

3次元定常流れ場に対する コロケート格子を用いた高次精度陰的計算法

IMPLICIT COMPUTATIONAL METHOD (3D C-ISMAL METHOD)
FOR 3D STEADY FLOWS WITH COLLOCATED GRID SYSTEM

牛島 省¹・竹村 雅樹²・瀬津 家久³

Satoru USHIJIMA, Masaki TAKEMURA and Iehisa NEZU

¹ 正会員 工博 京都大学大学院助教授 環境地球工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

² 学生員 京都大学大学院 環境地球工学専攻 修士課程

³ フェロー 工博 京都大学大学院教授 環境地球工学専攻

This paper deals with an implicit numerical algorithm (3D C-ISMAL method) to obtain velocity profiles in the steady three-dimensional flow field. In contrast to the usual implicit methods, the 3D C-ISMAL method, which is based on an implicit SMAL method proposed for the staggered grid system, enables us to utilize higher-order schemes for discretization as well as to largely decrease the necessary computational time. The proposed 3D C-ISMAL method was applied to cavity flows with a fifth-order QSI scheme for convection terms. As a result, it was shown that the computational speed becomes about 13 times faster than a usual explicit method and that the computational accuracy of the QSI scheme is still preserved in the 3D C-ISMAL method.

KeyWords : 3D C-ISMAL method, collocated grid, 3D BFC, QSI scheme

1. はじめに

河川や貯水池, また各種の水理構造物に関連した定常な3次元流況を把握することは, 水工学において重要な課題である. このような3次元流れ場を数値シミュレーションにより予測する際に, 非圧縮性流れに対する解法を利用することが近年一般的になりつつある.

有限差分法に基づく流体計算を行う場合には, 主としてMAC系の解法, あるいはSIMPLE法¹⁾とその改良版を含むSIMPLE系の解法が用いられる. MAC系の解法には, MAC法²⁾を改良したSMAL法³⁾やHSMAL法⁴⁾がある. これらの解法では, 予測段階が陽的な計算となり, 離散化式の導出がSIMPLE系の解法と比較して容易であること, また高次精度のスキームを適用しやすい, などの利点がある. このため, 水工学の分野における流体計算アルゴリズムとしても現在広く利用されている. しかしながら, MAC系の解法では, 予測段階の計算において, CFL条件あるいは拡散数に起因する計算条件の制約があり, これらの条件を満足するよう時間刻み Δt を十分小さく設定することが必要となる. このため, 特に定常な流れ場を対象とする場合には, 定常解が得られるまでに多大な計算時間を要することが多い.

これに対して, SIMPLE系の解法では, 計算を安定に進めるための制限が緩くなるため, 定常解を得るまでの計算時間を短縮化できる場合がある. しかし, この解法では, 高次精度の計算スキームに基づく離散化式の導出が煩雑となる場合が多い. このため, 十分高い精度を有する定常解をSIMPLE系の解法で求めるのは一般に容易ではない.

このような計算時間と計算精度に関する課題を解決するため, 著者らはコロケート格子配置を利用するC-ISMAL法を提案した^{5),6)}. この手法は, MAC系解法の予測段階において流速の予測値の残差成分を陰的に扱う方法であり, 高速計算が可能であると同時に高次精度のスキームを従来のMAC系解法と同様に利用可能である. この手法は, スタガード格子上で提案されたImplicit SMAL法^{7),8)}を, 近年有効性が示されているコロケート格子上の手法へと発展させたものである. 本報では, 既報で提案された2次元計算手法を3次元化し, 一般に格子点数が大規模となる3次元定常流の計算を高速かつ高精度に行えるものとする. 提案された3次元C-ISMAL法を用いて立方体キャビティフローの計算を行い, MAC系解法による計算結果との比較を通じて, 定常解が得られるまでの計算時間や流速分布に関する解析精度を検討する.

