

三次元個別要素法による数値移動床の一般化

GENERALIZED MOBILE BED SIMULATOR
BY USING 3D DISTINCT ELEMENT METHOD

後藤仁志¹・原田英治²・酒井哲郎³

Hitoshi GOTOH, Eiji HARADA and Tetsuo SAKAI

¹正会員 工博 京都大学助教授 工学研究科土木工学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

²正会員 工博 日本学術振興会特別研究員 京都大学工学研究科土木工学専攻 (同上)

³フェロー 工博 京都大学教授 工学研究科土木工学専攻 (同上)

The vertical 2D movable bed simulator, which has been a key tool of the computational mechanics of sediment transport, has a limitation in describing some of details of sediment transport phenomena. Because all of sediment particles have their center of gravity on the same vertical plane, the 2D model cannot describe the effect of the particles existing in an external space of the calculated vertical plane. This limitation of 2D model brings some problems, which comes from a geometrical arrangement of particles, especially on the simulation of grain sorting. The framework of 3D movable bed simulator, which is based on the distinct element method, is shown herein. A dam-up process of sediment body moving on a uniform slope by fixed vertical columns is simulated to show some part of performance of the present model.

Key Words: sediment transport, 3D Movable Bed Simulator, computational mechanics, Distinct Element Method

1. 緒言

移動床を微視的に見ると、『粒』の集合体としての特性が際立って見えてくる。いわゆる『数値移動床』は、『粒』の集合体としての移動床の本質的特性である粒子間衝突を直接記述することにより、計算力学的な観点からの移動床水理学の進展に貢献してきた。言うまでもなく、移動床の数値モデルを考える上で最も重要な観点は『粒状体か連続体か』ということであり、従来用いられてきた鉛直二次元個別要素法を基礎とした数値移動床が『粒状体』という移動床の本質を記述するために適切なモデルであったことには疑念がないと著者らは考えている。鉛直二次元数値移動床は、移動床上を運動する saltation 粒子の見かけの反発係数、シートフロー状の運動を呈する高濃度粒子流の流動機構など、粒子間衝突に構造を支配される場において個々の砂粒子の運動機構に忠実なモデルであり、均一砂¹⁾は言うまでもなく、混合砂の分級現象²⁾に対しても、一定の説明力を発揮してきた。

その一方で、実現象はあくまで三次元的であり、現象により忠実にという理想を追及すると三次元モ

デルが必要となる。三次元化に際してのプログラミング的な対応が比較的容易であるにもかかわらず、個別要素法の三次元化がそれほど活発化しなかったのは、離散型モデルの宿命とも言うべき計算負荷の高さに拠るところが大きい。ところが、近年、計算機の低廉化と高速化が進行し、比較的短時間の現象を対象にすれば、数万の粒子を対象とした計算がパーソナルコンピュータでも実行できるようになってきた。このような計算環境の変化が、三次元化への敷居を急速に低くしつつあるのが現状である。

鉛直二次元数値移動床には、解析対象面(鉛直二次元平面)外部の粒子からの影響を合理的に評価できないという弱点がある。換言すると、鉛直二次元では全ての粒子が同一平面内で接触することとなるが、このことと現実との乖離は明らかである。砂粒子が鉛直二次元平面内に拘束されると運動の自由度が低くなり、粒子間衝突の発生頻度が増大し、結果として流動抵抗が増大すると考えられる。また、粒子堆積層に関しても、とりわけ均一粒径では、規則的で剛な(変形抵抗が大きい)配列が形成されやすく、粒子層の場所的な粗密にコントラストが付き易い。このような粒子配列の粗密に原因が求められる

現象への数値移動床の適用（例えば、数値移動床による砂面初期擾乱の解析（後藤ら³⁾））に際しては、粒子配列の不均質性の影響が過大に評価されている可能性が懸念される。また、混合粒径では、何れの粒径階に属する粒子も同一面内接触するという前提で解析されるが、大粒径の周囲には小粒径の三次元的な（鉛直面外）接触が存在するはずであり、その影響を適正に評価するには、三次元モデルが必要となる。

