

整合性を考慮した regular 格子系の DNS と LES の精度検証

INVESTIGATION OF COMPUTATIONAL ACCURACY IN DNS & LES USING REGULAR GRID SYSTEM
CONSIDERING THE CONSISTENCY

林 俊一郎¹・本田 逸郎²・大本 照憲³

Shunichiro HAYASHI, Itsuro HONDA and Terunori OHMOTO

¹正会員 博士(工学) 熊本県土木部 (〒862-8570 熊本市水前寺6-18-1)

²非会員 学術博士 姫路工業大学大学院助教授 工学研究科 (〒671-2201 姫路市書写2167)

³正会員 工学博士 熊本大学大学院助教授 自然科学研究科 (〒860-8555 熊本市黒髪2-39-1)

Direct numerical simulation (DNS) and Large eddy simulation (LES) have become valuable resources in turbulence research. DNS and LES provide valuable information of the flow field, such as the distributions of fluctuating velocity, pressure, and vorticity in the three dimensional space, which are difficult or often impossible to be obtained from experiments. The purpose of this investigation is to examine the effect of the consistency for the convective term in regular grid system. As the test problem, plane channel turbulent flows are considered. The results obtained by the 2nd, 4th and 6th order central difference consistent schemes are compared with those of non-consistent scheme. The results show that consistent schemes are in good agreement with the DNS data bases obtained with the spectral method, and are better than the non-consistent schemes.

key words: Computational Fluid Dynamic, DNS, Regular grid system, Consistent scheme, Plane channel turbulence

1. はじめに

基礎方程式中に思いもかけない解や機構の存在を明らかにしたカオスの衝撃的発見をはじめ, コンピュータの出現は, 理論と実験を駆使して進められた乱流現象の解明に新たなアプローチを提供している¹⁾. 現在最も注目される乱流計算手法は DNS と LES である. DNS は, ナビエ・ストークス方程式を直接解くためパラメータの影響を一切受けず, どのようなレイノルズ数に対しても臨機応変に解析できる極めて有効な手法である. しかし, 乱流の散逸機構まで捉える分解能が必要で, そのために生じる膨大な計算負荷が最大のネックになっている. LES は, 流れ場によらない普遍的スケールの運動に対しモデル化を施し計算負荷量の軽減と分解能の不足を補う巧みな手法である. パラメータが流れ場に依存することが指摘されるが, 格子間隔を小さくすればナビエ・ストークス方程式に収束することから, DNS と同様, 運動方程式とコンシステンツであり, $k-\varepsilon$ 法などの時間平均型乱流モデルにはない特徴を有する. 今後, DNS はメカニズム解明などの基礎的研究, LES は実用規模の応用的研究においてそれぞれ主力になるものと期待される.

著者らはこれまで, 一般座標系 regular 格子による高次精度風上 DNS を構築し^{2)~4)}, 河床波を有する流れ場へ適用^{5)~8)} することにより, 実験結果を良好に再現するとともに, 管状旋回渦の時間発展をはじめ実験では容易に得られない貴重な情報を得ている. しかし, 現在主流になりつつある staggered 格子におけるコンシステント・スキームの DNS に比べ計算負荷量の点では有利であるものの, 精度的には格子点数など解像度の違いはあるが, 必ずしも優れているとは言い難い. この精度の違いには, 解像度以外にも様々な要因が考えられるが, 近年, 保存性を確保することで精度や安定性の向上が図られるとする重要な指摘がなされている^{9)~11)}.