2. 数値解析手法

(1) 3次元コロケート格子におけるMAC系解法

3次元 Navier-Stokes 式を一般座標系 ξ_m ($m = 1, 2, 3$) で表示し、これをコロケート格子上で離散化する。物理空間中の格子点位置は、楕円型偏微分方程式による格子形成法⁹⁾に従い、次式から定められる。

$$\frac{\partial^2 \xi_m}{\partial x_j \partial x_j} = P_m(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad (1)$$

ここに、 P_m は、直交座標系 x_i により表される物理空間中において、格子点間隔を制御するために用いられる関数である。後述する計算例では、流速勾配が大きくなる壁面境界層に対して、計算格子点が密に分布するように、 P_m を ξ_m の線形関数として与えている。2次元場の格子生成と同様に、物理空間中の格子点位置は、微分変換公式に基づいて式(1)の独立変数と従属変数を交換した次式から求められる。

$$\frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} + P_m \frac{\partial x_i}{\partial \xi_m} = 0 \quad (2)$$

3次元場においては、図1(a)に示すように、物理空間中では計算セルの中心の格子点で圧力 p と流速成分が定義される。ここに、 u_i は x_i 方向の流速成分である。計算セルの各頂点に相当する格子点と、セル中心の格子点位置を座標生成時に定めるため、図1(b)に示される合計27個の格子点が1つの計算セルに対して用いられる。 $a_{ij} = \partial x_i / \partial \xi_j$ などのテンソル量は、近接する格子点から求めるものとしている。

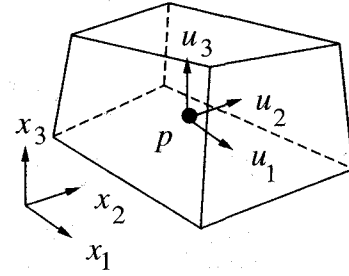
一般座標系を用いると Navier-Stokes 式は次式のよう表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + U_m \frac{\partial u_i}{\partial \xi_m} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \\ & + \nu \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (3)$$

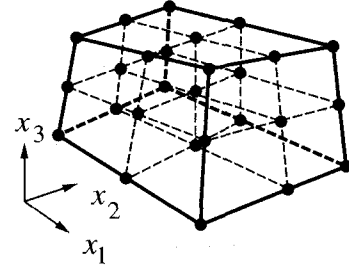
ここに、 U_m は流速の反変成分、 ρ は密度、 ν は動粘性係数である。

コロケート格子配置においてMAC系の解法を利用する場合には、最初にセル中心で流速の予測段階の計算が行われる。次に、圧力計算段階では、圧力振動を回避するため、得られた流速の予測値をセル境界に空間内挿して圧力に関する基礎式を導く。図1(c)は写像空間中の変数の配置を示すが、流速の予測値の空間内挿が行われる「セル境界」の位置は、同図中の流速の反変成分 U_m が定義される位置に相当する。

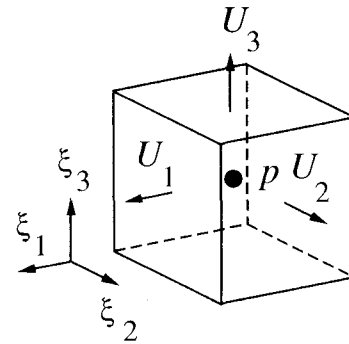
2次元計算においては、セル中心で流速の予測値を求め、これをセル境界に空間内挿する過程において、圧力勾配の評価方法に配慮する必要があることが示さ



(a) 物理空間中の変数配置



(b) 格子点の生成位置



(c) 写像空間中の変数配置

図-1 格子点配置と変数の定義位置

れている^{5),6)}。3次元計算においても同様で、次の手順によりセル境界上の流速を求める。

1) 次式よりセル中心における流速の予測値を求める。

$$\begin{aligned} u_i^* = & u_i^n \\ & + \left[-U_m^n \frac{\partial u_i^n}{\partial \xi_m} + \nu \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial u_i^n}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) \right] \Delta t \end{aligned} \quad (4)$$

2) 次に、 u_i^* をセル境界に空間内挿して $\hat{u}_i$ を求める。 $\hat{u}_i$ の反変成分を $U_{b,m}^*$ とするとき、これに圧力勾配を考慮した次式の $\hat{U}_{b,m}^*$ を最終的な流速の予測値とする。圧力計算には次の $\hat{U}_{b,m}^*$ が用いられる。

$$\hat{U}_{b,m}^* = U_{b,m}^* - \frac{\Delta t}{\rho} g^{mj} \frac{\partial p^n}{\partial \xi_j} \quad (5)$$