本研究では、このような認識から、これまで数値流砂水理学の研究ツールとして用いてきた鉛直二次元数値移動床を三次元に拡張するための基礎的なフレームワークを行って、円柱障害物群による崩壊土砂流の堰止め過程への適用結果を示す。

2. 個別要素法の三次元表記

(1) 粒子の運動方程式

個々の粒子の運動は、隣接粒子との接触力に起因する並進および回転の運動方程式

$$\begin{bmatrix} \Delta \ddot{x}_i \\ \Delta \ddot{y}_i \\ \Delta \ddot{z}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{xi}/M_i \\ F_{yi}/M_i \\ F_{zi}/M_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \ddot{\phi}_{xi} \\ \Delta \ddot{\phi}_{yi} \\ \Delta \ddot{\phi}_{zi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{xi}/I_i \\ T_{yi}/I_i \\ T_{zi}/I_i \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$M_i = \frac{\sigma \pi d_i^3}{6} ; \quad I_i = \frac{\sigma \pi d_i^5}{60} \quad (3)$$

で記述される。ここに、 $(x_i, y_i, z_i), (\phi_{xi}, \phi_{yi}, \phi_{zi})$ ：グローバル座標系 (x, y, z) 上での粒子 i の位置と回転角、 (F_x, F_y, F_z) ：グローバル座標系 (x, y, z) 上での粒子間接触力、 M_i ：粒子 i の質量、 (T_x, T_y, T_z) ：グローバル座標系 (x, y, z) 上での粒子間作用モーメント、 I_i ：粒子 i の慣性モーメント、 g ：重力加速度、 σ ：粒子の密度である。

(2) ローカル座標系

粒子間接触力に関しては、図-1に示すローカル座標系 (ξ, η, ζ) に変換して、2粒子間接触平面の法線方向成分および接平面内2成分について、2次元モデルと同様にバネ-ダッシュポットを配置してモデル化する。粒子 i および j が接触している状態を想定する。ローカル座標系の座標軸の定義は以下のようにする。粒子 i の中心から粒子 j の中心に向かう方向に ξ_i 軸をとる。 ξ_i 軸を法線する2粒子間接触平面と xy 平面に平行な任意の平面の交線の中で粒子 i の中心を通る軸を η_i 軸として、これら2軸と右手系をなすように

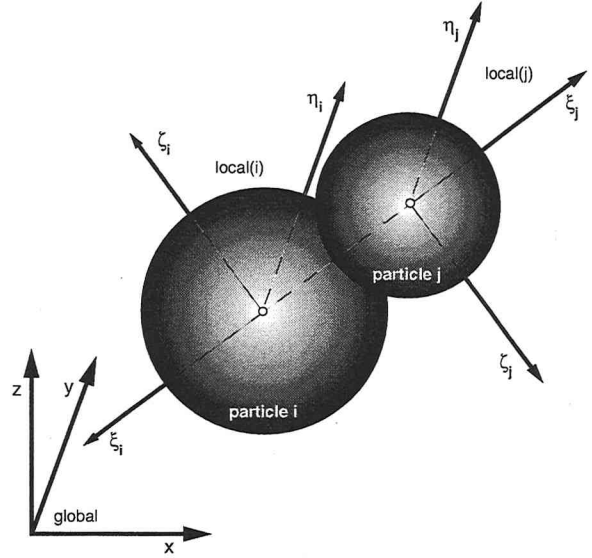


図-1 ローカル座標系

ξ_i 軸をとる。なお、回転変位については、各軸の正方向に右ネジを回す回転を正と定義する。

2次元モデルでは粒子間接触力評価のための座標変換のプロセスも含めた形式で接触力が記述されることが多いが、3次元では変換が複雑となるので基礎式とは分離し、以下のように記述する。

$$\begin{bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{zi} \end{bmatrix} = - \sum_j [T_{GL}]_{ij}^{-1} \begin{bmatrix} F_{\xi} \\ F_{\eta} \\ F_{\zeta} \end{bmatrix}_{ij} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} T_{xi} \\ T_{yi} \\ T_{zi} \end{bmatrix} = - \sum_j [T_{GL}]_{ij}^{-1} \begin{bmatrix} T_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{ij} + \frac{d_i}{2} \sum_j [T_{GL}]_{ij}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ F_{\zeta} \\ -F_{\eta} \end{bmatrix}_{ij} \quad (5)$$

