

河床波の遷移過程に見られる ヒステリシス現象について

ON THE HYSTERESIS OBSERVED IN THE TRANSITION PROCESS OF DUNES

山口 里実¹・泉 典洋²
Satomi YAMAGUCHI and Norihiro IZUMI

¹ 学生会員 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

² 正会員 Ph.D. 東北大学助教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (同上)

On the transition process of dune formation, it is known that a hysteresis is observed that the critical Froude number at which dunes disappear when discharge increases is larger than the critical Froude number at which dunes reappear when discharge decreases. In this study, in order to explain the hysteresis observed in the dune transition, a weakly nonlinear analysis is performed with the use of the growth rate expansion method. The analysis leads a nonlinear amplitude equation, which shows that when wavenumber is $0.1 \sim 0.4$, the type of bifurcation appeared in the dune transition is subcritical for $\sigma = 0.8$. This result implies that there is a possibility that the hysteresis is caused by the subcritical bifurcation.

Key Words : dunes, transition process, nonlinear analysis, subcritical bifurcation, hysteresis

1. はじめに

河床の形態は流れに対する流路の抵抗に大きな影響を与える。そのため、河道抵抗予測の問題において河床形態を予測することは重要である。

河床に形成される河床波においては、従来からその発生に関して数多くの線型安定解析がなされてきた^{1), 2)}。これらの結果より、流れの底面剪断力がある範囲内において河床上に与えられた微小な擾乱は発達することが明らかとなっており、この範囲を上回る底面剪断力のもとでは平坦床となることが予測されている。実際の河川においても、洪水時、流量(または底面剪断力)の小さいうちは河床波が発生するが、ある程度流量が大きくなると河床波は消滅し平坦床となることが確認されている。また、流量が増加する過程において河床波床から平坦床へ遷移する流量の臨界値のほうが、流量が減少する過程で平坦床から河床波床へ遷移する臨界値よりも大きくなることが報告されている³⁾。つまり流量の増加時にはかなり流量が増加するまで河床には河床波が存在するのに対し、流量減少時にはかなり流量が減少するまで平坦床が維持されている。河床波の遷移過程においてこのようなヒステリシス現象が起こるメカニズムについては未だ明らかになっていない。

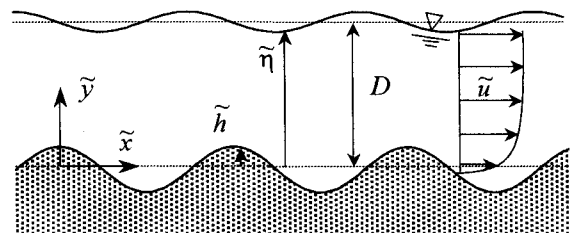
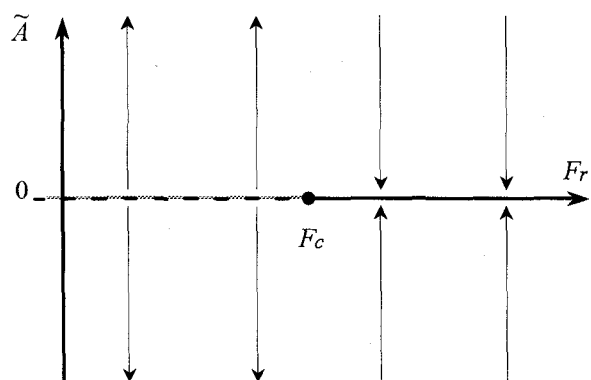


図-1 座標系の概念図

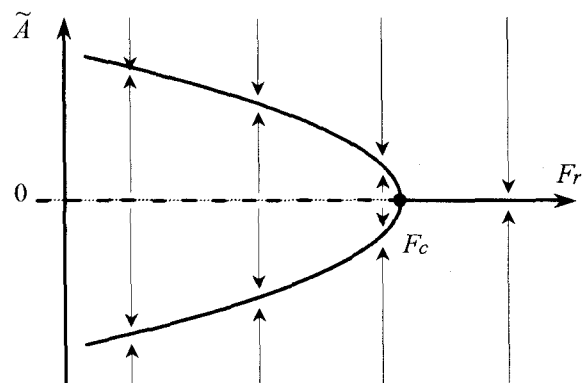
これに類似したヒステリシス現象は乱流における層流からの遷移過程にも存在する。層流から乱流への遷移過程における臨界レイノルズ数に対して、乱流から層流への遷移過程では臨界レイノルズ数が低下する現象である。このような乱流の遷移現象に関しては、流体力学の弱非線型安定解析の手法を用いてほぼ説明されている⁴⁾。そこで、本研究では、この弱非線型安定解析の手法を適用することによって、河床波の遷移現象を説明することを試みる。

