

液体と気化気体の気液2相流形成を ともなう管路非定常流の数値解析

NUMERICAL ANALYSIS OF AN UNSTEADY PIPELINE FLOW WITH FORMATION OF
LIQUID AND LIQUID-VAPOR TWO-PHASE FLOW

渡辺雅二¹・河野幸夫²

Masaji WATANABE and Yukio KONO

¹Ph. D. 岡山大学教授 環境理工学部環境数理学科 (〒700-8530 岡山市津島中三丁目1番1号)

²正会員 工博 東北学院大学教授 工学部環境土木工学科 (〒985-8537 多賀城市中央一丁目13番1号)

We illustrate how unsteady pipeline flows can be analyzed numerically. In particular, we propose a new method to capture the interface between a liquid flow and a two-phase flow of liquid-vapor. We show that the wave speed of the two-phase flow is one of the factors in analysis of its temporal rate of change. We also introduce a numerical result, and examine its correspondence with an experimental result.

Key Words: water hammer, two-phase flow, upstream difference approximation, interface

1. はじめに

管路の流れには、わずかな擾乱から大きな圧力が瞬時に発生することがある。この急激な圧力の上昇は水撃と呼ばれ、管路の流れ特有の現象として知られ、20世紀初頭には既に理論的に解明されていた。一方、水撃が発生した直後、その反動で圧力は極端に低下するが、このとき気化圧と呼ばれる 32 hPa 前後の値まで下がると水の流れに水蒸気が発生し、水と水蒸気からなる混合体の気液2相流が形成されることも近年認識されるようになった。このような液体の気化を想定する管路非定常流の数値解析法としては、液体流の運動方程式と連続方程式により、その流速と圧力水頭を計算し、更に、気液2相流の運動方程式と連続方程式により、その流速とボイド率を計算する方法が、主流となっている。特に、液体流の支配方程式系に特性曲線法を適用する方法^{1), 2)}、あるいは上流差分を適用する方法^{3), 4), 5)}等がすでにいくつか提案されている。

液体の流れ及び液体と気化気体からなる混合体の気液2相流はインターフェースと呼ばれる境界で接する。

このような二つの異なる流れを同時に解析するには、インターフェースの位置を的確に把握することが重要となる。一方、インターフェースの位置変化は気液2相流の波速に依存することが示され、また、その波速はボイド率(気化気体の体積率)に左右されることが知られている。本論文では、この波速とボイド率の関係によりインターフェースの位置を数値的に求めるための新しい手法を提案する。また、この方法を適用して行なった解析結果も示し、実験結果と比較する。

第2節では、上流端では水槽に接続され、下流端には弁が取り付けられた管路を用いて行われた実験の結果を提示する。特に、弁の急閉鎖により発生する水撃の反動で圧力が低下し、気液2相流が形成される過程を示す。

第3節では、従来用いられて来た液体流モデルと気液2相流モデル及び、その解析法について言及し、インターフェースに関する新しい数値的手法を示す。特に、液体流と気液2相流のインターフェースで液体流が気液2相流側に進む場合そこで弱い水撃が発生すると想定できるが、そのときの条件の一つとしてボイド率に依存する気液2相流の波速を導入する。第4節では第3節の方法を適用し

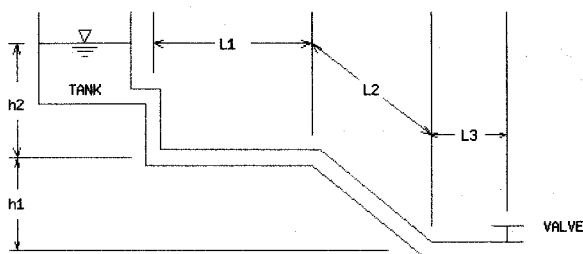


図-1 非定常流実験を行なった管路の模式図

て得られた非定常流の解析結果を示す。更に、実験結果と比較し、解析結果が妥当なものであることを示す。

2. 水撃作用と気化気体の発生

実験に用いた管路の模式図を図-1 に示す。管路は、直径 D (m)、長さ L_1 , L_2 , L_3 (m) の直列に連結された3本の水道用鋼管からなる。管路の一端は水槽に接続され、他の一端には弁が取り付けられている。弁から給水口までの高さを h_1 (m)、給水口から水面までの高さを h_2 (m) で表す ($D = 0.05$ (m), $L_1 = 26.87$ (m), $L_2 = 16.9$ (m), $L_3 = 10.6$ (m), $h_1 = 3.3$ (m), $h_2 = 2.99$ (m)。実験では、先ず弁を開放し、一様な流速 V_0 (m/s) で水を流す。そこで弁を閉じて水撃を発生させ、そのとき弁の上流 0.1 (m) に取り付けられた圧力変換器により圧力を測定する。弁を閉じるのにかかる時間を T (s) とする ($T \approx 0.015$ (s))。