ここに、 g^{mj} は基本テンソルの反変成分である。

このように、セル中心における式 (4) では圧力を考慮せず、セル境界における式 (5) の計算で圧力を含めることがこの手法の特徴である。上記の手順は 2 次元計算における CBP スキーム¹⁰⁾ に相当し、上記 1) の段階で圧力勾配を考慮する方法は CCP スキーム¹⁰⁾ となる。CCP スキームでは、非物理的な圧力振動や水面振動が発生することがあるが、CBP スキームを利用することにより、それらは回避される¹⁰⁾。3 次元場でも同様であり、ここでは上記の 3 次元 CBP スキームに基づいて、MAC 系解法の予測段階を陰的に行う 3 次元 C-ISMAC 法について検討を行う。

(2) 3 次元 C-ISMAC 法

スタガード格子で提案された Implicit SMAC 法^{7),8)} は、MAC 系解法の予測段階を陰的に行う手法である。この Implicit SMAC 法をコロケート格子に基づく計算で利用する方法として、2 次元流れ場を対象とした C-ISMAC 法が提案されている^{5),6)}。本報では、これを 3 次元場へ拡張し、3 次元 CBP スキームを用いる場合の予測段階の陰的な解法を示す。

流速の予測値 u_i^* を次のように表す。

$$u_i^* = u_i^n + \tilde{u}_i \quad (6)$$

スタガード格子を用いる場合には、流れ場が定常解に漸近するに従い、式 (6) の $\tilde{u}_i$ は 0 へ近づく。したがって、 $\tilde{u}_i$ は定常解に対する残差成分と考えることができる。一方、コロケート格子配置では、前節で示した CBP スキームを使用する必要があるが、式 (4) では圧力項が含まれないため、定常解においても $\tilde{u}_i$ は 0 とならない。このため、Implicit SMAC 法をそのままコロケート格子上で使用することはできない。この問題を解決するため、 u_i^* を CCP スキームを利用して求め、得られた u_i^* から圧力項を除去した後にセル境界へ空間内挿し、そこで再び圧力項を考慮する方法が 2 次元計算で提案されている^{5),6)}。

3 次元 C-ISMAC 法でもこれと同様の手順を利用する。計算のフローチャートを図 2 に示す。まず、式 (3) の圧力を陽的に扱い、移流項と拡散項に梯形則を用いて時間方向の離散化を行うと、 u_i^* を求めるための次式が得られる。

$$\begin{aligned} u_i^* = & u_i^n - \alpha U_m^n \frac{\partial u_i^*}{\partial \xi_m} \Delta t - (1 - \alpha) U_m^n \frac{\partial u_i^n}{\partial \xi_m} \Delta t \\ & + \beta \nu \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \Delta t \\ & + (1 - \beta) \nu \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial u_i^n}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \Delta t \\ & - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (7)$$

