

ランダムカスケードモデルと降雨標高依存直線 を用いた降雨空間分布の模擬発生

SPATIAL RAINFALL FIELD SIMULATION BY USING RANDOM CASCADE AND DEPENDENCE LINE ON TOPOGRAPHIC ELEVATIONS

立川康人¹・日和佐真丈²・寶 馨³

Yasuto TACHIKAWA, Masatake HIWASA and Kaoru TAKARA

¹正会員 博(工) 京都大学助教授 防災研究所水災害研究部門 (〒 611-0011 宇治市五ヶ庄)
²学生員 学(工) 京都大学大学院工学研究科土木工学専攻修士課程 (〒 611-0011 宇治市五ヶ庄)
³フェロー会員 工博 京都大学教授 防災研究所水災害研究部門 (〒 611-0011 宇治市五ヶ庄)

As a rainfall field generation model, a random cascade is applied at the Miyama Radar observation area (192×192km) and the model parameters are identified by using radar rainfall data. To include the heterogeneity of rainfall fields into a random cascade, the dependence line on topographic elevations (DLTE) developed by Nakakita *et al.* (2001) is introduced, and the topographic effects of spatial rainfall fields are well simulated by using the random cascade generator.

Key Words : random cascade, dependence line on topographic elevations (DLTE), design rainfall

1. はじめに

計画降雨の空間分布は、検討対象降雨を選定しその実際の空間分布を計画降水量まで引伸ばすことで通常導入されている。しかし、実際には様々な降雨の空間分布パターンが考えられ、その空間分布によって河川流量は様々な値を取ると考えられる。したがって、実際に発生する可能性のある様々な空間分布パターンを発生させる降雨モデルを用意し、分布型流出モデルと組み合わせて河川計画を考えていく必要がある。そこで本研究では降雨の時空間分布を確率的に発生させるモデルを構築することを目的とし、そのモデルとしてランダムカスケードモデルの導入を試みた。

降雨の時空間分布を確率的に発生させるモデルは、これまでにも Bras *et al.*¹⁾のモデルや point process 理論を基にした Waymire *et al.*²⁾の WGR モデルがある。また、それぞれの降雨場発生モデルと分布型流出モデルとを組み合わせる降雨分布が流出量に及ぼす影響を評価する研究が Wilson *et al.*³⁾、Krajewski *et al.*⁴⁾によってなされている。ここで問題となるのは、これらの降雨場発生モデルのモデルパラメータ値を実際のデータから定めることが非常に難しいという点である。たとえば WGR モデルは降雨セルの発生率など 20 個のモデルパラメータを持つが、これらの値を観測降雨データから推定することは、降雨の偏在性の少ない海洋での例⁵⁾を除いて見あたらない。また、こうしたモデルに

どのように標高の高いところほど降水量が多いなどといった降雨の偏在性を導入するかは大きな問題である。

一方で、降雨の空間分布に自己相似性が成立つことを前提としたランダムカスケードモデルが、降雨分布の発生モデルとして用いられるようになってきた。ランダムカスケードモデルとは、ある物理量の空間分布に自己相似性があると仮定し、ある領域を代表する物理量が与えられたときに、その分布特性に従ってその物理量を disaggregate するモデルである。たとえば、GCM によるグリッドスケールの平均降水量が与えられた場合、それを流域管理に必要とされる分解能にまで降水量を disaggregate することが期待されている。このモデルはパラメータの個数が非常に少なく、かつ降雨観測データからモデルパラメータの値を比較的容易に求めることができるという利点を持つ。ただし、通常のランダムカスケードモデルによって発生される降雨場には降雨分布の系統的な偏りは考慮されない。いかに偏在性、不均一性を導入するかが課題となる。

この課題に対して、Jothityangkoon *et al.*⁶⁾は降雨の地域分布を考慮した重みをカスケードジェネレータ導入することを試みている。また Assela *et al.*⁷⁾は、長期的な積算降雨データを用いて降雨データに含まれる空間的不均一性を取り除き、そのデータに対してランダムカスケードを適用してその後再度不均一性を導入するという巧みな手法を提案している。どちらの手法もランダムカスケードモデルとして Over and Gupta⁸⁾に