保存性に関しては, 従来, 有限体積法の採用が重要視されたが, たとえこの方法でも勾配型で表されれば保存則は満足しないし, 発散型で表されていれば差分法でも保存則は満足する. ただ, 勾配型の差分法は, 保存性を満足しないため格子依存性が生じるが, 高精度化が容易であり, 逆に発散型では保存則を満たし安定性に優れ格子依存性は見られないが, 高精度化は難しい. しかし, そもそも発散型と勾配型は連続則を介し数学的には等価なはずであることから, 両者の違いは離散化に問題があると考えられる. 梶島⁹⁾や森西¹⁰⁾は, 適切な離散化を

図ることにより、差分でも積の微分すなわち発散型と勾配型が一致することを見出した。この離散化は、微分と差分が整合したという意味でコンシステント・スキームと呼ばれ、中心差分であっても従来は不可避と考えられた風上差分の導入が必ずしも必要ではなく、また十分な格子解像度があれば安定で信頼性の高い数値計算が可能なが示されている⁹⁾。なお、これまでの報告は staggered 格子が中心で、非圧縮性粘性流れを対象に regular 格子へ適用した詳細な報告は見受けられない。

本研究は、壁面せん断乱流の検証問題としてよく知られる平行平板間流れを対象に、regular 格子でのコンシステント・スキームの特性を評価するとともに、同格子に指摘される解の空間的振動 (spurious 誤差)¹²⁾の除去に関する考察を行ったものである。

2. 精度の検証計算

(1) コンシステント・スキームによる対流項近似

対流項の離散スキームとして従来から用いられる勾配型の差分スキームでは、積の微分という解析的に成立しなければならない関係が成立しない。これが発散型と勾配型の特性の違いを生む原因と考えられ、積の微分が成立するような差分近似を行えば勾配型でも発散型が有するエネルギー保存性や安定性が確保できる¹³⁾。

ここでは、上記の考えから提案された、次の2次⁹⁾、4次、6次精度¹⁰⁾のコンシステント・スキームを用いる。

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \overline{u_j}^{x_j} \delta_{x_j} u_i^{x_i} \quad (1)$$

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{9}{8} \overline{u_j}^{x_j} \delta_{1x_j} u_i^{1x_i} - \frac{1}{8} \overline{u_j}^{x_j} \delta_{3x_j} u_i^{3x_i} \quad (2)$$

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{150}{128} \overline{u_j}^{x_j} \delta_{1x_j} u_i^{1x_i} - \frac{25}{128} \overline{u_j}^{x_j} \delta_{3x_j} u_i^{3x_i} + \frac{3}{128} \overline{u_j}^{x_j} \delta_{5x_j} u_i^{5x_i} \quad (3)$$

上式はいかなる精度のコンシステント・スキームも、下記に定義する格子間隔が異なる2次精度の差分と補間の組み合わせで構成されることを示唆している。なお、このことは高次精度スキームが2次精度へ低下することを意味しない。これは各スキームを実際に展開すれば、それぞれの精度を有することからも確認できる。

$$\overline{\phi}^{mx} \Big|_j = (\phi_{j-m/2} + \phi_{j+m/2})/2 \quad (4)$$

$$\delta_{mx} \phi \Big|_j = (-\phi_{j-m/2} + \phi_{j+m/2})/m \Delta x \quad (5)$$

(2) 計算条件

解析対象には、図-1に示す平行平板間流れを採用する。格子は96×97×96 (密格子) と64×65×64 (粗格子)

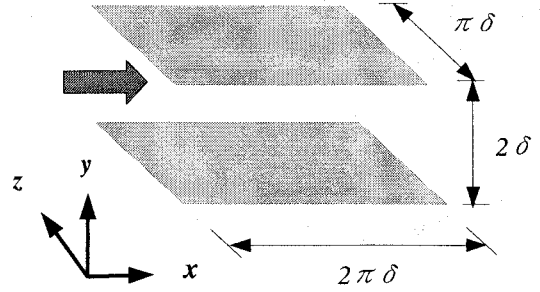


図-1 計算対象

の2種類とし、解析法には regular 格子を用いた DNS と LES とし、両者における違いについても検討する。

なお、LESについては、以下に示す標準型 smagorinsky モデル^{14), 15)}を採用する。

$$\overline{u_{i,i}} = 0 \quad (6)$$

$$\overline{u_{i,i}} + \overline{u_j} (\overline{u_{i,j}}) = -\overline{p_{,i}} + (1/\text{Re} + \nu_t) \overline{u_{i,j}} + 2\overline{S_{ij}} \nu_{t,j} \quad (7)$$