図-2 と 図-3 には、それぞれ一様流の流速 $V_0 = 0.122$ m/s と $V_0 = 0.177$ m/s に対する圧力水頭 H の時間的变化が図示されている。一般に圧力 p (Pa) と圧力水頭 H の関係は次の式で表される。

$$p = p_a + \gamma(H - z) \quad (1)$$

ただし、 p_a は大気圧、 γ は液体の単位重量、 z (m) は基点からの管の高さを表す。水撃が発生するときの圧力水頭の増分 ΔH と流速の増分 ΔV の関係は次の近似式で表される⁷⁾。

$$\Delta H = \frac{a}{g} \Delta V \quad (2)$$

ただし g (m/s²) は重力加速度、 a (m/s) は波速(水撃伝播速度)を表す。弁を閉じた直後発生する高圧(水撃圧)は圧力波となって伝播する。この圧力波が水槽付近まで達したときに管路の復元力が水槽方向に作用し、その結果逆方向の流れが生じる。この流れの発

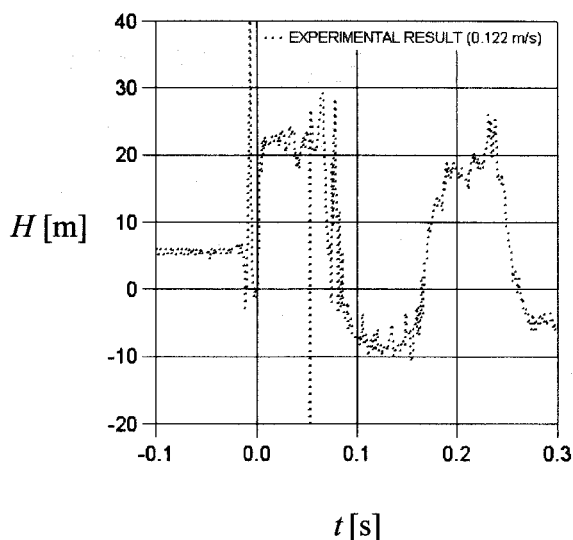


図-2 初期一様流の流速 0.122 (m/s) に対する弁の上流 0.1 (m) での圧力水頭の変化

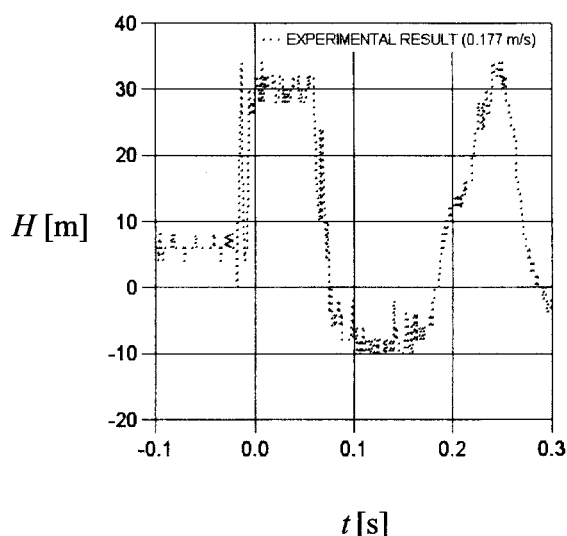


図-3 初期一様流の流速 0.177 (m/s) に対する弁の上流 0.1 (m) での圧力水頭の変化

生は、水槽付近で始まり、弁に向かって進む。この流れの発生伝播にともない圧力も上流端から下流端に向かって徐々に下降し始め、やがて管路全体の圧力が初期の状態近くまで回復する。この時点でも水槽に向かう流れは継続し、そのため弁付近では圧力が低下し始める。水槽付近で発生するこの低圧(水撃負圧)は、水撃圧同様に圧力波となって伝播する。近似式(2)は、水撃圧は一様流の流速に比例することを示している。水撃負圧も同様に一様流の流速にある程度まで比例するが、ある圧力の値(気化圧) p_v があり、いくら流速が大きくなってもその気化圧以下には下がらなくなる。