ここに、添え字は各座標軸方向の成分を意味し、座標変換行列 T_{GL} は、 $y_j > y_i$ and $(x_j \neq x_i \text{ or } z_j \neq z_i)$ に対して、

$$[T_{GL}]_{ij} = \begin{bmatrix} l_i & m_i & n_i \\ \frac{-m_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} & \frac{l_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} & 0 \\ \frac{-l_i n_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} & \frac{-m_i n_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} & \sqrt{l_i^2 + m_i^2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$y_j < y_i$ and $(x_j \neq x_i \text{ or } z_j \neq z_i)$ に対して、

$$[T_{GL}]_{ij} = \begin{bmatrix} l_i & m_i & n_i \\ \frac{m_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} & \frac{-l_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} & 0 \\ \frac{l_i n_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} & \frac{m_i n_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} & -\sqrt{l_i^2 + m_i^2} \end{bmatrix} \quad (7)$$

と書ける。ここに、

$$\begin{bmatrix} l_i \\ m_i \\ n_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_j - x_i}{R_{ij}} \\ \frac{y_j - y_i}{R_{ij}} \\ \frac{z_j - z_i}{R_{ij}} \end{bmatrix} \quad (8)$$

であり、 $x_j = x_i$ and $z_j = z_i$ については、

$$[T_{GL}]_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ for } z_i < z_j \quad (9)$$

$$[T_{GL}]_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ for } z_i > z_j \quad (10)$$

と定義する。

(3) 接触判定および接触力評価

粒子の接触判定条件は、粒子 i, j の粒径と中心間距離を参照して、

$$R_{ij} \leq \frac{d_i + d_j}{2} \quad (11)$$

$$R_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \quad (12)$$

によって行う。

粒子間作用力の算定には変位および回転増分が変数として導入されている。グローバル座標系における微小時間 Δt 間の任意の粒子 i の並進増分、回転変位増分($\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$)および($\Delta \phi_{xi}, \Delta \phi_{yi}, \Delta \phi_{zi}$)は、

$$\begin{bmatrix} \Delta \xi_i \\ \Delta \eta_i \\ \Delta \zeta_i \end{bmatrix} = [T_{GL}]_{ij} \begin{bmatrix} \Delta x_i - \Delta x_j \\ \Delta y_i - \Delta y_j \\ \Delta z_i - \Delta z_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \Delta \phi_{\xi i} & \Delta \phi_{\xi j} \\ -\Delta \phi_{\eta i} & -\Delta \phi_{\eta j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d_i}{2} \\ \frac{d_j}{2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \phi_{\xi i} \\ \Delta \phi_{\eta i} \\ \Delta \phi_{\zeta i} \end{bmatrix} = [T_{GL}]_{ij} \begin{bmatrix} \Delta \phi_{xi} \\ \Delta \phi_{yi} \\ \Delta \phi_{zi} \end{bmatrix} \quad (14)$$

によってローカル座標系に変換される。

要素間の接触状態については以下のように取り扱う。要素 i, j の接触面には、法線(ξ 軸)方向および接平面(η 軸および ζ 軸)方向に弾性スプリング(バネ定数 k_n, k_s)および粘性ダッシュポット(粘性定数 c_n, c_s)を配置して相互作用を表現する。なお、接触面における法線(ξ 軸)まわりの回転に対しては、回転角と並進変位の間にアナロジーを想定して、弾性スプリング(バネ定数 k_t)および粘性ダッシュポット(粘性定数 c_t)を配置している。法線方向力(F_ξ)と接線方向力(F_η, F_ζ)およびねじりモーメント(T_t)は、以下のように評価される。