2. モデル

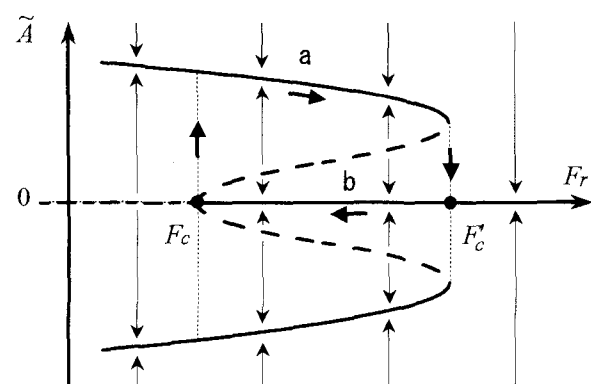
図-1 に示すような二次元の開水路流れを考える。ここで $\tilde{h}$ 及び $\tilde{\eta}$ はそれぞれ河床高及び水面高を表す。流れは二次元レイノルズ方程式と水面及び底面における境界条件に



(a) 線型安定性



(b) スーパークリティカルバイファケーション



(c) サブクリティカルバイファケーション

図-2 解の分岐形態及び分岐図

によって決定される。また、河床高は次のようなエクスター方程式によって決定されるものとする。

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{\partial \tilde{q}}{\partial \tilde{x}} \quad (1)$$

ここで $\tilde{q}$ は流下方向の流砂量である。河床波の非線型性を取り扱う際、境界条件及び流砂量公式は有限波高の河床波に対して適応が可能でなければならないため、本研究では、流下方向の河床及び水面勾配を考慮した式を適用する。

まず、線型安定解析を行うことによって微小振幅に対し図-2a に示すような結果が導かれる。 $F_r < F_c$ の領域では平坦床 ($\tilde{A} = 0$) は不安定となり、 $F_r > F_c$ の領域では平坦床は安定となる。この F_c が河床波発生の臨界値となる。

弱非線型安定解析では、次式で表されるような臨界値近傍において有限振幅の挙動を予測することが出来る。

$$F_r = F_c - \gamma^2 F_c \quad (2)$$

ここで γ は臨界値からのわずかなずれを表す摂動パラメータであり、上式によって定義される。これによって増幅率が展開され、次のような非線型振幅方程式が得られる。

$$d\tilde{A}/dT = \tilde{\alpha}_0 \tilde{A} + \tilde{\alpha}_1 |\tilde{A}|^2 \tilde{A} + \dots \quad (3)$$

振幅 $\tilde{A}$ が微小な範囲であれば、 $\tilde{A}$ の 3 次以上の項が無視され、上式は線型振幅方程式となる。このとき $\tilde{\alpha}_0$ は線型解析における増幅率に相当している。しかし振幅 $\tilde{A}$ が有限な範囲では $\tilde{A}$ の高次項を無視できない。そのような範囲における振幅の挙動は $\tilde{\alpha}_1$ の値を求めることによって予測される。 $\tilde{\alpha}_1$ はランダウ係数と呼ばれ、その符号によって振幅解の分岐形態が次のように分類される。 $\tilde{\alpha}_1$ が負の値であれば、図-2b に示すように $F_r < F_c$ の領域において安定な振幅解が存在し、遷移過程においてスーパークリティカルバイファケーションと呼ばれる分岐形態を有することになる。一方、 $\tilde{\alpha}_1$ が正の値であれば、図-2c に破線で示すように $F_r > F_c$ の領域において不安定な解が存在し、サブクリティカルバイファケーションと呼ばれる分岐形態を有することになる。後者の場合、 $\tilde{A}$ の 5 次の項まで考慮した解は安定である可能性があり、このとき F_c とは異なった臨界点 F_c' が存在することになる。この二つの臨界点 (F_c 及び F_c') 間において二つの安定した振幅解が存在するため、フルード数が増加する過程では $\tilde{A} = 0$ 以外の解が現われるのに対し、フルード数が減少する過程では $\tilde{A} = 0$ が解として現われるというヒステリシス現象が生じる。つまり、流量が増加する過程では振幅の解は経路 a に従うためフルード数が F_c' において河床波が消滅することになるが、流量が減少する過程では解は経路 b に従うためフルード数が F_c において河床波が発生することになる。

本研究では、サブクリティカルな分岐形態の存在を示すことによって、河床波の遷移過程におけるヒステリシス現象を説明することを試みる。そのため、ランダウ係数 $\tilde{\alpha}_1$ の値を求めることが第一の目的となる。

3. 定式化

(1) 支配方程式

図-1 に示されるような流れは次のような二次元レイノルズ方程式及び連続の式によって表される⁵⁾。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon^2 \left(1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4a)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (4b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