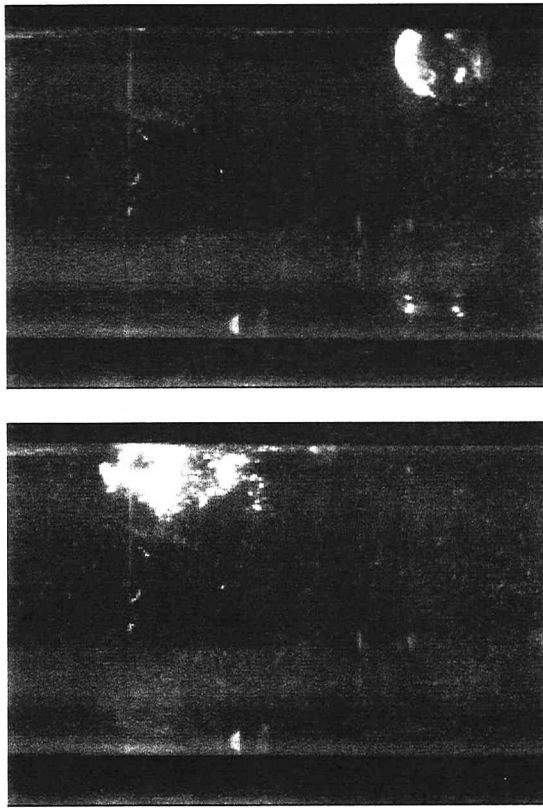


図-4 気化気体の発生状況（下の写真はその 0.06 [s] 後を示す。）

H_v を気化圧に対応する圧力水頭、すなわち

$$p_v = p_a + \gamma H_v \quad (3)$$

を満たす圧力水頭の値であるとする。 H_v に管の高さ z を加えた $H_v + z$ を気化水頭という。図-2 と 図-3 より H_v は 約 -10 m であることがわかる。したがって、 $p_a = 1013 \text{ hPa}$ 、 $\gamma = 9810 \text{ N}$ とすると (3) より気化圧は約 3200 Pa となる。圧力が気化圧まで低下する部分では水の流れに水蒸気が発生し、水撃負圧の伝播にともない液体と気化気体の混合した気液 2 相流が形成される。このような気液 2 相流では、圧力は気化圧で一定となる。図-1 に示した管路と同様な管路の弁付近を一部ガラス管に換え、初期一様流の流速 1.21 (m/s) に対する気化気体の発生を撮影した。図-4 は気化気体が発生し、上流側に気液 2 相流の形成が進んだことを示す。

3. 管路非定常流の数値解析法

本節では、 x (m) を管路に沿って設定された 1 次元座標、 t (s) を時間とする。液体の非定常流の解析には、その流速 V と 圧力水頭 H を未知関数とする次の運動方程式と連続方程式がモデルとなる⁶⁾。

$$V_t + VV_x + gH_x + \frac{fV|V|}{2D} = 0 \quad (4)$$

$$H_t + VH_x - V \sin \theta + \frac{a^2}{g} V_x = 0 \quad (5)$$

ただし、 θ は管の傾斜角、 f は摩擦係数を表す。また、 V_t と V_x 、及び H_t と H_x は、それぞれ V 及び H の t と x に関する偏導関数を表す。偏微分方程式系 (4)、(5) は、一様流の流速と圧力水頭

$$V(x,0) = V_0, H(x,0) = h_1 + h_2 - \frac{fV_0|V_0|}{2gD}x \quad (6)$$

を初期条件、弁からみた水槽の水面の高さと弁での流速をそれぞれ上流端と下流端での境界条件とする。

$$H(0,t) = h_1 + h_2 \quad (7)$$

$$V(L,t) = \begin{cases} V_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t \geq T \end{cases} \quad (8)$$

上流差分による近似解法⁷⁾では、変数変換

$$Y = \frac{aV - gH}{\sqrt{a^2 + g^2}}, \quad Z = \frac{aV + gH}{\sqrt{a^2 + g^2}} \quad (9)$$