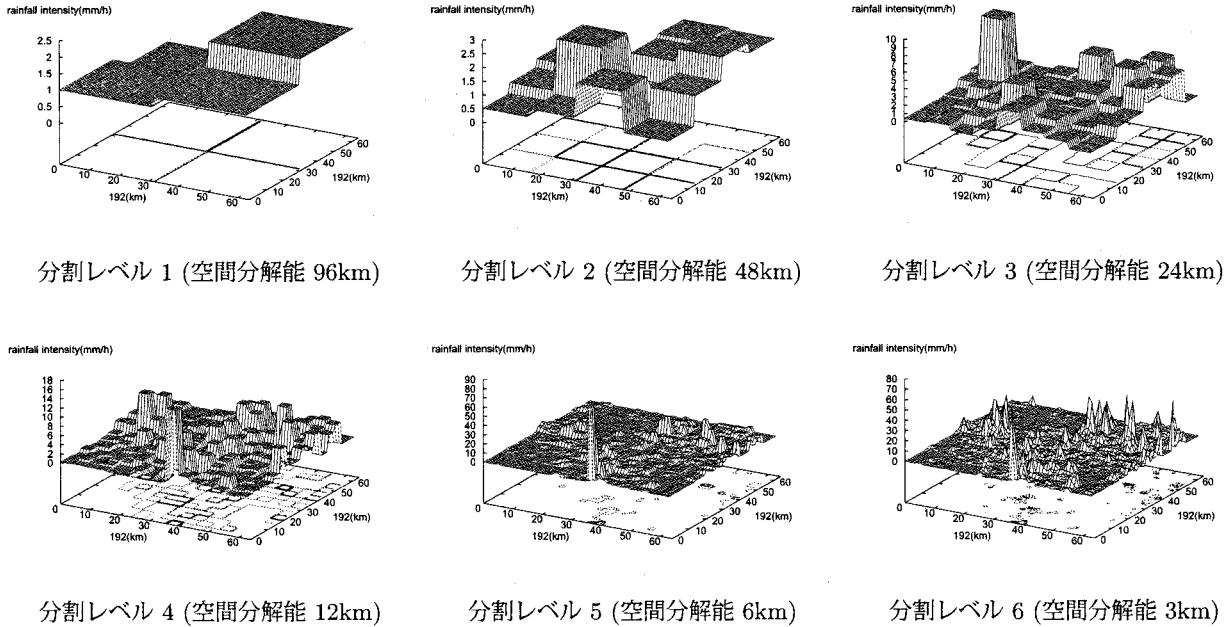


図-1 β -lognormal モデルによる降雨の発生例

よる β -lognormal モデルを採用し、それに降雨の地域性を導入することを試みている。

本研究では、国土交通省の深山レーダー雨量データをもとにこのカスケードジェネレータのモデルパラメータ値を同定し、同観測域において Nakakita *et al.*⁹⁾、鈴木ら¹⁰⁾によって見出された降雨標高依存直線を用いて、降雨空間分布の地形依存性をカスケードジェネレータに組み込むことを試みた。次に、このカスケードジェネレータを用いて降雨の空間場を発生させ、その特性を調査した。

2. ランダムカスケードモデル

ランダムカスケードモデルは初期領域 (レベル 0) に物理量を割り当て、分割レベル毎に各領域の物理量を順次、分割してできるサブ領域 (ここでは 4 つ) に割り当てていくモデルである。分割レベル n におけるサブ領域 i のボリューム (ここではこのサブ領域に含まれる降水量) を μ_n^i ($i=1, 2, \dots, b^n$) とすると

$$\mu_n^i = R_0 L_0^d b^{-n} \prod_{j=1}^n W_j^i \quad (1)$$

となる。ただし、 R_0 は初期領域の平均降雨強度 (mm/h)、 L_0 は領域の一辺の長さ、 d は次元を表す定数であり $d=2$ 、 b は branching number と呼ばれる分割数を決める定数であり $b=4$ である。 W はカスケードジェネレータと呼ばれる各領域に降水量を割り当てる重みであり、ある確率特性に従って発生させられる。