$$\left. \begin{aligned} F_\xi(t) &= e_n(t) + d_n(t) \\ e_n(t) &= e_n(t - \Delta t) + k_n \cdot \Delta \xi_i \\ d_n(t) &= c_n \cdot \Delta \dot{\xi}_i \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} F_\eta(t) &= e_{s\eta}(t) + d_{s\eta}(t) \\ e_{s\eta}(t) &= e_{s\eta}(t - \Delta t) + k_s \cdot \Delta \eta_i \\ d_{s\eta}(t) &= c_s \cdot \Delta \dot{\eta}_i \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} F_\zeta(t) &= e_{s\zeta}(t) + d_{s\zeta}(t) \\ e_{s\zeta}(t) &= e_{s\zeta}(t - \Delta t) + k_s \cdot \Delta \zeta_i \\ d_{s\zeta}(t) &= c_s \cdot \Delta \dot{\zeta}_i \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} T_t(t) &= e_t(t) + d_t(t) \\ e_t(t) &= e_t(t - \Delta t) + k_t \cdot (d_i/2)^2 \cdot \Delta \Phi \\ d_t(t) &= c_t \cdot (d_i/2)^2 \cdot \Delta \dot{\Phi} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\Delta \Phi = [l_i, m_i, n_i] \begin{bmatrix} \Delta \phi_{xi} - \Delta \phi_{xj} \\ \Delta \phi_{yi} - \Delta \phi_{yj} \\ \Delta \phi_{zi} - \Delta \phi_{zj} \end{bmatrix} \quad (19)$$

ここに、 e_n, e_s, e_t : 法線、接平面および回転方向のバネによる抗力、 d_n, d_s, d_t : 法線、接平面および回転方向のダッシュポットによる抗力である。なお、式中の「 $\dot{}$ 」は時間微分を示し、

$$\Delta \dot{\xi} \equiv \Delta \xi / \Delta t \quad (20)$$

で定義される。また、非粘着性材料を対象とすることから、法線(ξ 軸)方向に引っ張りに抵抗しないジョ

イント

$$F_{\xi}(t) = 0 \quad \text{when } e_n(t) < 0 \quad (21)$$

接平面 (η 軸および ζ 軸) 方向に一定の限界を越える力が作用すると滑動するジョイント

$$F_{\eta}(t) = \mu \cdot \text{SIGN}(e_n(t), e_s(t)) \quad \text{when } |e_s(t)| > \mu \cdot e_n(t) \quad (22)$$

$$F_{\zeta}(t) = \mu \cdot \text{SIGN}(e_n(t), e_s(t)) \quad \text{when } |e_s(t)| > \mu \cdot e_n(t) \quad (23)$$

をそれぞれ配置した。ここに、 μ ：接触点における動摩擦係数 ($\mu=0.577$)， $\text{SIGN}(a, b)$ は $|a|$ に b の符号を付けることを意味する。以上のモデルは、基本的には、吉田ら⁴⁾、重松ら⁵⁾と同様のものであるが、基礎式や粒子間接触力評価等のディテールに相違があるので、モデルの構造を厳密に示すために、省略せずに記述した。

モデル定数は、個別要素法で用いる計算時間ステップ $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$ (s) に対して、後藤ら⁶⁾の設定法を用いて、 $k_n = 3.80 \times 10^6$ (N/m)， $k_s = 1.46 \times 10^6$ (N/m)， $\eta_n = 5.14 \times 10^4$ (Ns/m)， $\eta_s = 3.19 \times 10^4$ (Ns/m) のように設定した。なお、本シミュレーションでは、吉田ら⁴⁾と同様に、回転方向のバネ定数 k_r および粘性定数 c_r はゼロとしている。