により、式 (4)、(5) を次の式 (10)、(11) に変形する。

$$Y_t + \beta^-(V)Y_x = Q^-(V) \quad (\beta^-(V) = V - a) \quad (10)$$

$$Z_t + \beta^+(V)Z_x = Q^+(V) \quad (\beta^+(V) = V + a) \quad (11)$$

$$Q^\pm(V) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + g^2}} \left(-\frac{afV|V|}{2D} \pm gV \sin \theta \right) \quad (12)$$

式 (10)、(11) に差分近似を適用するため区間 $[0, L]$ を N 等分し、更に、正数 Δt を選び

$$\Delta x = \frac{L}{N}, \quad x_i = i\Delta x \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (13)$$

$$t_j = j\Delta t \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (14)$$

とおく。一般に、波速 a は流速 V の絶対値よりも、遥かに大きいので $\beta^-(V)$ は常に負で、 $\beta^+(V)$ は常に正であり、(10) に適する前進差分近似、(11) に適する後退差分近似⁸⁾の適用により次の式が得られる。

$$\frac{Y_{i,j+1} - Y_{i,j}}{\Delta t} + \beta^-(V_{i,j}) \frac{Y_{i+1,j} - Y_{i,j}}{\Delta x} = Q^-(V_{i,j}) \quad (15)$$

$$\frac{Z_{i,j+1} - Z_{i,j}}{\Delta t} + \beta^+(V_{i,j}) \frac{Z_{i,j} - Z_{i-1,j}}{\Delta x} = Q^+(V_{i,j}) \quad (16)$$

系 (4), (5) の解 V と H の $(x, t) = (i\Delta x, j\Delta t)$ における近似値 $V_{i,j}$ と $H_{i,j}$ から, 系 (10), (11) の解 Y と Z の近似値 $Y_{i,j}$ と $Z_{i,j}$ が (9) によって得られる. その結果, $(x, t) = (i\Delta x, (j+1)\Delta t)$ における系 (10), (11) の解の近似値 $Y_{i,j+1}$ と $Z_{i,j+1}$ が差分近似式 (15), (16) によって得られる.

一方, 気液 2 相流の解析では, その流速 W を未知関数とする次の運動方程式¹⁾ が用いられる.

$$W_t + WW_x + g \sin \theta + \frac{fW|W|}{2D} = 0 \quad (17)$$

また, ボイド率 α を未知関数とする次の連続方程式が用いられる^{3), 4), 5)}.

$$\alpha_t + W\alpha_x = (1 - \alpha)W_x \quad (18)$$

式 (17) に対しては次の差分近似式が適する¹⁴⁾.

$$W_{i,j+1} = \frac{W_{i-1,j} + W_{i+1,j}}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\frac{(W_{i+1,j})^2}{2} - \frac{(W_{i-1,j})^2}{2} \right) + \Delta t R(W_{i,j}) \quad (19)$$

$$R(W) = - \left(g \sin \theta + \frac{fW|W|}{2D} \right) \quad (20)$$

また, 特性曲線 $dt = Wdx$ 上では, 式 (18) は

$$\frac{d}{dt} \log(1 - \alpha) = -W_x \quad (21)$$

となり, この式より次の差分近似式が導かれる.

$$\alpha_{i,j+1} = \alpha_{i,j} + (1 - \alpha_{i,j})(1 - \psi_{i,j}) - \sigma \phi_{i,j} W_{i,j+1} \quad (22)$$

$$\kappa_{i,j} = \begin{cases} W_{i+1,j} - W_{i,j}, & W_{i,j} < 0 \\ W_{i,j} - W_{i-1,j}, & W_{i,j} \geq 0 \end{cases} \quad (23)$$

$$\rho_{i,j} = \begin{cases} \alpha_{i+1,j} - \alpha_{i,j}, & W_{i,j} < 0 \\ \alpha_{i,j} - \alpha_{i-1,j}, & W_{i,j} \geq 0 \end{cases} \quad (24)$$

$$\phi_{i,j} = \kappa_{i,j} \rho_{i,j}, \quad \lambda_{i,j} = \frac{\kappa_{i,j} + \kappa_{i,j+1}}{2} \quad (25)$$

$$\psi_{i,j} = \exp(-\sigma \lambda_{i,j}), \quad \sigma = \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (26)$$

偏微分方程式系 (17), (18) の解 W と α の $(x, t) = (i\Delta x, j\Delta t)$ における近似値 $W_{i,j}$ と $\alpha_{i,j}$ が与えられたときに, $(x, t) = (i\Delta x, (j+1)\Delta t)$ における W の近似値 $W_{i,j+1}$ が差分近似式 (19) によって得られ, 更に, α の近似値 $\alpha_{i,j+1}$ が差分近似式 (22) によって得られる.