$$\overline{S_{ij}} = (\overline{u_{i,j}} + \overline{u_{j,i}})/2, \quad \nu_t = (C_s f \Delta)^2 (2\overline{S_{ij}} \overline{S_{ij}})^{1/2} \quad (8)$$

$$C_s = 0.1, \quad f = 1 - \exp(y^+/25)$$

境界条件は、いずれも壁面において流速にノンスリップ条件、圧力はノイマン条件とする。レイノルズ数は摩擦速度とチャンネル半幅を用い150とする。

なお、本稿は対流項近似の違いによる影響の考察が目的であることから、他項の差分精度からくる誤差が、これらを覆い隠すことがないように圧力項と粘性項については6次精度の差分近似を行った。その他の計算条件やアルゴリズムについては、表-1のとおりである。

表-1 計算条件

Coupling algorithm	Fractional Step Method	
Time advancement	3rd Adams-Bashforth Method	
Grid system	Regular Grid System	
Spatial scheme	(Convective term)	
	①2nd central consistent scheme ②4th central consistent scheme ③6th central consistent scheme ④5th upwind non-consistent scheme	
Grid numbers	(The others)	
	6th central scheme	
Spatial resolution	Fine grid: 96×97×96	Coarse grid: 64×65×64
	Δx ⁺ =9.8	Δx ⁺ =14.7
	Δy ⁺ =0.1~4.7	Δy ⁺ =0.1~5.8
Reynolds number	Δz ⁺ =4.9	Δz ⁺ =7.4
	Re _τ = u _τ δ / ν = 150	
Time step	Δt = 2/1000 * δ / u _τ	
Total steps	N=100,000	

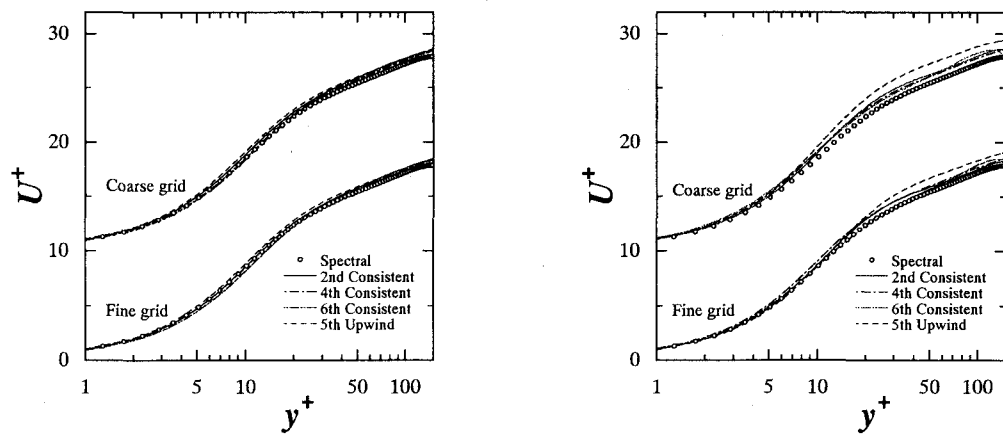


図-2 主流速分布の比較 (左 : DNS, 右 : LES)