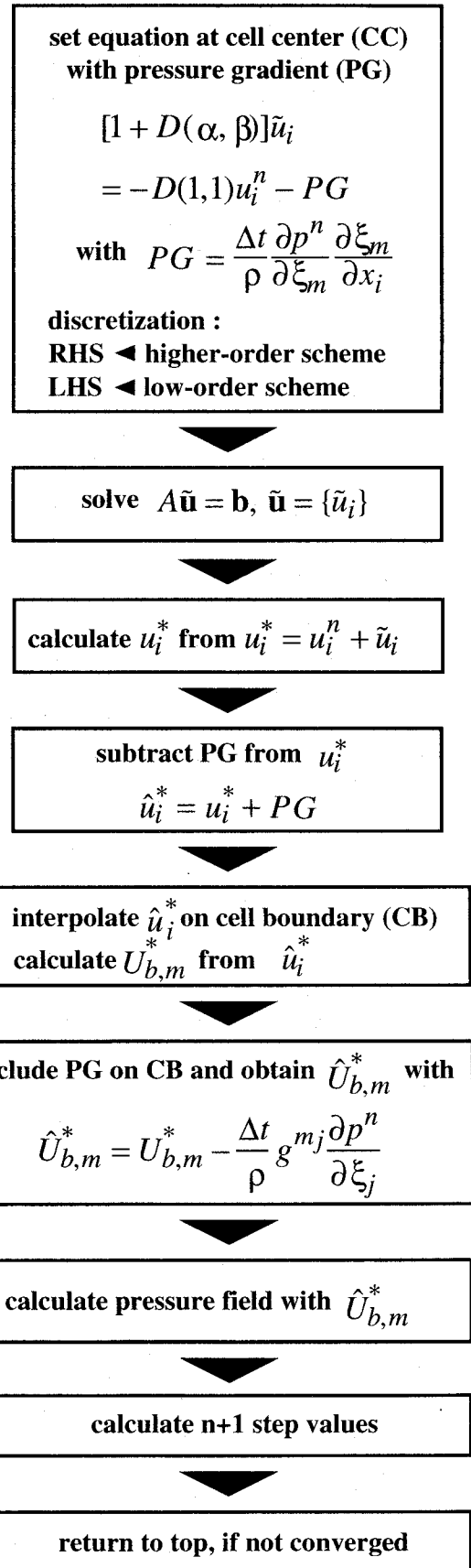


図-2 C-ISMAC 法のフローチャート

ここで、 $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ であり、 α, β が0のときは陽解法、すなわち従来のMAC系解法の予測段階と同様のものとなり、1のときは陰解法となる。3次元C-ISMALC法では、 $\alpha \neq 0$ または $\beta \neq 0$ とする。式(7)に式(6)を用いて整理すると、次式が導かれる。

$$[1 + D(\alpha, \beta)] \tilde{u}_i = -D(1, 1) u_i^n - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \quad (8)$$

ここに、 $D(\alpha, \beta)$ は次式で定義される微分演算子である。

$$D(\alpha, \beta) = \alpha \Delta t U_m^n \frac{\partial}{\partial \xi_m} - \beta \Delta t \nu \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \right) \quad (9)$$

式(8)を空間的に離散化すると、 $\tilde{u}_i$ の連立1次方程式となる。定常解においては、 $\tilde{u}_i$ は0に近い値となり、式(8)左辺の影響は無視できる。このため、式(8)左辺には低次精度の簡単な離散化スキームを用い、右辺に高次精度のスキームを適用することができる。ここでは、右辺の移流項の評価に5次精度相当のQSIスキームを利用し、他の項には中央差分を用いる。すると、式(8)は次のような $\tilde{u}_i$ の連立1次方程式となる。

$$\sum_{p,q,r=-1,0,1} a_{j+p,k+q,l+r} \tilde{u}_{i,j+p,k+q,l+r} = -U_{m,j,k,l}^n C_{im1,j,k,l}^m + DF_{i,j,k,l}^n \quad (10)$$

ここで、 (j, k, l) は3次元場における格子点を示し、 $a_{j+p,k+q,l+r}$ は n ステップの流速と座標変換に関するテンソル量から構成される係数である。QSIスキームを用いる場合には、式(8)右辺の移流項は次のように表される。

$$-U_m^n \frac{\partial u_i^n}{\partial \xi_m} \Big|_{j,k,l} = -U_{m,j,k,l}^n C_{im1,j,k,l}^n \quad (11)$$

式(10)右辺第一項は、式(11)のように評価された移流項に相当する。ここで、 $C_{im1,j,k,l}^n$ は、写像空間中において、格子点 (j, k, l) に対して ξ_m 方向に並ぶ6個の格子点上の u_i^n を5次スプライン関数で表現したときの1次の項の係数である。図3に、3次元場におけるQSIスキームで利用する格子点の分布を示す。また、式(10)右辺の $DF_{i,j,k,l}^n$ は拡散項であり、式(8)左辺と同様に中央差分で離散化されている。

3次元計算においては、式(10)の連立1次方程式は大規模なものとなるため、その求解法として安定化双共役勾配法(Bi-CGSTAB法)を用いる。Bi-CGSTAB法は理論的に有限回の反復回数で解が得られる非定常的な反復法の一つであり、SOR法などの定常反復解法よりも行列解法として有効であるとされている¹¹⁾。

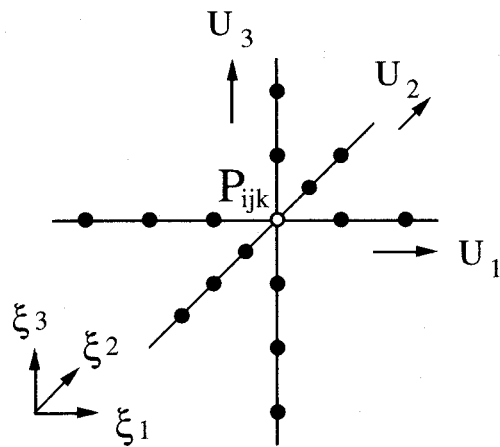


図-3 QSIスキームで利用する3次元写像空間中の格子点($U_m > 0$ の場合の例)