圧力の低下により液体の流れに気化気体が発生するときは圧力が気化圧より大きい部分と気化圧の部分の境界がインターフェースとなる. このときには, インターフェースでは液体流と気液 2 相流の流速は等しくボイド率は 0 である. 一方, インターフェースで液体流が気液 2 相流に向かい, その流速が気液 2 相流の流速より大きい場合, インターフェースは気液 2 相流側へ進行する. このときに気液 2 相流から液体流への局所的変化が生じる. その場合次のインターフェースでの連続方程式と運動方程式が成立することが示されている¹⁾.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{V^- - W^+}{\alpha^+ + \frac{g}{a^2}(H^- - H_v - z)} \quad (27)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{g(H^- - H_v - z) + (V^-)^2 - (W^+)^2}{V^- - W^+} \quad (28)$$

ただし, インターフェースの上流側は液体であると仮定し V^- と H^- はその流速と圧力水頭を表す. また W^+ と α^+ は下流側の混合体の流速とボイド率を表す. 気液 2 相流側での流速 W^+ とボイド率 α^+ が既知である場合, 式 (27) と (28) の右辺を結ぶ等式は液体流側での未知の流速 V^- と圧力水頭 H^- に関する一つの条件を与える. 一方, 液体流は気液 2 相流によって遮断されるので, 気液 2 相流側では水撃が発生する. また, 圧力の連続性より, 液体流側では圧力水頭は気化水頭 $H_v + z$ から H^- まで増加する. この圧力水頭の増分 $\Delta H = H^- - (H_v + z)$ は液体流と気液 2 相流の速度の増分 $V^- - W^+$ に比例する. そこで (2) より

$$H^- - (H_v + z) = \frac{b}{g}(V^- - W^+) \quad (29)$$

となる. ただし, b は気液 2 相流のインターフェースでの波速を表す. 式 (27) と式 (28) の右辺を結ぶ等式に代入すると次の 2 次方程式が得られる.

$$\varepsilon(V^-)^2 - (1 - p)V^- + q + W^+ = 0 \quad (30)$$

$$\varepsilon = \frac{b}{a^2}, \quad p = \alpha^+ + \varepsilon\beta \quad (31)$$

$$q = (\alpha^+ - \varepsilon W^+) (b + W^+) \quad (32)$$

この場合 ε は 0 に近い正の数であり、そのときにはこの 2 次方程式は実数の解をもち、更にその小さい方の解

$$V^- = \frac{1 - p - \sqrt{(1 - p)^2 - 4\varepsilon(q + W^+)^2}}{2\varepsilon} \quad (32)$$

がインターフェースでの液体流の流速となることが示されている⁹⁾。 V^- が決定されると H^- は式 (29) によって求められ、その結果、式 (27) あるいは式 (28) によってインターフェースの変化速度が求められる。

一般に水と空気の実体の波速 b は空気の体積率に依存し、以下の式で与えられる¹⁰⁾。

$$b = \frac{1}{\sqrt{Q_a(\Lambda_a + S)}} \quad (33)$$

$$S = \frac{Dc_1}{eE} \quad (34)$$

$$Q_a = \frac{\gamma_w - (\gamma_w - \gamma_a)\alpha_a}{g} \quad (35)$$

$$\Lambda_a = \frac{1 + \left(\frac{K_w}{K_a} - 1\right)\alpha_a}{K_w} \quad (36)$$