上式は既に次式によって無次元化されている。

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) = \frac{U_f}{\varepsilon} (u, v), \quad \tilde{p} = (U_f/\varepsilon)^2 p \quad (6a,b)$$

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{h}, \tilde{\eta}) = D(x, y, h, \eta) \quad (6c)$$

ここで $\tilde{x}$ 及び $\tilde{y}$ はそれぞれ流下方向及び水深方向の座標、 $\tilde{u}$ 及び $\tilde{v}$ はそれぞれ $\tilde{x}$ 及び $\tilde{y}$ 方向の流速、 $\tilde{p}$ はピエゾ水頭に対応する圧力、 U_f および D はそれぞれ等流状態での摩擦速度および水深である。また、 ε は渦動粘性係数であり、 $\varepsilon = \varepsilon U_f D$ で表されるような定数と仮定する。本研究ではEngelund¹⁾及びFredsoe²⁾に従い $\varepsilon = 0.077$ を用いる。次式で定義される流関数を導入する。

$$u = -\partial\Psi/\partial y, \quad v = \partial\Psi/\partial x \quad (7a,b)$$

このとき式(4-5)は次のように表される。

$$-\frac{\partial\Psi}{\partial y} \frac{\partial\nabla^2\Psi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial x} \frac{\partial\nabla^2\Psi}{\partial y} - \varepsilon^2 \nabla^2 \nabla^2 \Psi = 0 \quad (8)$$

また ∇^2 は次式を表す。

$$\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 \quad (9)$$

河床高さ h の時間変化は次式によって表される。

$$\partial h/\partial t = -\partial q/\partial x \quad (10a)$$

ここで q は流下方向の流砂量であり、次式で表される⁶⁾。

$$q = \frac{1}{\mu_c + h_x} \left[\tau - \theta (1 + h_x/\mu_c) (1 + h_x^2)^{-1/2} \right] \times \left[\tau^{1/2} - \theta^{1/2} (1 + h_x/\mu_c)^{1/2} \right] \quad (10b)$$

ここで添字 x はその一回微分を表す。上式は次式を用いて無次元化されている。

$$\tilde{\tau} = (1 - \lambda_p) \mu_c R_s g D_s D t / a^{1/2} U_f^3, \quad \tilde{\tau}_{th} = \theta \tilde{\tau}_0 \quad (11a,b)$$

ここで λ_p は砂の空隙率、 μ_c はクーロン摩擦係数、 R_s は砂粒子の比重、 D_s は砂の粒径、 a は底面摩擦速度と底面付近の代表流速との比、 $\tilde{\tau}_{th}$ は限界剪断力であり、 $\tilde{\tau}_0$ は等流状態における底面剪断力を表す。 $\tilde{\tau}$ は底面剪断力であり、次式で表される。

$$\tau = \frac{1}{1 + h_x^2} \left[h_x (\tau_{[yy]} - \tau_{[xx]}) + \tau_{[xy]} (1 - h_x^2) \right]_{y=h} \quad (12)$$

ここで $\tau_{[xx]}$ 、 $\tau_{[yy]}$ 及び $\tau_{[xy]}$ はレイノルズ応力であり、それぞれ次のように表される

$$\tau_{[xx]} = 2\partial u/\partial x, \quad \tau_{[yy]} = 2\partial v/\partial y \quad (13a,b)$$

$$\tau_{[xy]} = \partial u/\partial x + \partial v/\partial y \quad (13c)$$

(2) 座標変換及び境界条件

境界条件を与える前に、水面及び底面における境界上での流関数の値を評価する必要がある。従来の研究では、等流状態での水面(つまり $y=1$)または底面($y=0$)のまわりに展開した値を摂動上($y=\eta$ または $y=h$)の値として境界条件に適用している。しかし、支配方程式(8)は $y=1$ 及び $y=0$ に漸近的特異点が存在するため、求められる流関数は境界まわりに展開すると高次項で発散することになる。そ

のため特に非線型解析においてはこのような展開が境界条件に適用できない。そこで次のような座標変換を導入する。

$$\xi = x, \quad \chi = (y-h)/(\eta-h) \quad (14)$$

この座標変換によって境界上での値を評価することが可能となる。式(14)の座標変換を施すと、水面及び底面における境界条件はそれぞれ次のように与えられる。

水面での運動学的境界条件は次式で表される。

$$(-u\eta_\xi + v) = 0 \quad \text{at} \quad \chi = 1 \quad (15)$$

ここで添字 ξ はその一回微分を表す。水面における力学的境界条件は次のように表される。

$$\eta + \sigma(u^2 + v^2)/2 = 0 \quad \text{at} \quad \chi = 1 \quad (16)$$

ここで σ は正規化された河床勾配($=S/\varepsilon^2$)である。水面では剪断力がほぼゼロとなるため、次式が与えられる。

$$\eta_\xi(\tau_{[yy]} - \tau_{[xx]}) + \tau_{[xy]}(1 - \eta_\xi^2) = 0 \quad \text{at} \quad \chi = 1 \quad (17)$$

