形成される波状跳水の水利特性について広範囲な実験条件のもとで系統的に解明した結果を以下に要約して示す。

①台形断面水路における波状跳水の流況について、衝撃波の交差位置および水路中央面の水面形状に注目することによって流況が明確に区分されることを見出した。

水路中央面の波状水面が長方形断面の場合と類似となる場合を Type A、水路中央面の波状水面が断面形状の影響を受ける場合を Type B として区分した。また、衝撃波が一波目山頂部より上流側で交差する場合と交差しない場合とで流況が異なることから、衝撃波が一波目山頂部より上流側で交差しない場合を流況 I、交差する場合を流況 II として区分した。

これらのことから、流況を Type A-I、A-II、B-I、B-II の 4 つに区分することができた (図 - 2)。

②Type A と Type B との境界が F_1 に関わらず、 b/h_1 および m によって定められることを示し、 $0 \leq m \leq 2$ の範囲で Type A の流況が形成されるために必要なアスペクト比の大きさを示す式(1)を提案した (図 - 3 実線)。

衝撃波の交差点が一波目山頂部に位置するための条件、すなわち、流況 I と流況 II との境界が F_1 , b/h_1 , m によって定められることを示した (図 - 3 破線)。また、跳水始端近くから形成される衝撃波の特性 (衝撃波の角度、衝撃波始端から一波目山頂部までの長さ) を実験的に解明することによってその境界を予測可能にした [式 (2) に実験式 (7), (8) を代入することによって得られる]。

これらのことから、区分した 4 つの流況の形成範囲を明らかにした (図 - 3)。

③波状跳水が形成されるフルード数の上限値 F_{limu} を明らかにした (図 - 4)。

流況 I の場合、Type A、B に関わらず F_{limu} は 1.8 近くになることを示し、流況 II の場合、Type A、B により F_{limu} の変化傾向が異なることを示した。

④各流況に対応した水理量の特性を明らかにするため、一波目山頂部の水深、波長、衝撃波の角度、衝撃波始端から一波目山頂部までの長さの特性を解明した。

一波目山頂部の水深 h_{m1} 、波長 L_1 については、Type A の場合、長方形断面水路の場合 [式 (5), (6)] と同様な傾向を示した [図 - 5 (i), (ii)]。また、Type B の場合、 m および b/h_1 によって変化することを示し、与えられた m および b/h_1 に対応する山頂部の水深、波長を算定可能にした (図 - 6)。

衝撃波始端から一波目山頂部までの長さ L_w/h_1 については、流況 I の場合 (衝撃波が一波目山頂部より上流側で交差しない場合)、 F_1 および m によって変化することを示し式 (8) を提示した [図 - 5 (iv)]。一方、流況 II が形成される場合、衝撃波の交差の影響により b/h_1 によっても変化することを示し、その大きさを算定することを可能にした [図 - 7 (ii)]。

衝撃波の角度 θ については、 F_1 および m によって変化することを示し式 (7) を提示した。

従来、波状跳水と類似とされている Undular surge wave の一波目山頂部の水深と比較した結果、台形断面水路における波状跳水の場合、衝撃波の形成および流れの 3 次元性が無視できる $F_1 \leq 1.3 \sim 1.4$ の Type A-I の場合に同様な結果となることを示した。

謝辞：本研究は、平成 13 年度日本大学学術助成金の補助を受けて実施したものである。記して謝意を表します。

参考文献

- Ohtsu, I., Yasuda, Y. and Gotoh, H., Characteristics of Undular Jumps in Rectangular Channels, *Proc. of the 26th IAHR Congress*, IC14, London, UK, 1995.
- 後藤, 安田, 大津, 波状跳水の形成条件に対するレイノルズ数・アスペクト比の影響について, 水工学論文集, 土木学会, 第 43 巻, pp.299~304, 1999.
- 後藤, 安田, 大津, 波状跳水の流況特性, 水工学論文集, 土木学会, 第 45 巻, pp.439~444, 2001.
- Ohtsu, I., Yasuda, Y. and Gotoh, H., Hydraulic condition for undular-jump formations, *Journal of Hydraulic Research*, IAHR, 39(2), pp.203~209, 2001.
- Ohtsu, I., Yasuda, Y. and Gotoh, H., Reply to Discussion of Hydraulic condition for undular-jump formations by Chanson, H., *Journal of Hydraulic Research*, IAHR, 40(3), pp.382~384, 2002.
- Yasuda, Y., Ohtsu, I., Hamano, T., and Miya, Y., A proposed fishway to facilitate the upstream and downstream migration of freshwater shrimps and crabs, *Proc. of the 29th IAHR Congress*, B3-01, Beijing, China, 2001.
- 大津, 台形および長方形断面水路の自由跳水と潜り跳水, 土木学会論文報告集, 土木学会, 第 246 号, pp.57~72, 1976.
- Iwasa, Y., Undular jump and Its limiting condition for existence, *Proc. of the 5th Japan National Congress for Applied Mech.*, pp.315~319, 1955.
- Jones, L.E., Some observations on the undular jump, *Journal of Hydraulics Division*, ASCE, 90(3), pp.69~82, 1964.
- Sandover, J.A. and Taylor, C., Cnoidal waves and bores, *La Houille Blanche*, No.3, Juillet-Aout, pp.443~456, 1962.

(2002. 9. 30 受付)