

降雨による斜面浸食過程に関する数値解析

NUMERICAL SIMULATION OF HILLSLOPE EROSION CAUSED BY A RAINFALL

関根正人¹・小野 了²

Masato SEKINE and Ryo ONO

1 正会員 工博 早稲田大学教授 理工学部土木工学科 (〒169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1)

2 学生会員 早稲田大学大学院理工学研究科 (現, 東京都下水道局)

A numerical model of hillslope erosion was constructed in the present study. A collapse model was newly developed and introduced so as to keep the local slope angle be equaled to or less than the angle of repose at any time in numerical computation. Also the effect of gravity associated with the slope angle in longitudinal and lateral directions on sediment transport rate was considered. The velocity field of sheet flow emerging on the slope was evaluated by solving the shallow water equations numerically with the aid of the CIP method. The numerical analysis was conducted with focussing on the hillslope erosion process, the effect of vegetation on it, and the sediment yield rate.

Key Words: hillslope erosion, sheet flow, sediment yield, effect of vegetation, collapse model of slope.

1. 序論

山腹斜面にその浸透能力を越えた強度の降雨が継続すると, その表面にシートフローが発生する。この流れが斜面を構成する土砂の移動を引き起こす規模にまで発達すると, 斜面の浸食が生じるようになり, やがては「リル (Rill)」として知られる水みちが形成されることがある。さらに大規模なものとして「ガリ (Gully)」と呼ばれるものにまで到ることもあるが, いずれにしてもこのような水みちが形成されると, 斜面から大量の土砂が浸食・運搬されることになり, 結果として斜面下流端からの顕著な「土砂生産」が引き起こされることになる。このような現象は, その表層土壌の保持とそれに伴う植生の維持という観点から重要であるばかりでなく, このように生産された土砂が隣接する河川上流部に流入し, これが下流へと輸送されるため, 土砂収支上直接的な影響をもつ。近年の重要課題である「水系一環土砂管理」について考えるとき, この生産土砂量の評価は今後速やかに検討していくべき問題のひとつといえよう。さらに, 傾斜地に開かれた農地では, 雨水により引き起こされた流れが肥沃な表層土壌を浸

食・流失させるという問題を生んでおり, 規模こそ小さいものの, これも前述の山腹斜面浸食と同様に本研究で対象の一つとして注目する現象である。

さて, このような山腹斜面浸食に関する研究についてふりかえると, Horton¹⁾の研究にまで遡る。以後, 数多くの研究が進められ, わが国では澤井²⁾による示唆に富んだ実験結果が報告されており, その後の研究に強い影響を与えた。さらに, 近年のWillgooseら³⁾や泉・Parker^{4),5)}をはじめとしたいくつかのグループによる精力的な研究を通じて, 流域内のチャンネル・ネットワークの形成に関する理解が深められつつある。一方, 村上ら⁶⁾は, このような斜面からの土壌浸食・流出の問題に主眼をおいた研究が進められ, 流域規模での解析モデルならびにその結果が示されており大変興味深い。本研究では, こうした従来研究から得られた知見と著者ら⁷⁾の模型実験の結果を踏まえて, このような斜面浸食過程を数値的に再現するモデルの開発を行った。

ここで提示するモデルは, 現象の素過程を微視的にかつできる限り力学法則に忠実に再現することに主眼をおいて開発された。このため, 現在のコンピュータで実流域スケールの生産土砂量を評価するに

は、その計算負荷が大きすぎるという問題点を抱えている。さて、本モデルの概要をまとめると、次のようになる。まず、斜面の浸食計算を進める際に仮想的に現れることのある「局所的に安息角を越える斜面」を合理的に取り扱う力学モデルを新たに開発し、これを組み込むとともに、縦横断方向へ傾斜した斜面上での土砂移動量を評価する際に、重力の影響を適切に考慮できるように留意した。また、地表を流れる水については、水深の小さいいわゆるシートフローとなるため、これを浅水流方程式に基づき解くことで評価しているが、この際に近年精度の高い計算法として利用されるようになったCIP法⁸⁾を適用している。ただし、地表面下で生じる浸透流については、ここでは考慮していない。このことは、本研究で目的とする現象の再現という点から見れば深刻な影響を及ぼすことはないと推測されるが、今後さらに検討していく必要があると考えている。