底面での運動学的境界条件は次式で与えられる。

$$(-uh_\xi + v) = 0 \quad \text{at} \quad \chi = 0 \quad (18)$$

底面における接線方向の流速 $\tilde{u}_t$ と剪断力 $\tilde{\tau}_t$ の間に次のような関係を仮定する^{1), 2)}。

$$\rho \tilde{u}_t^2 = K^2 \tilde{\tau}_t \quad (19)$$

この条件は次のように書き表される。

$$(u + v h_\xi)^2 = \kappa^2 (\eta - h) \left[h_\xi (\tau_{[yy]} - \tau_{[xx]}) + \tau_{[xy]} (1 - h_\xi^2) \right] \quad \text{at} \quad \chi = 0 \quad (20)$$

ここで κ は正規化された K ($=\varepsilon K$)である。

(3) 変数変換

流れの支配方程式(8)及び河床高の時間変化式(10)は座標変換の影響を受けない。この二式及び既に座標変換された境界条件(15-18, 20)は、さらに式(14)を用いて変数変換される。このとき例えば一回微分は次のように変換される。

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y} = \frac{\partial\chi}{\partial y} \frac{\partial\Psi}{\partial\chi}, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{\partial\Psi}{\partial\xi} + \frac{\partial\chi}{\partial x} \frac{\partial\Psi}{\partial\chi} \quad (21a,b)$$

(4) 等流流速分布

摂動を与える前の平坦床における等流状態では、その等流流速分布は次のように求められる。

$$-\partial\Psi_0/\partial\chi = U_0(\chi) = -\frac{1}{2}\chi^2 + \chi + \kappa \quad (22)$$

等流の平均流速を用いるとフルード数は次式で表される。

$$Fr = \sigma^{1/2} (\kappa + 1/3) \quad (23)$$

4. 線形理論

(1) 線形解析

非線型解析を行う前に河床波発生の線形安定性を明らか

にしておく必要がある。平坦床に対して振幅 A の微小擾乱を与えると、各変数はそれぞれ次のように展開される。

$$\Psi = \Psi_0(\chi) + A e^{\Omega t} \phi_{11}(\chi) E + c.c. \quad (24a)$$

$$\eta = 1 + A e^{\Omega t} \eta_{11} E + c.c. \quad (24b)$$

$$h = A e^{\Omega t} h_{11} E + c.c. \quad (24c)$$

ここで、 $E = \exp[i(k\xi - \omega t)]$ である。 k は擾乱の波数、 Ω は線形増幅率を表し、 ω は位相速度を表す。

このとき支配方程式(8)を $O(A)$ について整理すると、 ϕ_{11} に関する方程式が次のように得られる。

$$\begin{aligned} ik \left[U_0 \phi_{11}'' - (k^2 U_0 + U_0'') \phi_{11} \right. \\ \left. - U_0^2 [k^2 (1 - (1 - \eta_{11}) \chi)] - 2 U_0 U_0' (1 - \eta_{11}) \right] \\ - \varepsilon^2 \left[\phi_{11}^{(4)} - 2 k^2 \phi_{11}'' + k^4 \phi_{11} \right. \\ \left. - k^2 [(k^2 U_0 - 2 U_0'') (-1 + \chi(1 - \eta_{11})) \right. \\ \left. + 4 U_0' (1 - \eta_{11})] \right] = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

ここでプライム(')は χ に関する微分を表す。この摂動方程式は特異摂動法によって解くことが出来⁵⁾、その一般解は次のように求められる。

$$\begin{aligned} \phi_{11}(\chi) = & a_1 \exp[\sqrt{k^2 - \beta^2} \chi] + b_1 \exp[-\sqrt{k^2 - \beta^2} \chi] \\ & + \beta^{-2} [-1 + \chi(1 - \eta_{11})] \cos[\beta(1 - \chi)] \\ & + c_1 \exp[-\sqrt{ik\kappa} \chi / \varepsilon] \\ & + d_1 \exp[-\sqrt{ik(\kappa + \frac{1}{2})} (1 - \chi) / \varepsilon] \end{aligned} \quad (26)$$