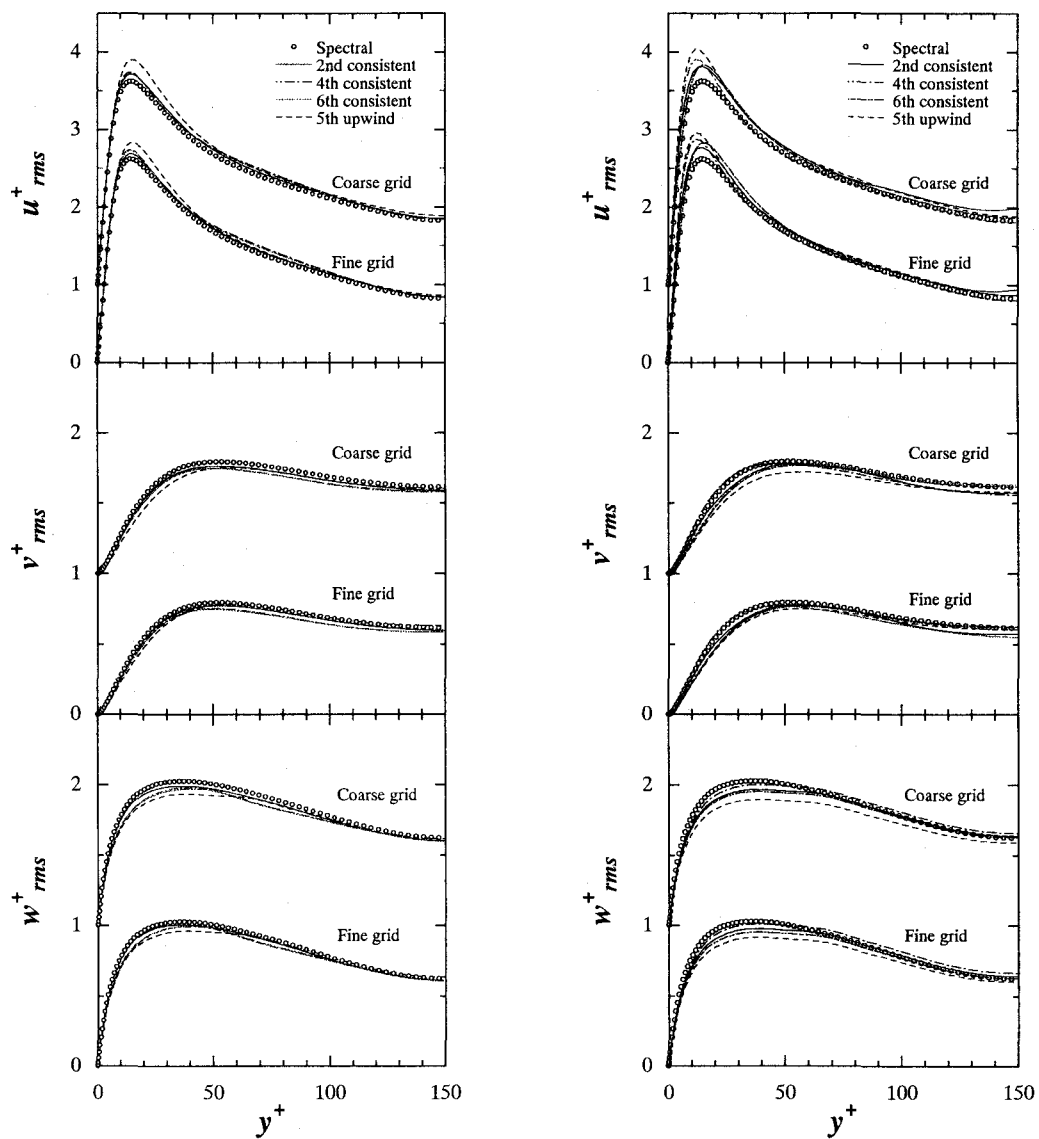


図-3 乱れ強さの比較 (左 : DNS, 右 : LES)