このカスケードジェネレータとして β -lognormal モ

デル⁸⁾ によるジェネレータ W を用いる。 W は互いに独立な確率変数 B と Y の積

$$W = BY \quad (2)$$

で表され

$$B = \begin{cases} 0 & \text{with probability } 1 - b^{-\beta} \\ b^\beta & \text{with probability } b^{-\beta} \end{cases} \quad (3)$$

$$Y = b^{-\frac{\sigma^2 \ln b}{2} + \sigma X} \quad (4)$$

である。ここで、 X は標準正規乱数であり、 β と σ^2 の 2 つパラメータによってこのカスケードジェネレータは決定づけられる。 B と Y の期待値と分散はそれぞれ

$$E[B] = 1, \quad \text{Var}[B] = b^\beta - 1 \quad (5)$$

$$E[Y] = 1, \quad \text{Var}[Y] = e^{(\sigma \ln b)^2} - 1 \quad (6)$$

となることが容易に証明でき、 $E[W]=1$ となることがわかる。確率変数 B はその領域に降雨が存在するかないかを表現し、 Y はある分割レベルの領域に含まれる降水量を、サブ領域に分割するときの重みを表現している。このモデルを用いて、初期領域 (レベル 0) にある領域平均降雨強度を与えた場合の降雨の発生例 (分割レベル 1~6) を 図-1 に示す。

3. β -lognormal モデルのパラメータ同定

深山レーダー雨量計のデータを用いて β -lognormal モデルのパラメータを同定する。深山レーダー雨量計の定量観測領域の半径は 120km、時間分解能は 5 分間隔であり、仰角固定観測によるレーダー雨量観測デー

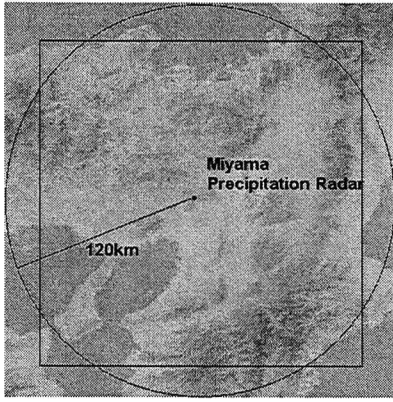


図-2 深山レーダー雨量計の観測領域と本研究の対象領域

タを用いる。対象領域は、240km × 240km (空間分解能 3km, 80 × 80 メッシュ) のうち、図-2 に示す矩形部分の 192km × 192km (64 × 64 メッシュ) の領域に着目してパラメータ同定を行った。利用したデータの期間は 1989 年 8 月から 9 月の間の 1000 回分の観測データである。

同定すべきモデルパラメータは (3)(4) 式にある β 、 σ^2 の 2 つであり、Jothityangkoon *et al.*⁶⁾ と同様の方法を用いて同定する。まず、分割レベル n の降水量 μ_n^i ($i=1, 2, \dots, b^n$; i はサブ領域を表す添え字) に対して、 q 次のモーメント $M(\lambda_n, q)$ を

$$M(\lambda_n, q) = \sum_i^{b^n} (\mu_n^i)^q \quad (7)$$

として求める。 λ_n はスケール比と呼ばれるもので、 $\lambda_n = b^{n/d} = 2^n$ である。降雨場が自己相似であることを仮定すると

$$M(\lambda_n, q) = [\lambda_n]^{\tau(q)} \quad (8)$$

となることが期待される。ここで $\tau(q)$ は $M(\lambda_n, q)$ の傾きに関する関数であり、両辺の対数をとることで

$$\ln M(\lambda_n, q) = \tau(q) \ln \lambda_n \quad (9)$$

となる。 $q = 0.0, 0.5, \dots, 4.0$ の 9 通り、また $\lambda_n = 2^0, 2^1, \dots, 2^6$ の 7 通り合計 63 通りの組み合わせに対してレーダーデータを用いて $M(\lambda_n, q)$ を求め、 λ_n との関係プロットした図を図-3 に示す。図中には各 q に対して最小二乗法を用いて定めた回帰直線も合わせて示している。この傾きが式 (9) の $\tau(q)$ である。次に、 q と $\tau(q)$ との関係を定める。図-3 に示すように、9 通りの q に対して、それぞれの傾き $\tau(q)$ の値が求まるので、ここではこれらのサンプル点をもとに 3 次スプライン関数を構成して、 q と $\tau(q)$ との関係を定めることにする。このようにして得られた q と $\tau(q)$ との関係を図-4 に示す。1 回の面的なレーダーデータにより 1 つの関係式が定まる。この図では 10 回のレーダー