式(10)を解いて得られた $\tilde{u}_i$ を式(6)に用いて、流速の推定値 u_i^* が求められる。次に、以下のように u_i^* から圧力項を取り除く。

$$\hat{u}_i^* = u_i^* + \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \quad (12)$$

式(12)により、 $\hat{u}_i^*$ はCBPスキームで利用されるものと同様の圧力を含まないセル中心の流速の推定値となる。次に、 $\hat{u}_i^*$ をセル境界へ空間内挿した後、式(5)を用いて圧力を考慮した推定値 $\hat{U}_{b,m}^*$ を求める。

式(5)に対して、 $n+1$ ステップで成り立つべき式は次のように与えられる。

$$U_{b,m}^{n+1} = \hat{U}_{b,m}^* - \frac{\Delta t}{\rho} g^{mj} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial \xi_j} \quad (13)$$

ここで、 $U_{b,m}^{n+1}$ に対して次の連続式が成り立つとする²⁾。

$$\frac{\partial (J U_{b,m}^{n+1})}{\partial \xi_m} = 0 \quad (14)$$

ここに、 J は3次元場における変換のヤコビアンである。式(5)と式(13)の差を取り、式(14)に用いると次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(J g^{mj} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_j} \right) = \frac{\rho}{\Delta t} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(J \hat{U}_{b,m}^* \right) \quad (15)$$

ここに、 $\phi = p^{n+1} - p^n$ である。式(15)を離散化すると、 ϕ の連立1次方程式に帰着する。これを再びBi-CGSTAB法で解くことにより p^{n+1} が得られる。この圧力計算においては、流速の発散値を十分小さい値とするため、C-HSMAC法¹²⁾を3次元化した手法を用いている。このようにして得られた p^{n+1} を用いてセル中心の流速 u_i^{n+1} が最終的に求められる。

3. 3次元 C-ISMALC 法の適用性

(1) 計算条件

3次元定常流れ場を対象とする C-ISMALC 法の適用性を確認するため、移動壁を有する3次元立方体キャビティ内の流れの計算を行った。計算対象とする流れのレイノルズ数は400である。計算条件と座標系を図4に示す。図中に示すように、立方体容器上面が x_1 方向へ向かう移動壁となり、 $x_1 - x_3$ 壁面には free slip 条件を適用する。これより、容器内には Ghia¹³⁾ と同様の流速場が生ずる。各変数は、Ghia¹³⁾ の計算と同様に、無次元量として表す。

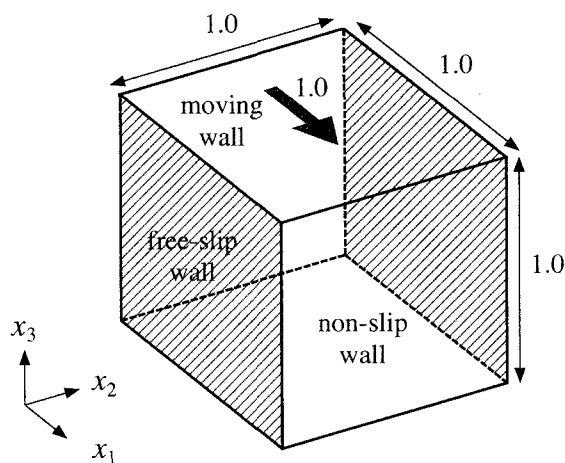


図-4 計算条件と座標系

計算格子点数は $69 \times 69 \times 69$ とし、境界適合座標系を利用して壁面近傍で格子間隔が密になるよう配置した。計算格子点の分布を図5に示す。図1(b)に示したように、1つの計算セルは27個の計算格子点から構成されているため、上記の格子点数では、計算セル数は $36 \times 36 \times 36$ となる。

予測段階を陽的に扱う計算を陽解法とし、計算時間と精度に関する比較を行う。陽解法と3次元 C-ISMALC 法による計算では、この予測段階の解法のみが異なり、他の段階の解法は同一である。定常解は、単位時間あたりの流速の時間変化の絶対値の最大値が $\epsilon_U = 1.0 \times 10^{-4}$ となった時点の計算結果とする。式(10)の計算における収束のしきい値 ϵ_ϕ は 1.0×10^{-10} とし、残差の二乗和をこれ以下とした。また、 $\alpha = \beta = 1.0$ とした。