3. 崩壊土砂の堰止め過程の解析

(1) 計算領域および計算条件

開発したコードの性能確認のため、一様斜面上に円柱状の障害物を配置し、上方から崩壊土砂を流動させて、障害物による堰止め・流動阻止の過程を計算した。計算領域を図-2に示す。水平面に接続した勾配30度の一様斜面（全長 98.0m）の上端部に斜面長20.0mにわたって配置した土砂層（初期層厚 約 10.0m）の崩壊・流下のプロセスを追跡する。斜面には20.0mの側壁が設けられているが、計算結果の表示の際には土塊の運動を見易くするために側壁を取り去っている。なお、本稿では含有水の影響を考慮していないので、乾燥粒状体の流動過程を計算していることとなる。

斜面の下端より斜面に沿って18.0m 登った地点には、円柱群が設置されており、流下してくる土砂層が円柱群に堰止められる過程が計算される。土砂層は混合粒径であり、粒径1.0m, 0.75m, 0.5mの3種の粒子が、1:3:6の比率で一様に混合されるようにランダムにパッキングを行って個々の粒子の初期配置を決定している。土砂層構成粒子数は約4,000個、固定壁

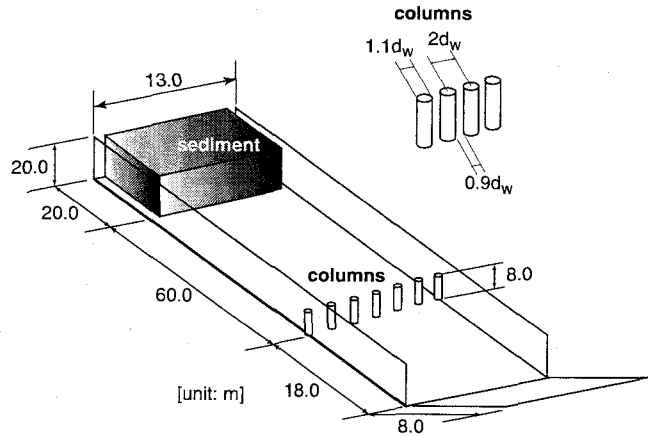


図-2 計算領域

(円柱を含む) 粒子数は2,900個で、総粒子数6,900個となっている。円柱群については、最大粒径1.0m ($=d_w$)よりやや大きい粒径1.1mの粒子を積み重ねて構成し、円柱は2.0m ($=2d_w$)間隔で配置したので、円柱間間隔は0.9m ($=0.9d_w$)となり、最大粒径のみが円柱間を通過できない。さらに、斜面は最大粒径と同一のサイズの粒子を規則配列して構成しており、最大粒径程度の凹凸を有する粗面である。

(2) 円柱群による堰止め過程

図-3は、円柱群による崩壊土砂の堰止め過程を斜め上方から俯瞰したものであり、図-4は、図-3と同様の瞬間を円柱直下流正面から眺めたものである。何れの図においても、縦方向の4枚のスナップショットは、土砂層が円柱群に到達した瞬間（時刻 $t=0.0$ s とする）およびその後の時刻 $t=1.0, 2.0, 4.0$ s の各時刻における状態を示している。

側壁近傍は粒子の移動が拘束されるので低速領域が生じ、側壁から離れるにしたがって粒子の平均移動速度が増加することとなる。このため粒子が斜面中央へと集中して粒子層表面が盛り上がり、粒子層の横断面が蒲鉾型を呈する様子が示されている。

円柱群に堰止められた最大粒径に阻まれて、他の粒径も大部分が円柱群の地点で停止し、円柱間隙から漏れ出す小粒径は僅かである。このケースでは、円柱高さと比較して土砂層厚が大きいので、土砂層上部の粒子群は円柱群上を乗り越えて下流側に到達する。そのため円柱群を乗り越える粒子の中に最大粒径が少なからず存在する。円柱群の乗り越えは、斜面中央付近で顕著で、先に述べたような粒子運動特性（蒲鉾型の横断面）を裏付けている。

計算力学的な方法論の長所の一つは、現地等では観測自体が不可能な（ビデオカメラの設置ができない）場所からも土砂層の流動特性を見ることができると点である。図-4は、その一例を示していると言え