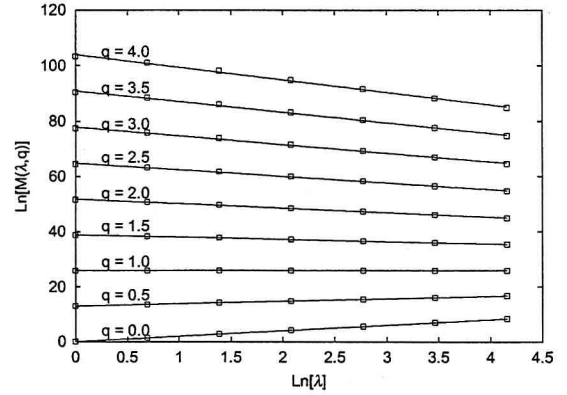


図-3 q 次モーメントのスケール特性

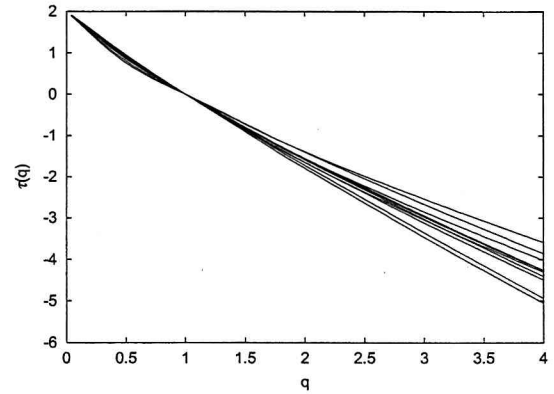


図-4 q と $\tau(q)$ との関係を示すスプライン関数

雨量データのそれぞれに対する関係式を示している。

一方でランダムカスケードモデルでは Mandelbrot - Kahane - Peyriere (MKP) 関数と呼ばれる関数 $\chi(q)$ が理論的に定義され、 $\chi(q) = \tau(q)/d$ として $\chi(q)$ と $\tau(q)$ が結び付けられる。Over and Gupta⁸⁾ は β -lognormal モデルに対する $\chi(q)$ を理論的に次のように導いている。

$$\chi(q) = (\beta - 1)(q - 1) + \frac{\sigma^2 \ln b}{2}(q^2 - q) \quad (10)$$

これから $\tau(q)$ の一階導関数 $\tau^{(1)}(q)$ と二階導関数 $\tau^{(2)}(q)$ は

$$\tau^{(1)}(q) = d\{\beta - 1 + \frac{\sigma^2 \ln b}{2}(2q - 1)\} \quad (11)$$

$$\tau^{(2)}(q) = d\sigma^2 \ln b \quad (12)$$

となる。これらから同定したいモデルパラメータに関して

$$\beta = 1 + \frac{\tau^{(1)}(q)}{d} - \frac{\sigma^2 \ln b}{2}(2q - 1) \quad (13)$$

$$\sigma^2 = \tau^{(2)}(q)/d \ln b \quad (14)$$

を得る。(13)(14) 式の右辺の $\tau^{(1)}(q)$ 、 $\tau^{(2)}(q)$ は、図-4 で示す q と $\tau(q)$ と間の 3 次スプライン関数から容易に求めることができる。なお、ここでは Jothityangkoon *et al.*⁶⁾ にならって $q = 2$ として β 、 σ^2 を求めた。