ここで $\beta = (1/2 + \kappa)^{-1/2}$ である。

境界条件式(15-18, 20)及び河床高の時間変化式(10)に式(24)を代入し、 A について整理するとそれぞれ次式を得る。

$$\phi_{11}(1) = 0 \quad (27a)$$

$$\eta_{11} + \sigma \left[(1 - \eta_{11}) \left(\frac{1}{2} + \kappa \right)^2 - \left(\frac{1}{2} + \kappa \right) \phi_{11}'(1) \right] = 0 \quad (27b)$$

$$-k^2 \eta_{11} \left(\frac{1}{2} + \kappa \right) - k^2 \phi_{11}(1) - \phi_{11}''(1) = 0 \quad (27c)$$

$$\phi_{11}(0) = 0 \quad (27d)$$

$$\begin{aligned} k^2 \kappa \phi_{11}(0) - 2 \phi_{11}'(0) + \kappa \phi_{11}''(0) \\ + \kappa (1 - \eta_{11}) + k^2 \kappa^2 = 0 \end{aligned} \quad (27e)$$

$$\begin{aligned} \Omega - i\omega = & -\frac{k^2}{2\mu_c} \left(2 - \theta^{\frac{1}{2}} - \theta^{\frac{3}{2}} \right) \\ & + \left[\frac{ik \phi_{11}'(0)}{F_r \sigma^{-1/2} - \frac{1}{3}} - \frac{3ik}{2} (1 - \eta_{11}) \right] \left(3 - 2\theta^{\frac{1}{2}} - \theta \right) \end{aligned} \quad (28)$$

境界条件式(27a-e)より式(26)中の係数 a_1 , b_1 , c_1 , d_1 、及び η_{11} が決定され、式(28)より増幅率 Ω が求められる。

(2) 線形安定性

式(28)より求められる増幅率 Ω のコンタ図を図-3 に示す。太線は $\Omega = 0$ を示し、実線は正のコンタを点線は負のコンタを表している。

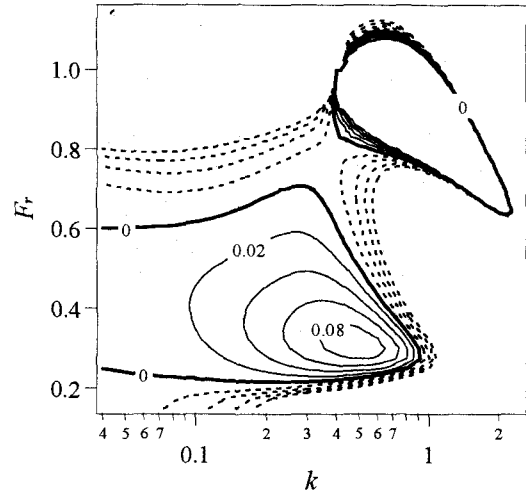


図-3 フルード数 F_r 及び波数 k による増幅率 Ω のコンタ図。
 $\theta = 0.5$, $\mu_c = 0.5$, $\sigma = 0.3$ ($S = 0.002$)

図によると、フルード数の値がおおよそ 0.2 から 0.7 の範囲に増幅率が正となる領域が存在している。また、波数 k の値が 1 付近においてはフルード数がおおよそ 0.7 から 1.1 の範囲にも増幅率が正となる領域がみられる。これらの領域では、平坦床は微小擾乱に対して不安定となり、河床波が発生することになる。それぞれの領域における河床波発生時の臨界点はそれぞれおおよそ $F_r = 0.7$ 及び $F_r = 1.1$ 付近に存在していることがわかる。このうち、実際の洪水時における河床波の遷移過程にみられるヒステリシス現象は $F_r = 0.7$ 付近の臨界値で起きていると考えられる。この付近では増幅率が最大となる卓越波数の値は $k = 0.3$ 程度であることがわかる。また $F_r = 1.1$ 付近では水面形が河床形状と同位相となっていることから、この値は反砂堆発生の臨界値を示すものと考えられる。

次章では線形解析より得られた河床波発生時の臨界点近傍において弱非線形解析を行い、非線形振幅方程式を導く。

5. 弱非線形解析

(1) 摂動展開

線形安定解析より求められる臨界フルード数 F_c よりわずかにずれた領域を考え、フルード数を式(2)のように展開する。これに合わせて波数も次のように展開する。

$$k = k_c + \gamma^2 k_1 \quad (29)$$

フルード数の値が F_c では摂動の増幅率はゼロである。 F_c から γ^2 程度だけずれると、摂動の増幅率 Ω も γ^2 程度となるため、非線形性が振幅の時間発展に影響を及ぼすのに、 $\Omega^{-1} \sim O(\gamma^2)$ 程度の時間を要する。したがって時間発展を次のように展開する。

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \gamma^2 \frac{\partial}{\partial T} \quad (30)$$

(2) 摂動解

各変数を次のように等流状態における部分と等流状態からの変動部分に分けて展開する。

$$\Psi = \Psi_0(\chi) + \hat{\Psi}(\chi), \quad \eta = 1 + \hat{\eta}, \quad h = \hat{h} \quad (31a, b, c)$$