ただし γ_w と γ_a はそれぞれ水と空気の比重量、 α_a は空気の体積率、 K_w とはそれぞれ水と空気の体積弾性係数 ($K_w = 2.07 \times 10^8$ (kgf/m²), 2.03 (GPa)), e (m) は管の肉厚、 E (kgf/m²) は管の弾性係数を表す。また c_1 は配管の管軸方向の支持方法によって定まる支持係数を表す。管内圧力を P [kgf/m²] とすると γ_a と K_a は $\gamma_a = 1.186P$ (kgf/m³) $K_a = 1.4 \times 10^4 P$ (kgf/m²) で与えられる¹⁰⁾。この式は気体としての空気と液体としての水の熱力学的性質だけに依存するので水と水蒸気の混合体の波速に適用できる。すなわち、 γ_a と K_a をそれぞれ水蒸気の比重量 γ_v と体積弾性係数 K_v で、更に α_a をボイド率 α で置き換えると水と水蒸気からなる混合体の気液 2 相流の波速 b は

$$b = \frac{1}{\sqrt{Q_v(\Lambda_v + S)}} \quad (37)$$

$$Q_v = \frac{\gamma_w - (\gamma_w - \gamma_v)\alpha}{g} \quad (38)$$

$$\Lambda_v = \frac{1 + \left(\frac{K_w}{K_v} - 1\right)\alpha}{K_w} \quad (39)$$

となる。一方、 γ_v と K_v は、空気と水蒸気の比気体定数をそれぞれ R_a と R_v ($R_v = 461$ (m²/(s²K))) とおくと

$$\gamma_v = \frac{R_v}{R_a} \gamma_a, \quad K_v = \frac{R_v}{R_a} K_a \quad (40)$$

で与えられる。一方、乾燥空気と水蒸気が混合した湿潤空気において、水蒸気の分圧が e_v の場合、水蒸気の混合比 w_v は

$$w_v = \frac{e_v \lambda}{p - e_v} \quad (41)$$

で、湿潤空気の比気体定数 R_a は

$$R_a = \frac{1 + \frac{w_v}{\lambda}}{1 + w_v} R_d \quad (42)$$

で与えられる¹¹⁾。ただし、 p は湿潤空気の圧力、 R_d は乾燥空気の比気体定数 ($R_d = 287.09$ [m²/(s²K)]), λ は乾燥空気の平均分子量に対する水蒸気の分子量を表す ($\lambda = 0.622$)。

4. 管路非定常流の数値シミュレーション

第2節で示した実験装置の場合、配管の管軸方向の支持方法によって定まる支持係数 c_1 は、管壁材料のポアソン比を μ とすると $c_1 = 1 - \mu^2$, $\mu = 0.3$, 更に $E = 2.0 \times 10^{10}$ (kgf/m²) (196 (GPa)), $e = 0.003$ (m) で与えられる³⁾。 e_v を温度 15.0 °C での飽和水蒸気圧 $e_{sat} = 1704.4$ (hPa) とすると、前節で示した湿潤空気の比気体定数 R_a は p が大気圧 $p_a = 1013.25$ (hPa) のときは $R_a \approx 288.93$ (hPa), 気化圧 $p_v (\approx 3200$ (hPa)) のときは $R_a \approx 358.76$ (hPa) となる。このときのボイド率 α と波速 b の関係を図-5 に示す。この方法による解析結果を実験結果とともに図-6 に示す。この解析では、第1節で示した実験結果と比較するために、管路は実験管路の長さと同じ全長 $L = 54.37$ m の単一管であると想定した。また、 $T = 0.015$ s, $H_v = -10$ m, $N = 400$, $\Delta t = 0.000001$, 更に、弁から給水口までの高さは $h_1 = 3.3$ m, 給水口から水槽水面までの高さは $h_2 = 2.99$ m とした。摩擦係数 f に関しては、定常流の圧力損失に非定常流の特