さらに、本研究では、モデル斜面を対象とした斜面浸食過程の数値実験を行い、そのプロセスの力学的理解を深めるのみならず、斜面上に繁茂する樹木がこの浸食過程に及ぼす影響についても検討を進めており、その結果についても簡単に説明する。

2. 解析モデルの概要

(1) 流れ場の解析

流れ場に関しては、本研究では地表面流のみを対象として解析し、地表面下への雨水の浸透ならびに浸透流に関しては取り扱わない。ただし、連続式において考慮することになる降雨強度 r_e は、少なくとも実際の強度から土壌の浸透能分を差し引いた値として捉えることなどが必要となる。この影響の詳細については今後の課題とする。さて、地表面流の解析は、降り続く降雨によって時間とともに変化するとともに、水深が非常に小さな流れになることなどから、以下に示すいわゆる非定常浅水流方程式に基づいて解析を進めることにした。

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} &= r_e \\ \frac{\partial M}{\partial t} + u \frac{\partial M}{\partial x} + v \frac{\partial M}{\partial y} \\ &= -gh \frac{\partial h}{\partial x} - c_f \sqrt{u^2 + v^2} u + \nu_t \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} \\ &= -gh \frac{\partial h}{\partial y} - c_f \sqrt{u^2 + v^2} v + \nu_t \left(\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (1 \text{ a, b, c})$$

ここに、斜面の上端を原点として流下方向に x 軸、横断方向に y 軸をとるものとする。また、水深と各方向への平均流速との積をそれぞれ $M \equiv h \times u$ 、 $N \equiv h \times v$ と定義する。抵抗係数 c_f については、シートフローに関する澤井²⁾の研究成果を参考にして与えることにした。計算に当たっては、Staggered格子を用いて計算領域を覆うことにし、基礎式の離散化にはAdams-Bashforth Schemeを、運動方程式の移流項の取り扱いに関してはCIP法を用いることにした。拡散項に関しては、通常の流れと同様の取り扱いをすることにし、その拡散係数 ν_t を各格子点上の水深ならび摩擦速度の積に比例するものとして評価した。

(2) 流砂量の評価

本研究では、縦横断方向に安息角に近い角度まで傾斜する斜面上の土砂移動まで取り扱えるような、掃流砂量式を適用する必要がある。これに関して、近年Kovacs and Parker⁹⁾がBagnoldの仮説に依拠した式を提案している。しかし、この仮説に関連して疑問点が指摘されており¹⁰⁾、しかも著者らによる検討が未だに進められつつあることなどから、現段階でこれを適用することは控えることにした。そこで、ここでは彼らの考え方を参考にしつつも、次のような取り扱いに止めることにした。すなわち、掃流砂量ベクトルの大きさと掃流力との関係についてはMeyer-Peter and Mullerの式

$$|\vec{q}_B| = 8 \times \sqrt{RgD^3} (\tau^* - \tau_c^*)^{3/2} \quad (2)$$

によって近似するものとし、その方向ベクトルについては勾配の影響を考慮して、土粒子に働く力の釣り合い条件から評価することにした。ここに、 D は粒径、 R はその水中比重であり、 τ^* および τ_c^* は無次元掃流力ならびに無次元限界掃流力である。

滑動形式の運動を想定した場合の土砂の力の釣り合い式は、次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho C_D \frac{\pi D^2}{4} |\vec{u}_b - \vec{u}_p| (\vec{u}_b - \vec{u}_p) + \rho Rg \frac{\pi D^3}{6} \vec{n}_{gt} \\ - \mu \rho Rg \frac{\pi D^3}{6} n_{g3} \vec{n}_p = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、 ρ は水の密度、 μ は摩擦係数を表す。また、 $\vec{u}_b$ は底面近傍の流速ベクトル、 $\vec{u}_p$ は土粒子の移動速度ベクトル、 $\vec{n}_p$ は後者の単位ベクトルをそれぞれ表す。さらに、重力の単位ベクトル $\vec{n}_g$ を

$$\begin{aligned} \vec{n}_g &\equiv \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha + \tan^2 \omega}} \times (\tan \alpha, \tan \omega, 1) \\ &\equiv (n_{g1}, n_{g2}, n_{g3}) \end{aligned} \quad (4)$$