式(31)を(8)に代入すると摂動部分について次式が得られる。

$$\begin{aligned} & [U_0 \partial_\xi^2 \nabla^2 - U_0'' \partial_\xi - \varepsilon^2 \nabla^2 \nabla^2] \hat{\Psi} \\ & + \hat{h} f(U_0) + \hat{\eta} g(U_0) = I(\hat{\Psi}, \hat{\eta}, \hat{h}) \end{aligned} \quad (32)$$

ここで右辺は非線型項から現われる項である。

各変動成分をさらに次のように展開する。

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(y) &= \gamma \Psi_{11}(\chi) E + c.c. \\ &+ \gamma^2 [\Psi_{22}(\chi) E^2 + c.c. + \Psi_{20}(\chi)] \\ &+ \gamma^3 [\Psi_{33}(\chi) E^3 + c.c. + \Psi_{31}(\chi) E + c.c.] \end{aligned} \quad (33a)$$

$$\begin{aligned} \hat{\eta} &= \gamma (\hat{\eta}_{11} E + c.c.) + \gamma^2 (\hat{\eta}_{22} E^2 + c.c. + \hat{\eta}_{20}) \\ &+ \gamma^3 (\hat{\eta}_{33} E^3 + c.c. + \hat{\eta}_{31} E + c.c.) \end{aligned} \quad (33b)$$

$$\begin{aligned} \hat{h} &= \gamma (\hat{h}_{11} E + c.c.) + \gamma^2 (\hat{h}_{22} E^2 + c.c. + \hat{h}_{20}) \\ &+ \gamma^3 (\hat{h}_{33} E^3 + c.c. + \hat{h}_{31} E + c.c.) \end{aligned} \quad (33c)$$

ここで $c.c.$ はその直前の項の複素共役を表す。

式(33)を(32)に代入すると $O(\gamma)$ について次式が得られる。

$$L_1 \Psi_{11} + \hat{h}_{11} f(U_0) + \hat{\eta}_{11} g(U_0) = 0 \quad (34)$$

ここで L_n は次式で表される。

$$L_n = i n k_c [U_0 S_n - U_0''] - \varepsilon^2 S_n^2 \quad (35a)$$

$$S_n = d^2/d\chi^2 - n^2 k_c^2 \quad (35b)$$

式(34)の解は次のような形となり、その解は既に線型解析で求められている。

$$\Psi_{11} = A \phi_{11}(\chi), \quad \hat{\eta}_{11} = A \eta_{11}, \quad \hat{h}_{11} = A h_{11} \quad (36a, b, c)$$

式 $O(\gamma^2)$ においては E^2 を因子として持つ部分と持たない部分に分けられ、次の二式が得られる。

$$L_2 \Psi_{22} + \hat{h}_{22} f + \hat{\eta}_{22} g = A^2 I_{22}(\phi_{11}, \eta_{11}, h_{11}) \quad (37a)$$

$$\begin{aligned} L_0 \Psi_{20} + \hat{h}_{20} f + \hat{\eta}_{20} g \\ = A A^* I_{20}(\phi_{11}, c.c., \eta_{11}, c.c., h_{11}, c.c.) \end{aligned} \quad (37b)$$

ここで上付きの*はその複素共役を表す。従って、 Ψ_{22} 及び Ψ_{20} は次のような形となり、境界条件を用いるとそれぞれ解が求められる。

$$\Psi_{22} = A^2 \phi_{22}(\chi), \quad \Psi_{20} = A A^* \phi_{20}(\chi) \quad (38a, b)$$

$$\hat{\eta}_{22} = A^2 \eta_{22}, \quad \hat{\eta}_{20} = A A^* \eta_{20} \quad (38c, d)$$

$$\hat{h}_{22} = A^2 h_{22}, \quad \hat{h}_{20} = A A^* h_{20} \quad (38e, f)$$

$O(\gamma^3)$ については E^3 及び E を因子に持つ次の二式が得られる。

$$\begin{aligned} L_3 \Psi_{33} + \hat{h}_{33} f + \hat{\eta}_{33} g \\ = A^3 I_{33}(\phi_{11}, \eta_{11}, h_{11}, \phi_{22}, \eta_{22}, h_{22}) \end{aligned} \quad (39a)$$

$$\begin{aligned} L_1 \Psi_{31} + \hat{h}_{31} f + \hat{\eta}_{31} g \\ = A I_{30}(\phi_{11}, \eta_{11}, h_{11}) \\ + A^2 A^* I_{31}(\phi_{11}, c.c., \eta_{11}, c.c., h_{11}, c.c., \\ \phi_{22}, \eta_{22}, h_{22}, \phi_{20}, \eta_{20}, h_{20}) \end{aligned} \quad (39b)$$