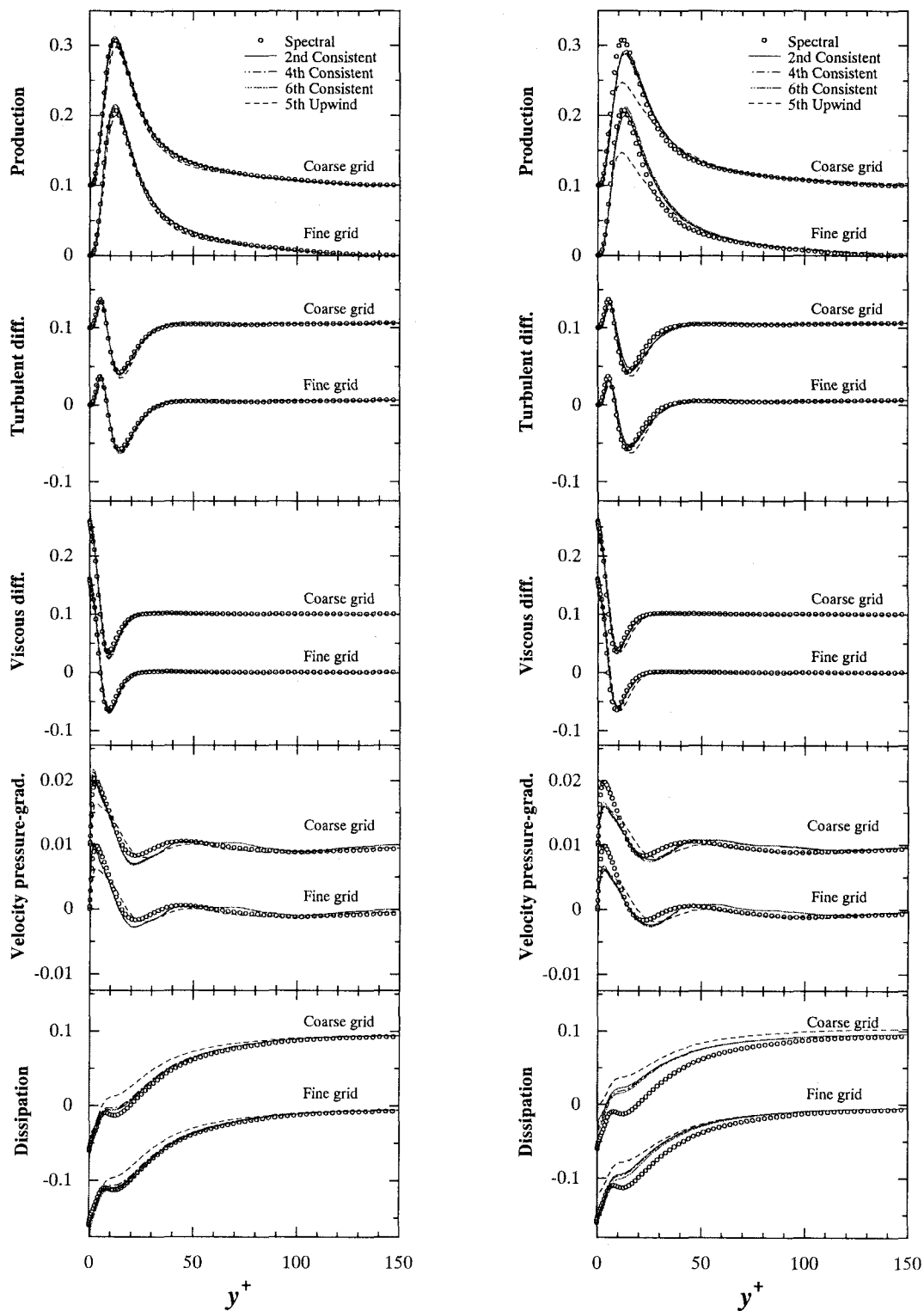


図-4 乱れエネルギー収支式の各項の比較 (左: DNS, 右: LES)