のように定義し、このうち斜面上の二成分からなる

方向ベクトルを $\vec{n}_{gt} \equiv (n_{g1}, n_{g2})$ とする。なお、 $\tan \alpha$ ならびに $\tan \omega$ は斜面の縦横断方向勾配を表す。さて、いま、式 (3) 中の速度 $\vec{u}_b$ および $\vec{u}_p$ を $\sqrt{RgD}$ で除して無次元量 $\vec{u}_b$ および $\vec{u}_p$ とし、簡単な変形の後に整理すると、次の式を導くことができる。

$$c_f |\vec{u}_b - \vec{u}_p| (\vec{u}_b - \vec{u}_p) + \tau_{co}^* \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{n}_{gt} - n_{g3} \vec{n}_p \right) = 0 \quad (5)$$

式中の τ_{co}^* は水平床における土砂の無次元限界掃流力を表し、式 (3) において斜面勾配ならびに土砂の移動速度を 0 とすることで誘導されるものである。

また、式 (2) に現れる無次元限界掃流力 τ_c^* は、式 (3) において土砂の移動速度のみを 0 とした関係式から、前述の τ_{co}^* との関係で次式により与えられる。

$$\left(\frac{\tau_c^*}{\tau_{co}^*} \cos \phi_r + \frac{1}{\mu} n_{g1} \right)^2 + \left(\frac{\tau_c^*}{\tau_{co}^*} \sin \phi_r + \frac{1}{\mu} n_{g2} \right)^2 = n_{g3}^2 \quad (6)$$

ここに、 ϕ_r は作用流速に関する方向角であり、 $\tan \phi_r \equiv v_b/u_b$ により定義される。

このように、式 (6) を数値的に解くことで τ_c^* を求め、これと各点における掃流力とから、掃流砂量ベクトルの大きさを式 (2) より求める。次に、式 (5) を逐次近似法を用い、 $\tan \phi_p \equiv v_p/u_p \equiv q_{By}/q_{Bx}$ により定義される ϕ_p について解くことで、掃流砂量ベクトルの各方向ベクトルが定まる。そこで、掃流砂量は、斜面流下方向ならびに横断方向にそれぞれ

$$q_{Bx} = |\vec{q}_B| \times \cos \phi_p; \quad q_{By} = |\vec{q}_B| \times \sin \phi_p \quad (7)$$

により算定できる。

(3) 斜面崩落モデル

斜面高の時空間変化予測は、土砂の連続式 (いわゆる Exner の式) に基づいて行われ、これを離散化して考えると、隣接する格子点において評価された単位幅流砂量との関係で定量化することができる。一般に、河床変動計算では、局所的な地形勾配が安息角に等しいかあるいはこれを越えるような場合を対象とすることは稀であるため、この土砂の連続式を解く際には、前節で検討した関数などから評価される流砂量のみを考慮に入れば十分である。しかし、河岸浸食の進行^{11),12),13)}や砂州の前縁部の移動などを適切に評価しなければならない計算の場合には、計算上仮想的に現れる安息角を越える斜面を別途処理することが必要となる。このような処理方法としては、長谷川による崩落・堆積モデル¹⁴⁾があり、これまでにもこの考え方による数値解析がしばしば行われてきた^{11),12)}。このモデルは、そもそも鉛直二次元の場で生じる河岸浸食過程を対象として考案されたものであり、局所的に安息角を越える斜面が出現した場合には、安息角で傾いた崩落面を

定め、その上方にある土塊が下方に瞬時に移動・堆積するものとして新たな斜面形状を幾何学的に決定する方法をとっている。しかし、本研究で対象とする斜面浸食過程においては、斜面全域で安息角を越える斜面が出現する可能性があり、しかも極めて三次元性が強い場合、崩落が生じる方向まで合理的に定めなければならないという複雑さを有する。本研究では、このような斜面崩落を三次元的に処理する新たなモデルの開発を行うことで、複雑に進行する斜面浸食の数値模擬を可能にしている。以下に、そのモデルの概略を説明する。

いま、概念図である図-1の点Oを中心とする斜面群に対して考える。まず、最初に、格子点Oを原点としてその周りに広がる各斜面 (各象限) に対して、そこに現れる最急勾配の値ならびにその方向を以下のように求める。格子点については、崩壊の有無を斜面上端から順次検索していくことにし、下り勾配の斜面のみを対象として説明する。いま、図-1に示されるような斜面を例に最急勾配の方向について考える。図-1における線分NE上の点Sは、 s^* を媒介変数 ($0 \leq s^* \leq 1$) として

$$\begin{aligned} \vec{OS} &= s^* \vec{OE} + (1-s^*) \vec{ON} \\ &= (s^* \Delta x, (1-s^*) \Delta y, s^* z_e + (1-s^*) z_n) \end{aligned} \quad (8)$$