従って、解は次のような形となり、境界条件を用いることで各解が得られる。

$$\Psi_{33} = A^3 \phi_{33}(\chi), \quad \Psi_{31} = A \phi_{30}(\chi) + A^2 A^* \phi_{31}(\chi) \quad (40a, b)$$

$$\hat{\eta}_{33} = A^3 \eta_{33}, \quad \hat{\eta}_{31} = A^2 A^* \eta_{31} + A \eta_{30} \quad (40c, d)$$

$$\hat{h}_{33} = A^3 h_{33}, \quad \hat{h}_{31} = A^2 A^* h_{31} + A h_{30} \quad (40e, f)$$

(3) 振幅方程式

河床高の時間変化式(10)の左辺は次のように展開される。

$$\begin{aligned} \partial h / \partial t &\rightarrow \partial h / \partial t + \gamma^2 \partial h / \partial T \\ &= \gamma (-i \omega A h_{11} E + c.c.) \\ &+ \gamma^2 (-2 i \omega A^2 h_{22} E^2 + c.c.) \\ &+ \gamma^3 (-3 i \omega A^3 h_{33} E^3 + c.c. \\ &+ [-i \omega A h_{30} - i \omega A^2 A^* h_{31} + h_{11} dA/dT] E + c.c.) \end{aligned} \quad (41)$$

また同式の右辺は次のように展開される。

$$\begin{aligned} -\partial q / \partial x \\ = \gamma [-i k_c A E q_{11}(\phi_{11}, \eta_{11}, h_{11}) + c.c.] \\ + \gamma^2 [-2 i k_c A^2 E^2 q_{22}(\phi_{11}, \eta_{11}, h_{11}, \\ \phi_{22}, \eta_{22}, h_{22}) + c.c.] \\ + \gamma^3 [-3 i k_c A^3 E^3 q_{33}(\phi_{11}, \eta_{11}, h_{11}, \\ \phi_{22}, \eta_{22}, h_{22}, \phi_{33}, \eta_{33}, h_{33}) + c.c. \\ - i k_c A^2 A^* E q_{31}(\phi_{11}, c.c., \eta_{11}, c.c., h_{11}, c.c., \\ \phi_{22}, \eta_{22}, h_{22}, \phi_{20}, \eta_{20}, h_{20}) + c.c. \\ - i k_c A E q_{30}(\phi_{11}, \eta_{11}, h_{11}) + c.c.] \end{aligned} \quad (42)$$

従って式(10)を各オーダーで整理すると次のようになる。

$$O(\gamma) \quad -i \omega h_{11} = -i k_c q_{11} \quad (43a)$$

$$O(\gamma^2) \quad -2 i \omega h_{22} = -2 i k_c q_{22} \quad (43b)$$

$$O(\gamma^3) \quad -3 i \omega h_{33} = -3 i k_c q_{33} \quad (43c)$$

$$\begin{aligned} -i \omega A h_{30} - i \omega A^2 A^* h_{31} + h_{11} dA/dT \\ = -i k_c A q_{30} - i k_c A^2 A^* q_{31} \end{aligned} \quad (43d)$$

ここで式(43a)は既に線型解析で求められている。また、この問題では $h_{11} = 1$, $h_{31} = 0$ 及び $h_{30} = 0$ とみなすことが出来る。平均河床高は変動しないものとする $h_{20} = 0$ となる。 h_{22} は式(43b)より決定される。このとき式(43d)より次のような振幅方程式が得られる。

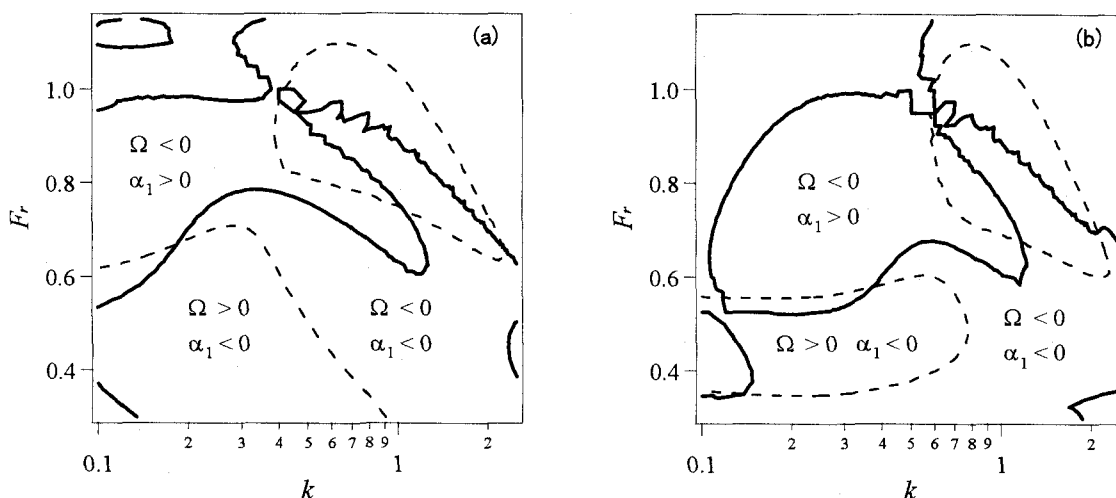


図-4 フルード数 F_r 及び波数 k によるランダウ係数 α_1 のコンタ図. $\theta = 0.5$, $\mu c = 0.5$.