3. 結果と考察

対流項近似に、コンシステント型の2次、4次、6次精度中心差分、非コンシステント型の5次精度風上の4種

類、格子には密格子と粗格子の2種類、解析法にはDNSとLESの2種類、計16種類の計算結果について、スペクトル法¹⁶⁾と比較検証する。

図-3 は、主流速分布を比較したものである。DNS に

においては、粘性底層から対数則領域までスペクトル法とよく一致しており対流項近似法による違いや格子依存性は見受けられない。一方、LESにおいては、コンシステント型中心差分でも僅かながらスペクトル法からのズレが認められる。特に非コンシステント型の5次精度風上ではバッファ層から次第にズレが生じ、対数則領域で主流速を過大に評価するなど、数値粘性の影響が表れていると考えられる。また密格子と粗格子の違いから、格子依存性が確認される。LESにおいて格子依存性が見られるのは、式(8)から推察されるように、渦粘性が格子幅をパラメータとして含むため、格子幅が変われば渦粘性が変化してしまうためと考えられる。また、van Driest型の減衰関数を用いて壁面上で渦粘性を0としているが、減衰モデルそのものの妥当性、モデルの適用領域、さらには流れ場ごとに異なるC値への依存性など、LESを未知の流れ場へ適用する際には、信頼性の点で課題が多い。

図-3は、乱れ強さを成分ごとに比較したものである。DNS、LESいずれにおいても、5次精度風上差分は u_{rms}^+ を過大に、 v_{rms}^+ と w_{rms}^+ を過小に評価する傾向がある。この傾向はより低次の風上差分において顕著に表れるが²⁾、このことは数値粘性の影響が必ずしも一様かつ等方的に作用するのではなく、指向性を有していることを示している。コンシステント型はDNSの場合、精度次数や格子数に関わりなくスペクトル法とよく一致しているが、LESの場合はDNSに比べややズレが大きく、僅かながら格子依存性も認められる。

乱流を理解するうえで重要な情報を与える式(9)に示す乱れエネルギー収支式の各項を計算したものが図-4である。

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\overline{u_i u_i}}{2} \right) = P + T + D + \pi + \varepsilon \quad (9)$$

ここで、 P 、 T 、 D 、 π 、 ε は、それぞれ生成項(production terms)、乱流拡散項(turbulent diffusion terms)、粘性拡散項(viscous diffusion terms)、速度圧力勾配項(velocity pressure-gradient terms)、散逸項(dissipation terms)と呼ばれる。式(9)は、乱流がエネルギーの供給なしには乱れを維持できない散逸系であり、乱れがどこで生成・消滅しているのか、そのメカニズムの究明に重要な手掛かりを与えることから、数値乱流解析法にはその正確な再現能力が求められる。まず、コンシステント型中心差分については精度次数による違いはあまり見受けられない。DNSでは、解像度の違いにかかわらず生成項、乱流拡散項、粘性拡散項はスペクトル法とよく一致している。速度圧力勾配項については、5次精度風上差分のズレが大きく、コンシステント型中心差分においてもスペクトル法との不一致が見られる。しかし、速度圧力勾配項は他項に比べ1オーダー小さな値であることを考慮すれば、

コンシステント型の再現能力はほぼ満足できるものと考ええる。散逸項については、コンシステント型がほぼ一致しているのに対し、5次精度風上差分はズレが大きい。これは数値粘性の持つハイカット・フィルターとしての粘性作用が、散逸項の評価に影響を与えたためと考えられる。一方、LESでは、生成項と散逸項において特に大きな不一致が認められる。なかでも5次精度風上差分の過小評価は顕著なものとなっており、数値粘性による影響の大きさが示唆される。散逸項においては、コンシステント型にも大きな過小評価が認められる。これは、LESの持つ渦粘性が本来の分子粘性に加わり真の粘性を過大に評価したこと、ならびに渦粘性が格子幅をパラメータとして含むことに起因する格子依存性の影響が重なったことから、コンシステント型においても散逸項でスペクトル法から大きくズレたものと考えられる。このため、LESでの精度改善には、十分な格子数の確保が必要と考えられる。