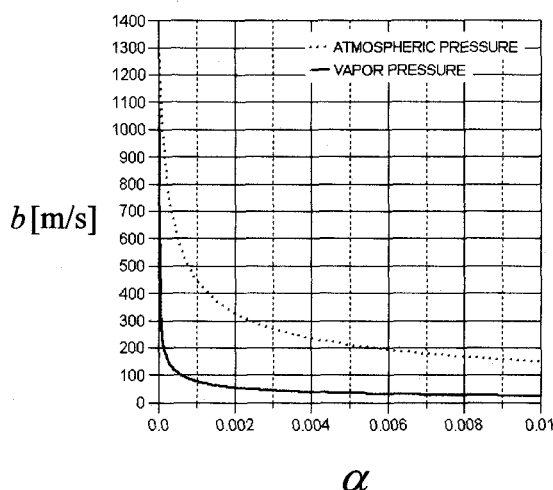


図-5 ボイド率と波速

質を反映させ、 $f_s = 0.02$, $f_d = 13.245$,

$$f = f_s + f_d |H_x - \sin \theta| \quad (43)$$

とした。また $a = 1325.0 \text{ m/s}^{12)}$, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ とした。図-6 には $x = 54.27 \text{ m}$ における圧力水頭の数値解析結果を実験結果とともに示す。数値解析結果は、気液2相流の波速を、ボイド率を考慮に入れない定数の波速 1300 m/s とおいたものと、ボイド率を考慮に入れた波速によるものの二つを示した。

5. おわりに

本論文では、水の流れと水と水蒸気からなる混合体の気液2相流のインターフェースの変化率に関しては気液2相流の波速が一つの要因となることを示し、ボイド率に依存する波速に関する条件を導入した新しい解析法を提案した。第4節で提示した解析結果と実験結果がある程度よく一致することから、その信頼性が確かめられた。一般に気液2相流形成の継続時間は初期一様流の流速とともに増加することが実験的に知られている。一方、気液2相流のボイド率も初期一様流の流速とともに増加することが予想されるのでこの点においてもこの新しい手法の今後の応用が期待できる。

参考文献

- 1) Streeter, V. L.: Transient cavitating pipe flow, *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE* Vol. 109, pp. 1408-1423, 1983.
- 2) Bergant, A. and Simpson, A. R.: Interface model for transient cavitating flow in pipelines, *Unsteady Flow and Fluid Transients*, Bettess R. and Watts, J. eds., Balkema, Rotterdam, pp. 333-342,

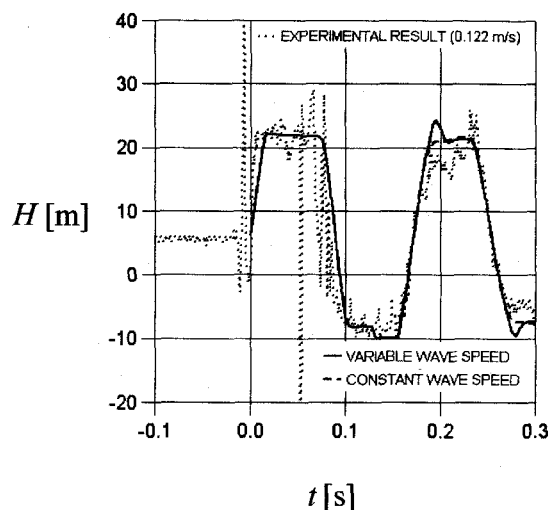


図-6 実験結果と解析結果

1992.

- 3) Kono, Y, Simpson, A., and Watanabe, M.: Vapor mixture two phase flow and analysis in waterhammer by upstream finite difference method, *BHR Group 1996 Pressure Surges and Fluid Transients*, pp. 99-108, 1996.
- 4) Kono, Y, Ito, T., and Watanabe, M.: Phase change and pipe fracture analysis by negative surge pressure, *BHR Group 2000 Pressure Surges*, pp. 363-376, 2000.
- 5) Watanabe, M. and Kono, Y.: Numerical techniques for analysis of unsteady phenomena of pipeline flow, *International Journal of Computational and Numerical Analysis and Applications*, Vol 1, No 1 (2002), pp. 89-103.
- 6) Wylie, E. B. and Streeter, V. L.: *Fluid Transients*, McGraw-Hill, New York, 1978.
- 7) 河野幸夫, 菅野高弘, 渡辺雅二: 水撃圧による管の動的破壊と準静的破壊の実験的比較研究, 土木学会論文集, No. 509/II-30, pp. 55-65, pp. 1995.
- 8) Courant, R., Isaacson, E., and Rees, M., On the solution of nonlinear hyperbolic differential equation by finite differences, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. V, pp. 243-255, 1952.
- 9) Lax, P. D., Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. VII, PP. 159-193, 1954.3)
- 10) 横山重吉: 水撃入門, 日新出版, 1979.
- 11) 安田延壽: 基礎大気科学, 朝倉書店, 1994.
- 12) 河野幸夫: 水撃圧による管破壊と負圧部気液混相流に関する研究, 博士学位論文, 東北学院大学, 1996.

(2002. 9. 30受付)