のように表される。ここに、 $z_e = \eta_{i+1,j} - \eta_{i,j} < 0$ 、 $z_n = \eta_{i,j+1} - \eta_{i,j} < 0$ である。なお、点EおよびNは点Oに隣接する格子点であり、下付のiおよびjは格子点番号を表す。さらに、水平面ON'E'とこのOSとのなす角 (俯角を正とする) を ψ とすると、勾配 $\tan \psi$ は、

$$\tan \psi = -\frac{|\vec{S'S}|}{|\vec{OS'}|} = -\frac{s^* z_e + (1-s^*) z_n}{\sqrt{(s^* \Delta x)^2 + ((1-s^*) \Delta y)^2}} \quad (9)$$

となる。そこで、この勾配が最大となる s^* ならびに最急勾配を求めると、次のようになる。

$$s^* = \frac{(\Delta y)^2 z_e}{(\Delta x)^2 z_n + (\Delta y)^2 z_e} \quad (10)$$

$$\tan \psi = \sqrt{\tan^2 \alpha + \tan^2 \omega} \quad (11)$$

ここに、斜面の縦断方向および横断方向の局所的な勾配は、 $\tan \alpha = -z_e/\Delta x$ ならびに $\tan \omega = -z_n/\Delta y$ と表される。そこで、式 (11) で表される最急勾配が水中安息角に対して定まる $\tan \phi$ (すなわち静止摩擦係数) より大きくなるならば、その最急勾配の方向に向かって崩落が生じるものと考え。まず、この崩落土砂量は次のようにして評価する。すなわち、崩落により最急勾配が $\tan \phi$ に等しい斜面へと変わるためには、図-1において見かけ上点Oが点O*の位置まで相対的に低下してくるような地形変化が生じると考えることができる。そして、この場合の点Oにお

ける鉛直方向変位量は,

$$\begin{aligned}\epsilon &= |\vec{OS'}| \times (\tan \psi - \tan \phi) \\ &= \sqrt{(s^* \Delta x)^2 + (1 - s^*)^2 (\Delta y)^2} \times (\tan \psi - \tan \phi) \quad (12)\end{aligned}$$

となる. さらに, このような変化に対応して生産される土砂量は, 幾何学的に次のように表される.

$$V = (\epsilon \Delta x \Delta y) / 6 \quad (13)$$

いま, このような崩落によって生産された土砂が, 最急勾配の方向に輸送されるものと考え, これを二点 $O-E$ 間ならびに $O-N$ 間の中央に設けられた計算格子における単位時間・単位幅当たりの付加的な流砂量として評価することにすれば, 各方向への値は次式により定めることができる.

$$\begin{aligned}q_{xCollapse} &= \frac{(1 - \lambda) V \cos \theta}{\Delta t \Delta y} \\ q_{yCollapse} &= \frac{(1 - \lambda) V \sin \theta}{\Delta t \Delta x} \\ \theta &= \arctan \left(\frac{(1 - s^*) \Delta y}{s^* \Delta x} \right) = \arctan \left(\frac{\tan \omega}{\tan \alpha} \right) \quad (14 \text{ a, b, c})\end{aligned}$$

本解析では, 計算の途中に仮想的に安息角を越えるような斜面が出現する場合には, 前章で誘導した掃流砂量関数によって評価される単位幅流砂量ベクトルの各方向成分に, 式 (14) による流砂量成分を加えることで, 新たな時間の斜面高の更新をしていくことにした. なお, このような取り扱いの基本的な考え方は前報¹³⁾におけるものと同一であるが, ここではそれをさらに発展させたものを用いている.

(4) 数値実験の設定条件

本研究では, 河川上流部に広がる山腹斜面, とりわけその崩壊地などで生じている浸食過程を数値的に再現することを最終的な目標としている. 本論文では, その解析の第一歩として, 「実験室内のモデル斜面において観察される程度の規模」の現象を対象とした数値実験を行い, 斜面浸食の素過程と水みちの発達過程とに焦点を絞って考察を行う.