なお、従来の非コンシステント型中心差分スキームでは、たとえ高精度であっても非線形項である対流項から生成される高波数成分に起因するaliasing誤差を除去できず非線形不安定に陥ることがよく知られている¹⁷⁾。しかし、今回コンシステント・スキームとすることにより保存性が確保され、中心差分であってもすべての計算において発散等の不具合は見られず安定な計算が可能であった。

4. 空間的振動解の抑制に関する一考察

計算格子系は、速度・圧力点の配置によりstaggered格子系とregular格子系に分類することができる。このうち、staggered格子系は圧力解の数値的振動を抑えることができることから¹²⁾、これまでMAC系やSIMPLE系を問わずほとんどの流体解析の空間的離散化法として採用されてきた。しかし、多くの補間演算を必要とすることから計算量の増大化は避けられず、特に一般座標系を用いた場合には膨大な計算負荷量となるなど、格子系の選択は乱流計算のコンパクト化と密接な関係にある。一方、regular格子系は圧力解の空間的振動の発生が指摘¹²⁾されているものの、物理量を同一点で定義することから、プログラミングが簡便なうえ、高精度化や複雑境界問題に有効な一般座標系への変換が容易という利点を有している。これらを勘案すると、DNSやLESの汎用化にはコンパクトかつハンドリングのよい格子系の選択も重要な要素となるため、著者らはregular格子の可能性を検討してきた。懸念される解の空間的振動については、不等間隔格子を採用することで除去可能であったが、これは以下の理由によるものと考えられる。

説明の簡単化のために、基礎方程式の1つである圧力ポアソン式の圧力2階微分項 $\nabla^2 p$ のx方向成分だけを、

計算空間へ写像すると式 (10) のようになる。

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \rightarrow \frac{1}{x_\xi^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} - \frac{x_{\xi\xi}}{x_\xi^3} \frac{\partial p}{\partial \xi} \quad (10)$$

上式を例えば、2 次精度の中心差分で離散化すると、次の式 (11) が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x_\xi^2} (p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}) - \frac{x_{\xi\xi}}{x_\xi^3} \left(\frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{x_\xi^2} - \frac{x_{\xi\xi}}{2x_\xi^3} \right) p_{i+1} + \left(\frac{1}{x_\xi^2} + \frac{x_{\xi\xi}}{2x_\xi^3} \right) p_{i-1} - \frac{2}{x_\xi^2} p_i \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、等間隔格子を用いた場合は、メトリック (metric) が $x_{\xi\xi} = 0$ 、 $x_\xi = \Delta x$ となり通常の中心差分と一致する。一方、不等間隔格子を用いた場合には、 $x_{\xi\xi} \neq 0$ となることから、各圧力点に対する重み付けが異なり $p_{i+1} < p_{i-1}$ と評価したことになる。このことは、メトリック $|x_{\xi\xi}|$ が大きくなるほど顕著になり、結果的に片側差分 (one-sided difference) を適用したことに相当する。このため、奇数点と偶数点の情報が交換され、評価点の圧力を両側点の情報に依存することから生じた圧力振動を抑制したものと考えられる。

5. まとめ

本研究では、壁面せん断乱流の検証問題としてよく知られる平行平板間流れを対象に、regular 格子でのコンシステント・スキームの特性を評価するとともに、同格子で懸念される解の空間的振動 (spurious 誤差) の除去に関する考察を行った。