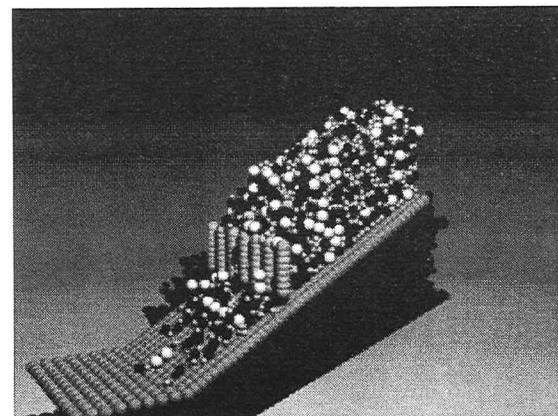
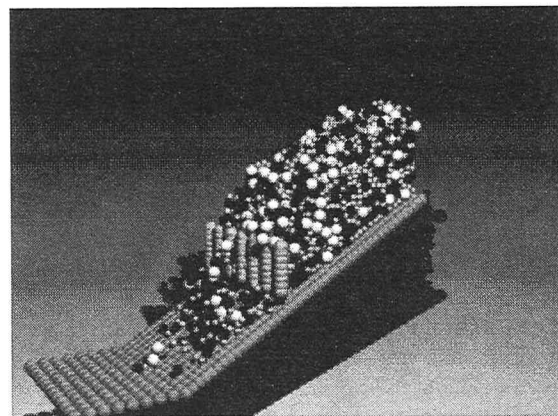
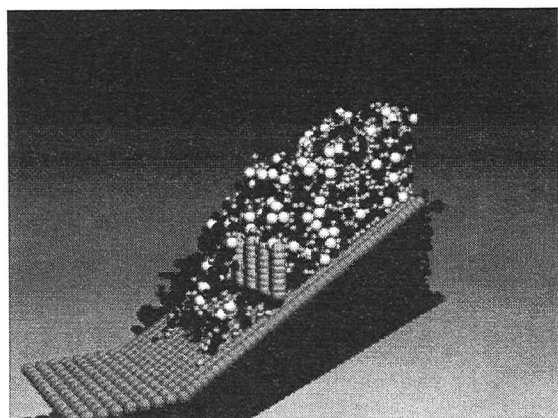
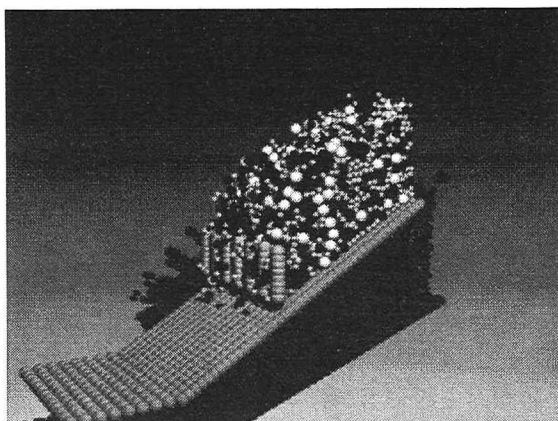