具体的な計算領域としては, 流下方向に 4 m, 横断方向に 0.8 m の規模を持ち, 平均的には 10° の傾きをもつ斜面を対象とする. 斜面構成材料は $D=0.5$ (mm) の均一材料とする. また, 降雨強度は浸透能力を差し引いた量として $r_e = 20$ (mm/hr) とした. ここでは, 斜面上端から 0.5 m のラインを境にして, これより上方では降雨がなく, これ以下の区域では一様な雨が降り続くものとした. また, 計算格子は 2 cm 四方の正方メッシュとし, これによって全領域を覆うものとした. 境界条件については, 次のように設定した. すなわち, 斜面の上流端境界を分水嶺

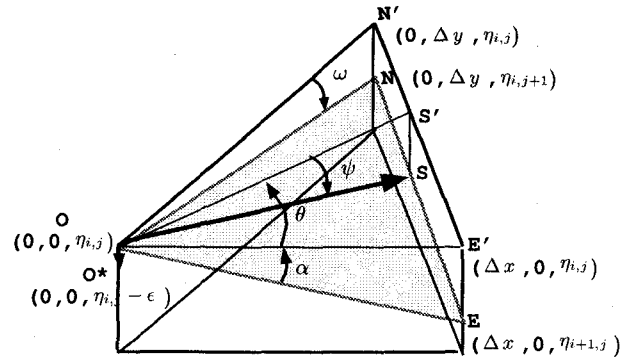


図 - 1 斜面崩落モデルの概念図

とし, 左右の両境界には周期境界条件を適用し, この一方の境界を横切って流出した水ならびに土砂は, もう一方の境界を横切って同一の計算領域内に流入するものとした. さらに, 下流端境界においては, この前後における水面ならびに河床面の高さの時間変化が縦断的に均一に進行するものと仮定し, 下流端における水面ならびに河床面の高さを上下させることとした. 初期条件としては, 斜面に粒径規模の凹凸を擾乱として与えることにし, 一様乱数を利用してこの擾乱を生起させた. ここでは粒径の 3 倍を上限とした凹凸を与えた結果を示すが, この凹凸の規模が結果に与える影響については別の機会に報告する. 斜面上の水深に関しては, 初期状態として Dry Condition を採用した. なお, 任意時刻における水深がある限界以下である場合には, 土砂移動を引き起こすほどの流れが発達していないものとして取り扱った. ここでは, その限界値として斜面構成材料の粒径の 1/4 程度とした.

次章では, 主として裸地状態を対象とした解析結果について説明するが, ここに所定の密度 (ここでは, 樹木の幹の総面積が斜面に対して占める比率を 1 ~ 3 % とした) で樹木 (おもに針葉樹) が繁茂した森林を対象とした計算も試みている. 後者の場合には, 計算格子規模の樹木がランダムに配置されているものとし, 樹木表面で Non-Slip 条件ならびにこれを通過する流れがないものとして計算している.

3. 斜面浸食過程

裸地斜面を対象とした計算結果を図-2に示す. 図-2は, 斜面が浸食されていく過程を時間の経過とともに示したものであり, 上段には 10° で傾いた基準斜面の高さからの斜面高の差を, また, 下段では水深の, それぞれ等値線図を示してある. この図よりわかる通り, 降雨が始まる上記の境界の下流側から浸食が始まり, それが下流に向かって延びつつ発達していくことがわかる. これは, 著者らの実験にお