図5に示した格子点を用いる場合、標準条件では $\Delta t = 2.0 \times 10^{-3}$ でクーラン数が約0.1となり、QSIスキームで安定な計算が進められる条件¹⁴⁾となった。これに対して、3次元 C-ISMALC 法を用いる場合には、 $\Delta t = 8.0 \times 10^{-2}$ 、すなわちクーラン数を約4としても

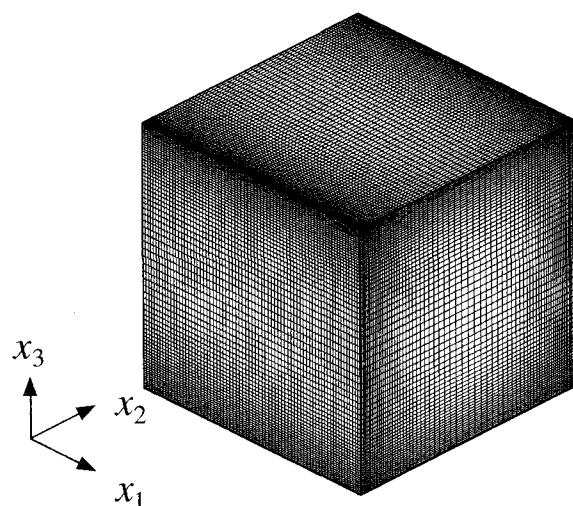


図-5 計算格子点の分布

安定な計算が可能であった。陽解法と3次元 C-ISMALC 法による計算時間を表1に示す。表中の計算時間 T_n は陽解法の値を基準として正規化したものである。その逆数は計算速度の向上比に相当する。また、 C_{nm} と D_{nm} は、それぞれクーラン数と拡散数の最大値を表す。

表1 計算時間、クーラン数および拡散数の比較

計算手法	Δt	T_n	$1/T_n$	C_{nm}	D_{nm}
陽解法	2.0×10^{-3}	1.00	1.00	0.10	0.06
C-ISMALC	1.0×10^{-2}	0.28	3.62	0.49	0.28
C-ISMALC	2.0×10^{-2}	0.15	6.41	0.97	0.57
C-ISMALC	4.0×10^{-2}	0.13	7.72	2.00	1.13
C-ISMALC	8.0×10^{-2}	0.08	13.0	3.98	2.26

C-ISMALC 法では、式(10)の連立1次方程式の計算を行う必要があるため、陽解法と比較して1ステップの計算負荷が大きくなる。しかし、クーラン数および拡散数の制限が緩和されるため、表1に示すように Δt を大きくとることができ、結果的に計算時間を短縮化することが可能となっている。ただし、 Δt を増加させると収束速度が低下するため、2次元計算でも確認されたように、 Δt の増加に比例した計算時間の短縮化は見られない。本報の計算例では、表1に示すように、 $\Delta t = 8.0 \times 10^{-2}$ としたときに、MAC系解法と比較して、計算時間が約13倍高速化した。なお、 $\Delta t = 1.6 \times 10^{-1}$ とした条件では、計算は安定に行えたが、流速分布に関して Ghia¹³⁾ の結果との相違が大きくなり、適切な解が得られなかった。

図6と図7は、立方体キャビティ内の流速分布を比較したものである。図中に示されるように、3次元 C-ISMALC 法による計算で、 $\Delta t = 8.0 \times 10^{-2}$ としても陽解法の結果との差異は十分小さく、Ghiaの結果ともほぼ一致する解が得られている。