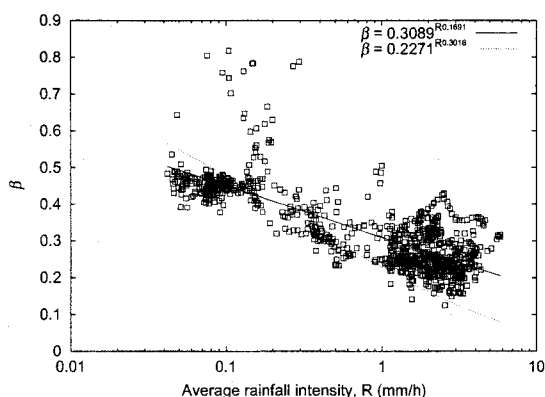


図-5 平均降雨強度 R に対する β の散布図と回帰曲線

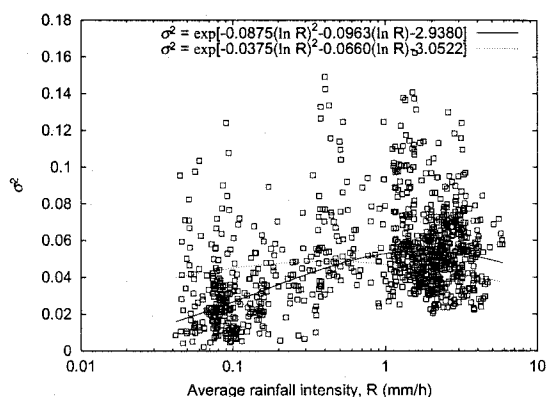


図-6 平均降雨強度 R に対する σ^2 の散布図と回帰曲線

このようにして、一回の降雨の空間分布データから1組の β と σ^2 が得られる。1000 回分のレーダーデータに対してそれぞれ β と σ^2 を求め、それらとそのときの領域平均降雨強度 $R(\text{mm/h})$ との関係を 図-5、図-6 の散布図に示す。図中の実線は最小二乗法によって得た回帰曲線であり

$$\beta = 0.3089 R^{0.1691} \quad (15)$$

$$\sigma^2 = \exp[-0.0875(\ln R)^2 - 0.0963(\ln R) - 2.938] \quad (16)$$

となった。回帰曲線の関数形は Jothityangkoon *et al.*⁶⁾ が用いた関数を採用した。参考までに彼らが西オーストラリアの日雨量データから得た回帰曲線を点線で図中に示す。用いた降雨データの時間分解能の違いや地域性などによって両者に違いが生じたと考えられるが、平均降雨強度に対するパラメータ値の変化傾向は両地域とも同様であることがわかる。

(15) 式は領域平均降雨強度 R が大きくなると β が小さくなる式である。これは (3)(5) 式からわかるように、領域平均降雨強度が大きくなるとどこかの領域で降水が発生する確率が高くなるようなパラメータが得られたことを示している。また、(16) 式は R が大きくなると σ^2 も概ね大きくなる式である。これは (6) 式にあるように、領域平均降雨強度が大きくなると Y の分散が大きくなり、空間的なばらつきが大きくなるようなパラメータが得られたことを示している。

4. 降雨空間分布の地形依存性のカスケードジェネレータへの導入

次に、降雨と標高との依存性をもとに、カスケードジェネレータによって発生させる降雨場に、空間分布の不均一性を導入することを考える。Nakakita *et al.*⁹⁾、鈴木ら¹⁰⁾によると、降雨分布と地形標高の間には明瞭な依存性があることが示されており、地形標高を 100m

間隔で層別化して各標高区分内における積算降水量の空間平均値を求めその対数を取ると、その値と標高との間には相関係数 0.9 以上の直線関係

$$\log \left(\frac{\mu_k(T)}{\mu(T)} \right) = a \cdot z_k + b \quad (17)$$

が成立することが確認されている。ここに、 $\mu(T)$ は積分時間スケール T における領域平均積算降水量 (mm)、 $\mu_k(T)$ は標高区分 k 内における領域平均積算降水量 (mm)、 z_k は標高区分 k における平均標高、 a 、 b はパラメータである。 $\mu(T)=300(\text{mm})$ における標高依存直線は、 $y = \mu_k(T)/\mu(T)$ 、 $x = z_k$ とすると

$$\log y = 0.00027175x + \log(0.83099) \quad (18)$$

となることが鈴木ら¹⁰⁾によって示されている。そこで、分割レベル n のサブ領域 i ($i=1, 2, \dots, 2^{2n}$) に対して $G_n(i)$ という重みを考え、(2) 式に $G_n(i)$ を導入して

$$W = BYG \quad (19)$$

というジェネレータを考える。ここで、分割レベル n 、サブ領域 i の y の値を $y_n(i)$ として

$$G_n(i) = \mu_n(i) / \overline{\mu_n(i)} \quad (20)$$

とする。ここで、

$$\mu_n(i) = e^{y_n(i)} \mu(T), \quad \overline{\mu_n(i)} = \sum_{i=1}^{2^{2n}} e^{y_n(i)} \mu(T) / 2^{2n}$$