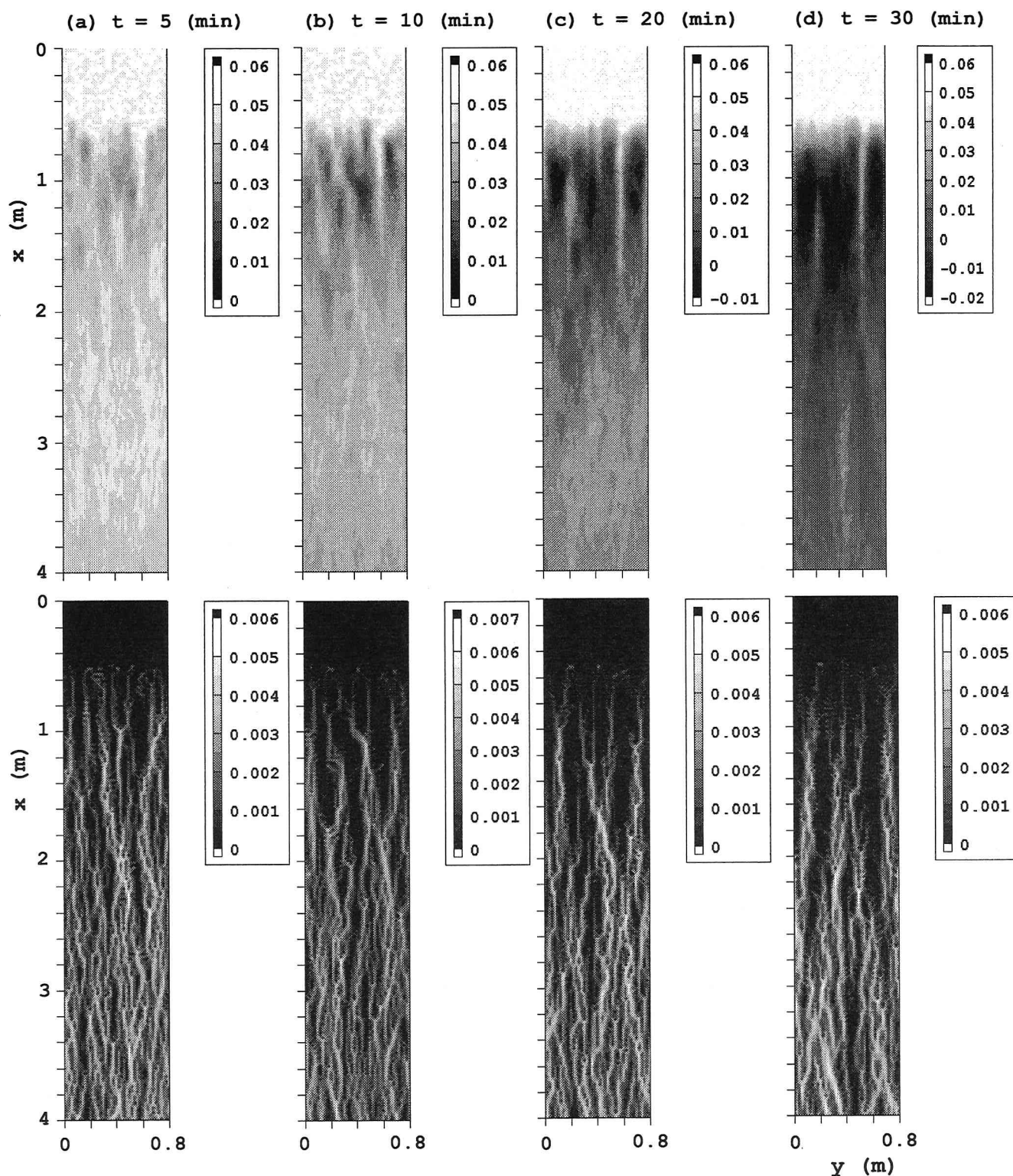


図 - 2 裸地斜面浸食の数値計算結果: 数値は m 単位
上段: 斜面高 (一様に傾斜した基準斜面からの差) の等値線図, 下段: 水深の等値線図

いて、復帰流が生じる区域の下流側で顕著な浸食が生じ、さらにその下流側に向けて水みちが発達するきっかけとなっていたことと類似のプロセスであると考えられる。これに伴い生産された土砂は斜面下流側に堆積した後、再び浸食を受け、斜面下端から流出していく。また、水深の等値線図から流況を判断すると、細かな水みちが網状に発達するとともに

、時間の経過とともにこれがまとまりを見せ、その本数がゆるやかに減少していくことも理解される。さらに、浸食が著しい $x = 1 \sim 2$ (m) 付近では、大規模な流路が 2 ないし 3 本ほど形成されており、別途描いた横断面図から判断すると、この部分では側岸が局所的に安息角に近い斜面からなっていることが確認された。このように、ここで再現された浸食

過程が、実験時に観察されたものとほぼ同様のものであることがわかり、このような数値解析方法によって、定性的には裸地斜面の浸食過程を再現できるものと判断している。しかし、厳密な意味での本モデルの妥当性の検証には、実験データ等との定量的な比較検討が不可欠であることはいうまでもなく、これについては、今後の課題として別の機会に詳しく報告することにしたい。