図-3 崩壊土砂の堰止め過程

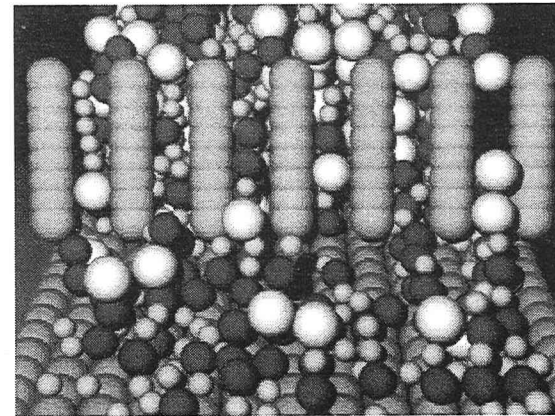
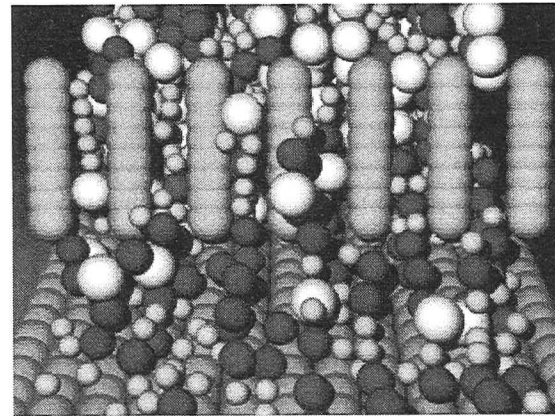
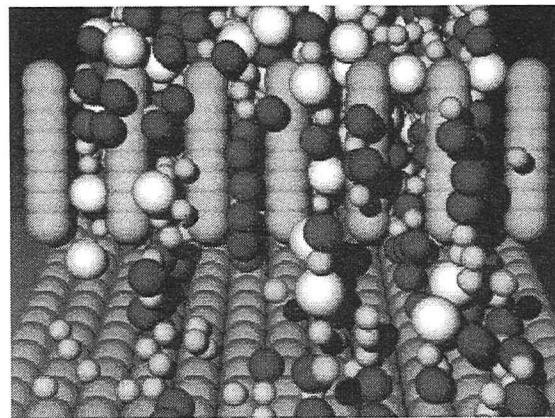
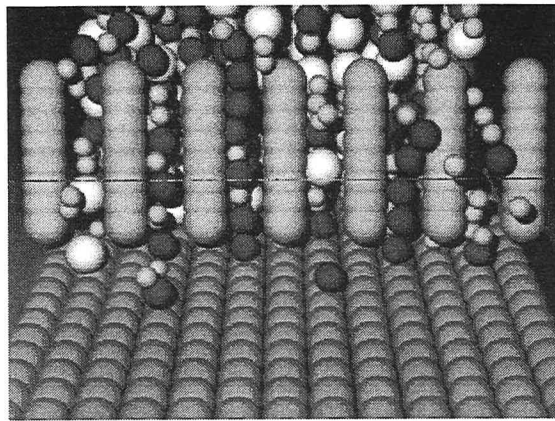