なお、得られた知見は、以下のとおりである。

- 1) 整合性を図ったコンシステント・スキームを regular 格子に適用した結果、中心差分法であっても、従来は不可避と考えられていた風上差分の導入を図ることなく、安定な数値計算が可能であった。
- 2) コンシステント・スキームは 2 次精度であっても、非コンシステント型の 5 次精度風上差分に比べ、計算精度の向上に寄与することが確認された。
- 3) また、DNS においてコンシステント・スキームは、精度次数による計算結果の違いはなく、格子依存性についても認められなかった。
- 4) しかし、LES へ適用する場合は、コンシステント・スキームであっても、LES に固有の渦粘性の影響により、解の劣化や格子依存性が認められることから、十分な格子数の確保が必要と考えられる。
- 5) regular 格子で懸念される空間的振動解の除去に不等間隔格子が有効なのは、結果的に片側差分を適用したことに相当し、評価点の両側の情報に依存するため生じる振動を抑制したためと考えられる。

参考文献

- 1) 宮司久明, 三宅裕, 吉澤徹 編: 乱流の数値流体力学—モデルと計算法, 東京大学出版会, 1998.
- 2) 林俊一郎, 大本照憲, 矢北孝一, 平川隆一: 風上差分スキームを用いた直接数値シミュレーションの基礎的研究, 応用力学論文集, Vol.2, pp.599-608, 1999.
- 3) 林俊一郎, 大本照憲, 矢北孝一, 平川隆一: 一般座標系 Regular 格子による開水路乱流の DNS, 水工学論文集, 第 44 巻, pp.593-598, 2000.
- 4) 林俊一郎, 大本照憲, 矢北孝一, 平川隆一: 一般座標系風上 DNS による開水路乱流の構造解析, 応用力学論文集, Vol.3, pp.763-774, 2000.
- 5) 林俊一郎, 大本照憲: DNS 解析による二次流の発生機構の解明, 水工学論文集, 第 45 巻, pp.559-564, 2001.
- 6) 林俊一郎, 大本照憲, 滝川清: 直接数値シミュレーションによる縦筋河床上の三次元乱流構造の解明, 応用力学論文集, Vol.4, pp.591-600, 2001.
- 7) 林俊一郎, 大本照憲, 滝川清: DNS 解析による砂堆型河床上の組織的渦構造の解明, 水工学論文集, 第 46 巻, pp.385-390, 2002.
- 8) 林俊一郎, 大本照憲: DNS 解析による砂堆型河床を有する開水路乱流の構造解析, 応用力学論文集, Vol.5, pp.743-752, 2002.
- 9) 梶島岳夫: 対流項差分形式とその保存性, 日本機械学会論文集 (B 編), 第 60 巻 574 号, pp.2058-2063, 1994.
- 10) 森西洋平: 非圧縮性粘性流体解析における差分スキームの保存性 (第 1 報, 解析的要求, 離散オペレータの定義, regular 格子系の差分スキーム), 日本機械学会論文集 (B 編), 第 62 巻 604 号, pp.4090-4097, 1996.
- 11) 鈴木哲也, 河村洋: 乱流の直接数値シミュレーションにおける差分式の整合性, 日本機械学会論文集 (B 編), 第 60 巻 578 号, pp.3280-3286, 1994.
- 12) バタンカー, S.V. (水谷幸夫, 香月正司共訳): コンピュータによる熱移動と流れの数値解析, 森北出版, 1985.
- 13) 森西洋平: 非圧縮性粘性流体解析のための完全保存形高次精度差分スキーム, ながれ, 19, pp.164-170, 2000.
- 14) Moin, P. and Kim, J.: Numerical investigation of turbulent channel flow, *J. Fluid Mech.*, 118, pp.341-377, 1982.
- 15) 梶島岳夫: 乱流の数値シミュレーション, 養賢堂, 1999.
- 16) 笠木伸英: 直接数値シミュレーションによる乱流輸送現象のデータベース構築に関する研究, 平成 3 年科学研究費補助金 (総合研究 A) 研究成果報告書, 1992.
- 17) 土木学会構造工学委員会耐風設計研究小委員会: 風工学のための流れの数値シミュレーション法入門, 土木学会, 1992.

(2002. 9. 30 受付)