(a) $\sigma = 0.3$ ($S = 0.002$), (b) $\sigma = 0.8$ ($S = 0.005$)

$$dA/dT = \alpha_0 A - \alpha_1 |A|^2 A \quad (44a)$$

$$\alpha_0 = -ik_c q_{30}, \quad \alpha_1 = -ik_c q_{31} \quad (44b)$$

6. 結果及び考察

図-4 に弱非線型解析より求められたランダウ係数 α_1 のコンタ図を示す。太線は $\alpha_1 = 0$ を示している。また、それぞれの図には線型解析で求められた増幅率 Ω のコンタも同時に表示しており、破線が $\Omega = 0$ の中立曲線を示す。

ここで $\sigma = 0.8$ を例にとつて図の意味を考えてみる。臨界フルード数は $F_c = 0.6$ 程度であり、その付近では卓越波数が $k = 0.5 \sim 0.6$ 程度であることがわかる。この臨界フルード数付近において α_1 は負の値をとっている。これは卓越波数を有する河床波の遷移過程がスーパークリティカルな分岐形態(図-2b)であり、臨界フルード数 0.6 を超えると河床波は消滅してしまうことを意味している。一方、波数 $k = 0.2 \sim 0.4$ に対する臨界フルード数 $F_c = 0.55$ 付近では α_1 の値は正となり、河床波の遷移過程がサブクリティカルな分岐形態を有することがわかる。このとき河床波は臨界フルード数を超えても消滅しない。

すなわちフルード数が一旦増加して再び減少する過程を考えると、遷移過程に図-2c のようなヒステリシス現象が現われる可能性があることがわかる。フルード数が増加していく過程では、 $k = 0.1 \sim 0.4$ の波数を有する河床波は臨界値 $F_c = 0.55$ を超えても、もう 1 つの臨界値 F_c' に達するまでは消滅しないが、 $k = 0.5 \sim 0.6$ の波数を有する河床波は臨界値 $F_c = 0.6$ を超えた時点で消滅してしまう。それに対してフルード数が減少していく過程では $F_c = 0.6$ を下回ったところで $k = 0.5 \sim 0.6$ 程度の波数を有する河床波がはじめて現われ、 $k = 0.1 \sim 0.4$ の河床波は $F_c = 0.55$ を下回るまで現われないことになる。

7. おわりに

河床波の遷移過程に見られるヒステリシス現象を理論的に説明するために、河床波発生臨界値近傍において弱非線型安定解析を行った。非線型振幅方程式を導き、解の分岐形態を知ることによって、遷移過程におけるヒステリシス現象について次の結果を得た。

卓越波数を有する河床波は、遷移過程においてスーパークリティカルな分岐形態を有し、臨界フルード数を超えると消滅する。一方、卓越波数より小さい波数において、サブクリティカルな分岐形態を有する領域が存在する。この波数を有する河床波は、フルード数が増加する過程において、臨界値を超えても、もう 1 つ存在する臨界値 (F_c') に達するまでは消滅しない。これに対してフルード数が減少する過程では、臨界フルード数を下回ったところで卓越波数を有する河床波がはじめて現われることになる。

参考文献

- Engelund, F.: Instability of erodible beds, *J. Fluid Mech.*, 42, 225-244, 1970.
- Fredsoe, J.: On the development of dunes in erodible channels, *J. Fluid Mech.*, 64, 1-16, 1974.
- 石川忠晴: 利根川・江戸川の河道粗度係数について, 土木研究所資料, 第 1943 号, 46, 1983-3.
- Pekeris, C. and Shkoller, B.: Stability of plane Poiseuille flow to periodic disturbances of finite amplitude in the vicinity of the neutral curve, *J. Fluid Mech.*, 29, 31-38, 1967.
- 山口里実, 泉 典洋: 侵食性河床におけるステップ発生の線形安定性理論, 水工学論文集, 第 45 巻, pp.751-756, 2001.
- Kovacs, A. and Parker, G.: A new vectorial bedload formulation and its application to the time evolution of straight river channel, *J. Fluid Mech.*, Vol. 267, pp. 153-183, 1994.

(2001. 10. 1 受付)