であり、 $G_n(i)$ の値は、分割レベル n 、領域 i の平均標高から計算される。図-7 (c)~(i) はこのように決定したジェネレータを用いて発生させた 1989 年 9 月 5 日 12 時 40 分に対応する分割レベル 6 の降雨場 (一辺 192km、空間分解能 3km、64 × 64 メッシュ) の例であり、異なる乱数によって異なる降雨の空間分布が生成される。黒い部分は無降雨の領域である。

次に、このカスケードジェネレータを用いて 100 個の降雨場を生成し、降雨の標高依存性がどのように現れているかを確認した。図-8 は初期領域 (レベル 0、

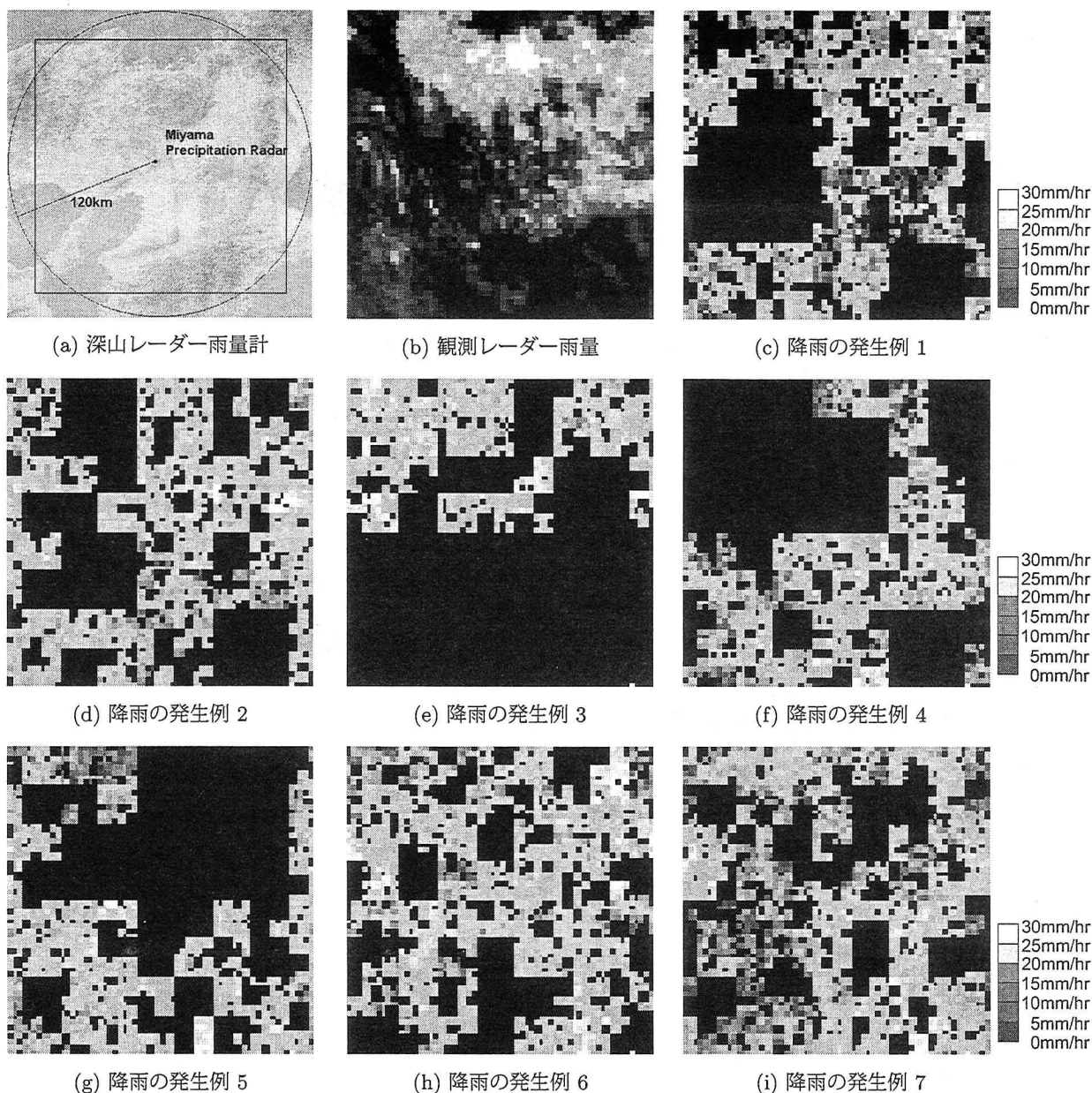


図-7 標高依存性を導入した β -lognormal モデルによる降雨場の発生例 (発生領域は (a) の矩形領域で、空間分解能 3km、一辺 192km の領域)。1989 年 9 月 5 日 12 時 40 分のレーダー観測データによって得られた β 、 σ^2 を用いて生成している。黒い部分は無降雨の領域である。

192×192km) の領域平均降雨強度を 1(mm/hr) とし、分割レベル 6 (空間分解能 3km) での標高 (m) と降雨強度 R (mm/h) の関係を描いたものであり、図-9、図-10 は発生させた 50 回の降雨場、100 回の降雨場の積算雨量に対して同様の散布図を描いたものである。図中には用いた標高依存直線 (18) 式を示している。これらの図から、発生させた一回の降雨場には降雨強度と標高との間には相関関係が見られず、積算回数を増やすと積算降雨量と地形標高の間に明確な相関が現れてくるのがわかる。これは、雨量を時間積算すると標高依存性が明瞭に現れてくるという、Nakakita *et al.*⁹⁾、鈴木ら¹⁰⁾が実際のレーダー雨量データから見出した性質をうまく表現している。