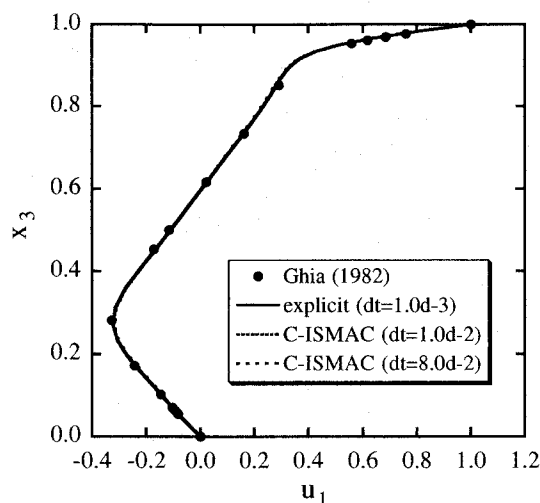


図-6 u_1 の分布

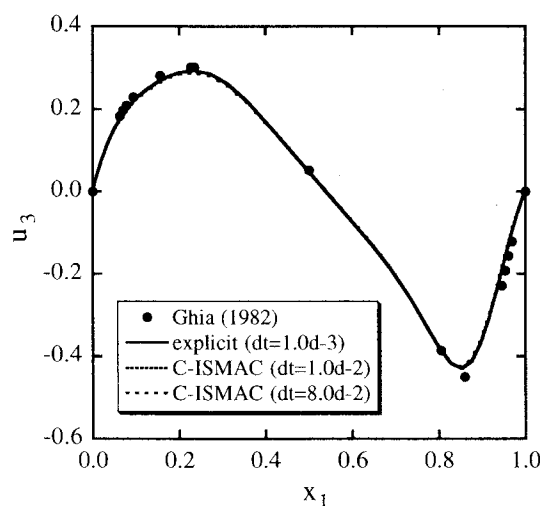


図-7 u_3 の分布

4. おわりに

本研究では、3次元定常流れ場を対象として、コロケート格子上でMAC系解法の予測段階を陰的に行う3次元C-ISMALC法を示した。この手法では、陽解法と同様に移流項と拡散項に高次精度スキームを適用可能であり、本報では移流項に5次精度相当のQSIスキームを利用した。一方、陰的に扱われる流速の残差成分には低次精度のスキームが利用できるため、離散化式の導出が容易である。このため、本手法により、3次元定常流に対して精度の高い流速分布の予測値を得ることができる。同手法を用いて立方体キャビティ内の流れの計算を行った結果、本報の計算条件では、計算が約13倍高速化された。また、このとき得られる流速分布はMAC系解法の結果とよく一致することが示された。

参考文献

- 1) S. V. Patankar (水谷幸夫, 香月 正司共訳). コンピュータによる熱移動と流れの数値解析. 森北出版, 1995.
- 2) F. H. Harlow and J. E. Welch. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Phys. Fluids*, Vol. 8, No. 12, pp. 2182-2189, 1965.
- 3) A. A. Amsden and F. H. Harlow. A simplified MAC technique for incompressible fluid flow calculations. *J. Comp. Phys.*, Vol. 6, pp. 322-325, 1970.
- 4) C. W. Hirt and J. L. Cook. Calculating three-dimensional flows around structures and over rough terrain. *J. Comp. Phys.*, Vol. 10, pp. 324-340, 1972.
- 5) 牛島省, 瀬津家久. 陰的 SMAC 法に基づく自由水面流れの高次精度・高速解法. 海岸工学論文集, Vol. 49, No. (1), pp. 36-40, 2002.
- 6) 牛島省, 竹村雅樹, 瀬津家久. 非圧縮性流体に対するコロケート格子を用いた陰的計算手法に関する考察. 応用力学論文集, Vol. 5, pp. 133-140, 2002.
- 7) T. Ikohagi and B. R. Shin. Finite-difference schemes for steady incompressible Navier-Stokes equations in general curvilinear coordinates. *Computers and Fluids*, Vol. 19, No. 3/4, pp. 479-488, 1991.
- 8) B. R. Shin, T. Ikohagi, and H. Daiguji. An unsteady implicit SMAC scheme for two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations. *JSMI International Journal*, Vol. 36, No. 4, pp. 598-606, 1993.
- 9) J. F. Thompson, F. C. Thames, and C. W. Mastin. Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for field containing any number of arbitrary two-dimensional bodies. *J. Comput. Phys.*, Vol. 15, No. 1, pp. 299-319, 1974.
- 10) 牛島省, 竹村雅樹, 瀬津家久. コロケート格子配置を用いた MAC 系解法の計算スキームに関する考察. 土木学会論文集, No. 719/II-61, pp. 11-19, 2002.
- 11) 藤野清次, 張紹良. 反復法の数理. 朝倉書店, 1996.
- 12) 牛島省, 瀬津家久. 移動一般座標系を用いたコロケート格子による自由水面流れの数値解析手法. 土木学会論文集, No. 698/II-58, pp. 11-19, 2002.
- 13) U. Ghia, K. N. Ghia, and C. T. Shin. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *J. Comput. Phys.*, Vol. 48, pp. 387-411, 1982.
- 14) 牛島省, 瀬津家久, 山上路生, 坂根由季子. 局所5次スプライン内挿法(QSI法)を利用したコロケート格子による流体解析手法. 土木学会論文集, No. 691/II-57, pp. 73-83, 2001.

(2002. 9. 30受付)