図-4 崩壊土砂の堰止め過程（クローズアップ）

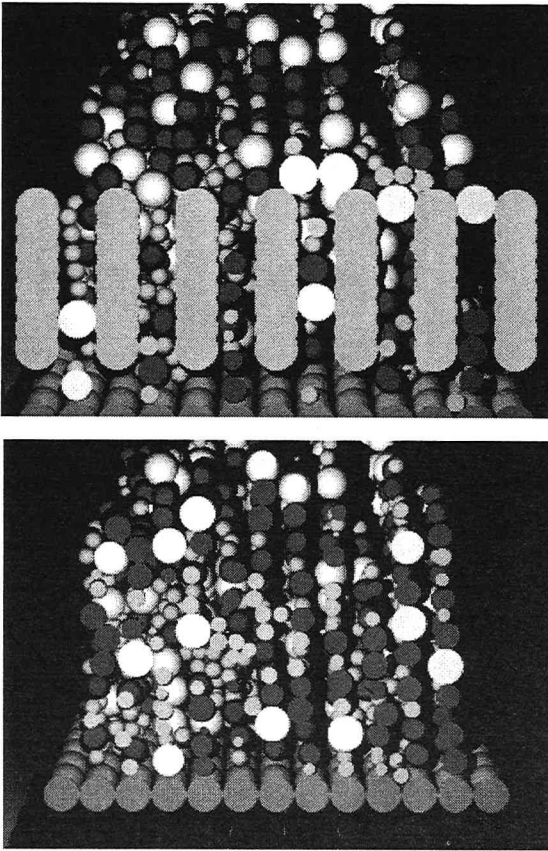


図-5 土砂層横断面

る。土砂流フロントが円柱障害物を乗り越えて氾濫する様子が、臨場感ある画像で示されている。さらに、大粒子による閉塞の状態についても詳細を伺い知ることができる。時刻 $t=2.0$ s (上から3枚目)の右から1番目と2番目の円柱および2番目と3番目の円柱に上端付近に2個の大粒子が挟まって停止している。右から3番目と4番目の円柱の中ほどおよび左端とその右側の円柱の足下付近の間隙にも大粒子が挟まっている。これらの大粒子の捕捉は閉塞域の拡大のきっかけとなる。例えば、右から2番目と3番目の円柱に上端付近に捕捉された大粒子は、その下方の大粒子の運動を妨げて下方に閉塞域を拡大させていく。この大粒子の下方では、大粒子と中粒子が支え合って小アーチを形成し、閉塞が進行していることが分かる(時刻 $t=2.0, 4.0$ s参照)。

(3) 土砂層の内部特性の推定

図-4は観測機材の損傷を覚悟すれば撮影可能かも知れないが、観測や水理実験で見ることがさらに困難な状況も計算力学的な方法論なら容易に見ることができる。図-5は、図-3および図-4の時刻 $t=4.0$ sの瞬間における土砂層の横断面を示している。上部の図は、円柱群の鉛直軸を通る断面で切断して上流側を眺めたもの、下部の図は、円柱群から斜面方向に大粒子の粒径の6倍上流の地点で鉛直方向に切断した

断面の状態を示している。これらの図は光源を手前に設置した状態で描かれているので、切断面が高輝度(薄色に発色すること)となる。図-4に見られた大粒子の捕捉状況がより鮮明に表示されているのが分かる。

流動していない地盤なら地盤探査手法を駆使して掘削せずに内部構造を推定できるが、流動を伴う場合に刻々と変化する土砂層内部の構造を推定する方法は見当たらない。時刻 $t=4.0$ sの斜面中央の横断面図(図-5の下図)では、最大粒径の表層付近への偏在化は流下時間の不足のためか明瞭には確認できないが、さらに計算領域を大きく取って流下時間を十分に確保すれば、逆グレイディングのプロセスを詳細に把握することも視野に入ってくる。

4. 結 語

本研究では、著者らの粒子コードを三次元に拡張し、円柱障害物群による崩壊土砂流の堰止め過程への適用を試みた。計算結果は、斜面中央への土砂の集中等の三次元性を示し、二次元モデルでは再現不可能な特性を探るツールとしての三次元数値移動床の可能性に大いなる示唆を与えるものであった。

ここでは、計算結果のスナップショットを通して、主として定性的な考察を加えるに留まっているが、定量面での検証も行う必要がある。横断面方向の平均粒子移動速度や各鉛直断面間の粒子交換の発生頻度など、3次元性が重要となる局面に関して計算データを整理し、2次元モデルが十分に機能する現象と3次元モデルでなければ説明できない現象の区分を明確化することが肝要であると考えている。

参考文献

- 1) 後藤仁志・酒井哲郎：表層せん断を受ける砂層の動的挙動の数値解析，土木学会論文集，第521号/II-32，pp.101-112，1995。
- 2) 原田英治・後藤仁志・酒井哲郎・羽間義昭：混合粒径流砂の動的粗粒化過程の数値解析，水工学論文集，第45巻，pp.655-660，2001。
- 3) 後藤仁志・原田英治・酒井哲郎：移動床における砂粒子間干渉による砂面擾乱の発生，水工学論文集，第45巻，pp.637-642，2001。
- 4) 吉田 博・枅谷 浩・今井和昭：個別要素法による敷砂上への落石の衝撃特性に関する解析，土木学会論文集，第392号，pp.297-306，1988。
- 5) 重松孝昌・小田一紀・田野雅彦・廣瀬真由：個別要素法による水中沈降粒子群の3次元挙動に関する研究，海岸工学論文集，第47巻，pp.996-1000，2000。
- 6) 後藤仁志・原田英治・酒井哲郎：数値移動床による混合粒径流砂の流送過程のシミュレーション，水工学論文集，第44巻，pp.665-670，2000。

(2001. 10. 1受付)