ただし、図-9、図-10 に示す結果を見ると、標高の大きな部分では、用いた標高依存直線よりも上側にほとんどの点がプロットされている。また、プロットされた点は、全体的に標高依存直線よりも傾きが大きく、より強く標高依存性が現れている。この原因として、(19) 式により設定した G が各分割レベルすべてにおいて組み込まれるため、標高依存性がより強く組み込まれたことが考えられる。これに対処するためには、最後の分割レベルにおいてのみ G を導入するなどが便宜的には考えられるが、本質的にはカスケードジェネレータの平均値・分散を決定する (6) 式の中で標高依存性と標高依存直線周りの分散特性を考慮できるように理論的な検討を進める必要がある。

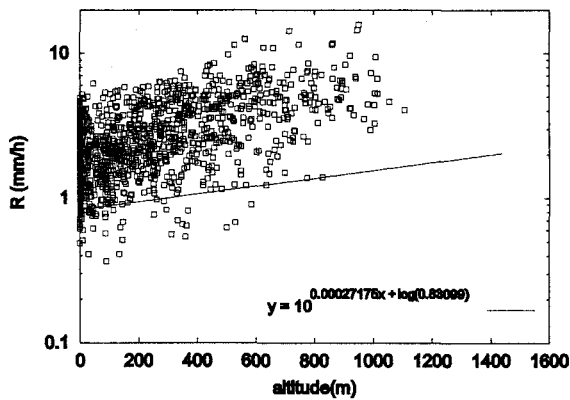


図-8 発生降雨強度 $R(\text{mm/h})$ の散布図と標高依存直線

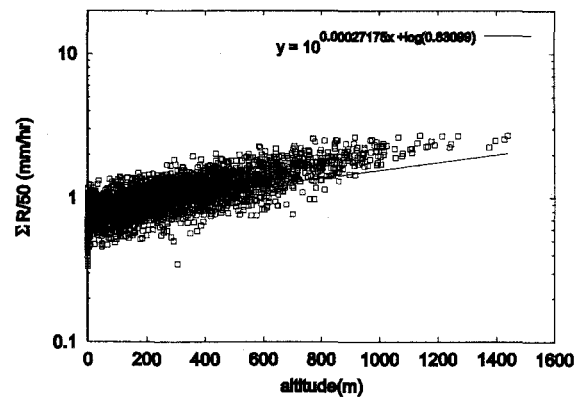


図-9 50回積算降雨強度 $\sum^{50} R/50(\text{mm/h})$ の散布図と標高依存直線

5. 結論と今後の課題

降雨の空間分布を確率的に発生させるモデルを構築することを目的とし、ランダムカスケードモデルの採用を試みた。また、カスケードジェネレータによって発生させる降雨場に降雨分布の不均一性を導入するために、中北・鈴木らによる標高依存直線を用いて、地形依存性を考慮するカスケード G を考えた。発生させた降雨場は、積算回数が増えると積算降水量と地形標高の間に明瞭な相関が現れ、実際の観測データから得られる性質をうまく表現することに成功した。