次に、樹木を配した模擬森林斜面に関する数値実験の結果について、簡単に触れておくことにする。定性的に言うならば、樹木の近傍でこれを避ける比較的流速の大きな流れが形成され、この流れが集中した区域で規模の大きな浸食が引き起こされた。その結果、斜面全体としてみると、樹木がない裸地の場合に比べてむしろ顕著な浸食を受ける結果となった。また、形成される流路は樹木の間を縫うように発達し、その規模は相対的に大きなものとなった。ただし、一般に、樹木が斜面浸食に及ぼす影響としては、平均的に見た場合に表面流速が低下することや、降雨遮断（特に広葉樹の場合）に加えて、毛根や落葉などによって発揮される耐浸食性の向上などが挙げられる。このうち、本計算においては、斜面表面近傍における幹（本モデルにおいては杭と同等）による流水抵抗分のみを考慮に入れたに過ぎず、森林斜面の浸食過程を再現するには今後更なる検討が必要である。

4. 結論

本研究では、降雨による斜面浸食過程を数値的に模擬することを目的として、解析モデルの構築を試みた。モデルに当たっては、斜面の局所的な縦横断方向の勾配が安息角にまで到る可能性のある現象を合理的に再現できるものであることを目指した。さらに、このモデルを用いた数値実験を行い、その結果を基に斜面浸食過程に関する考察を行ったところ、定性的には、実験室内のモデル斜面で観察されたものと同一の現象が再現されているとの結果を得ることができた。

今後の課題としては、森林で覆われた斜面からの土壌浸食をさらに合理的に数値模擬できるように改良を加えていくとともに、実流域規模の斜面から流出する生産土砂量をこのようなモデルでどこまで予測できるのか、という工学的に最も重要な問題についても検討していきたいと考えている。そのために

は、計算結果の定量的な妥当性の検証が不可欠であり、この点を含めて更なる検討を進めていきたいと考えている。

参考文献

- 1) Horton, R. E. Erosional development of streams and their rainage basins - Hydrophysical approach to quantitative morphology-, Geol. Soc. Am. Bull., 56, 275-370, 1945.
- 2) 澤井健二：粘着性流路床の変動機構に関する土砂水理学的研究，京都大学学位論文，1977.
- 3) Willgoose, G. R., R. L. Bras and I. Rodriguez-Iturbe : A physically based coupled network growth and hillslope evolution model, 1, Theory, Water Resources Research, 27(7), 1671-1684, 1991.
- 4) 泉 典洋・パーカー，ゲーリー：チャンネルネットワークの初期形成機構，水工学論文集第38巻，pp.203 - 208，1994.
- 5) 泉 典洋・Gary Parker：斜面下流端から発生する水路群について，土木学会論文集，No.521/Ⅱ-32，pp.79 - 91，1995.
- 6) 村上正吾・林 誠二・渡辺正孝：降雨による農地斜面からの土壌流出モデルに関する基礎的研究，水工学論文集，第44巻，pp.699-704，2000.
- 7) 関根正人・金尾昌広：裸地斜面における流路網形成とそれに伴う土砂生産：水工学論文集，第40巻，pp.849-854，1996.
- 8) 矢部 孝・観山正見・梶島成治：パソコンによるシミュレーション物理，朝倉書店，1992.
- 9) Kovacs, A. and Gary Parker : A new vectorial bedload formulation and its application to the time evolution of straight river channels, Journal of Fluid Mechanics, 267, pp.153-183, 1994.
- 10) たとえば，水理委員会共同研究グループ（芦田和男・江頭進治ら）：固液混相流における支配方程式とその適用性，水工学論文集，第39巻，pp.537-550，1995.
- 11) 清水康行・平野道夫・渡邊康玄：河岸侵食と自由蛇行の数値計算，水工学論文集，第40巻，pp.921-926，1996.
- 12) 長田信寿・細田 尚・村本嘉雄・Md Munsur Rahman：移動一般座標系による側岸侵食を伴う河道変動の数値解析，水工学論文集，第40巻，pp.927-932，1996.
- 13) 関根正人：側岸浸食機構を考慮した河川の流路変動に関する基礎的研究，土木学会論文集，No.533/Ⅱ-34，pp.51-59，1996.
- 14) 長谷川和義：非平衡性を考慮した側岸侵食量式に関する研究，土木学会論文報告集，第316号，pp.37-50，1981.

(2001. 10. 1受付)