今後の課題として、地形依存性を考慮するカスケード G の組み込み方を理論的に考察する必要がある。また、実際の降雨場によって得られる標高依存直線周りの分散特性とカスケードジェネレータによって生成される降雨場におけるそれとの関連を理論的に考察し、カスケードジェネレータの平均値・分散を、降雨の標高依存性およびその分散特性と関係付けて表現できるように理論の拡張を図る必要がある。

謝辞： 深山レーダー雨量データは国土交通省淀川ダム統合管理事務所から提供していただきました。また、標高依存直線に関して鈴木善晴助手（宇都宮大学工学部）から多くの助言を頂きました。記して謝意を表します。

参考文献

- 1) Bras, R. L. and I. Rodriguez-Itube : Rainfall generation: A nonstationary time-varying multidimensional model, *Water Resour. Res.*, 12(3), pp. 450–456, 1976.
- 2) Waymire, E., V. K. Gupta and I. Rodriguez-Itube : A spectral theory of Rainfall Intensity at the Meso- β Scale, *Water Resour. Res.*, 20(10), pp. 1453–1465, 1984.
- 3) Wilson, C. B., J. B. Valdes, and I. Rodriguez-Itube : On the influence of the spatial distribution of rainfall on storm runoff, *Water Resour. Res.*, 20(10), pp. 1453–1465, 1984.

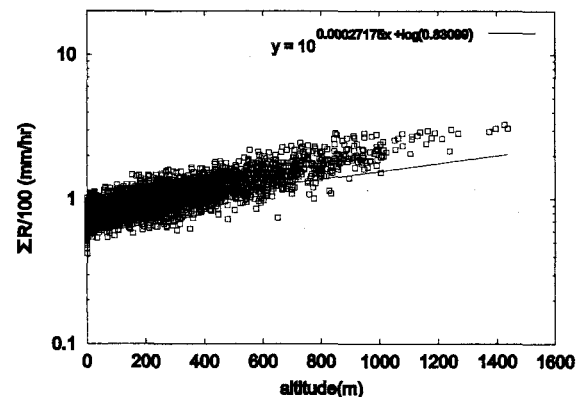


図-10 100回積算降雨強度 $\sum^{100} R/100(\text{mm/h})$ の散布図と標高依存直線

- 4) Krajewski, W. F., V. Lakshmi, K. P. Georgakakos and S. C. Jain : A monte calro study of rainfall sampling effect on a distributed catchment model, *Water Resour. Res.*, 27(1), pp. 119–128, 1991.
- 5) Valdes, J. B., S. Nakamoto, S. S. P. Shen and G. R. North : Estimation of multidimensional precipitation parameters by areal estimates of oceanic rainfall, *J. Geophys. Res.*, 95(D3), pp. 2101–2111, 1990.
- 6) Jothityangkoon, C., M. Sivapalan, and N. R. Viney : Tests of a space-time model of daily rainfall in South-western Australia based on nonhomogeneous random cascades, *Water Resour. Res.*, 36(1), pp. 267–284, 2000.
- 7) Pathirana, A. and S. Herath : Treatment of heterogeneity in spatial downscaling of precipitation, *Proc. of the Fourth International Summer Symposium, JSCE*, pp. 131–134, Kyoto, August 3, 2002.
- 8) Over, T. M., and V. K. Gupta : A space-time theory of mesoscale rainfall using random cascades, *Jour. Geophys. Res.*, 101(D21), pp. 26,319–26,331, 1996.
- 9) Nakakita, E., Y. Suzuki and S. Ikebuchi : Hierarchical time-scale structure in the dependence of rainfall distribution on topography, *Jour. of Hydroscience and Hydraulic Engineering, JSCE*, 19(2), pp. 1–10, 2001.
- 10) 鈴木善晴・中北英一・池淵周一：標高依存直線に基づいた降雨分布の地形依存特性の解明, *水工学論文集*, 第45巻, pp. 301–306, 2001.

(2002. 9. 30受付)