

共鳴点近傍での波状路床上の開水路流れの 応答特性に関する非線形解析

Non-Linear Analysis on Free Surface Profile of Open Channel Flows
over a Wavy Bed near Resonance Relation

細田 尚*・南元謙一**

Takashi HOSODA and Kenichi MINAMIMOTO

*正会員 工博 京都大学大学院助教授 工学研究科土木工学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

**非会員 工修 (株) 日立システムアンドサービス (〒244-0816 横浜市戸塚区上倉田町341)

Fundamental characteristics of open channel flows over a wavy bed were investigated by using the non-linear analysis of a Boussinesq type depth averaged flow equation. We derived the non-linear algebraic equations on water surface variations based on a Boussinesq type equation, firstly. Then, the non-linear algebraic equations were solved numerically, and the characteristics of response such as the amplitude ratios of water surface to wavy bed variations near a resonance relation were studied by using calculated solutions. It was shown that hysteresis effect can be seen in the relation between amplitude ratios and Froude number with the increase of non-linear parameter such as the ratio of bed variation amplitude and averaged depth.

Key Words : water surface profile, open channel flows, non-linear analysis, resonance relation

1. はじめに

正弦波で表される波状路床上の開水路流れは、小規模河床波上の流れの単純化されたモデルであり、その基本特性に関する知見は、河床波の発達に伴う抵抗の増加、シュート&プールへの遷移などを考察する際有用と考えられる。本研究では、鉛直加速度を考慮した水深積分モデルを用いて、路床と水面形の応答関係に着目した非線形解析を行い、線形理論に見られる共鳴点近傍での路床と水深・水面変動の振幅比や位相差の応答特性について考察する。

例えば、従来の応答特性についての実験結果を用いて振幅比とフルード数の関係を示すと、線形理論の共鳴点（水深・水面振動の振幅と路床の振幅比が極大になる水理量の関係）近傍に実験値が分布しない領域が存在する。本研究では、この共鳴点近傍の応答特性を説明することを目的に、鉛直加速度を考慮した水深積分モデルを用いて非線形解析を行う。

非線形解析手法として、微小な無次元量をパラメータとした摂動法は、1次の解に共鳴関係が存在し適当でない¹⁾。そこで本研究では、解を最低次の三角関数として基礎式に代入して得られる非線形連立方程式を数値的に計算する方法を用いる。

解析結果を考察することにより、例えば振幅比とフルード数の関係を、路床変動がない平坦路床の水理量で整理すると、共鳴点近傍で多価関数になる応答関係（履歴現象またはヒステリシス）が得られること、実験結果に対応する波状の効果による流れの抵抗増加を考慮した水理量で整理すると、共鳴点近

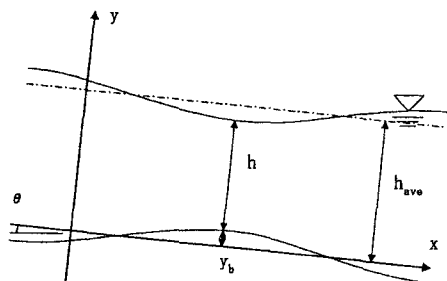


図-1 対象とする現象と座標系

傍で解析結果が存在しないことを示した。

2. 対象とする現象

図-1に示すような波状路床上の開水路流れにおける路床と水深・水面の応答について考える。まず、Yuen・Kennedy²⁾の実験結果を用いて、水深変動と路床変動の振幅比とフルード数の関係を無次元波数 $M \equiv 2\pi/\mu$, $\mu = \lambda/h_0$ (h_0 :平均水深, λ :路床変動の波長) をパラメータとして図-2に示した。次式で示される線形理論の共鳴関係式のフルード数付近で実験値が存在しないことがわかる。(位相差は値が同定できる実験結果が少ないため、示していない。)

$$Fr_0 = \frac{\sqrt{3}}{((2\pi/\mu)^2 + 3)^{1/2}} \quad (1)$$

本研究では、この共鳴点付近の応答特性について

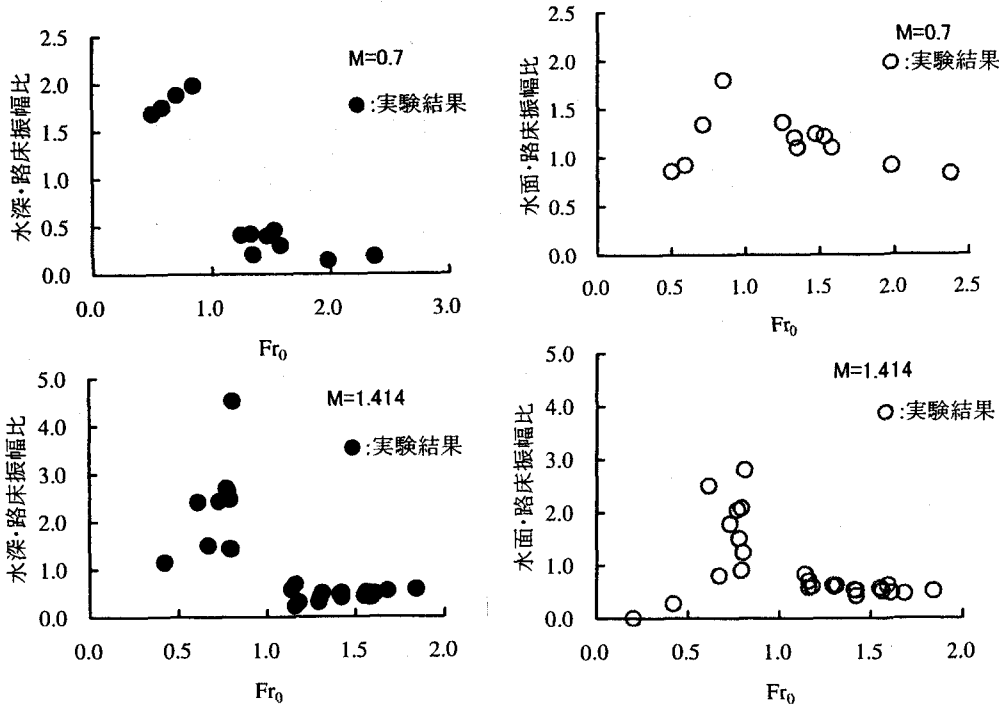


図-2 水深・水面変動と路床変動の振幅比とフルード数の関係

考察する。

$$D = \alpha q, \quad \frac{\tau_{bx}}{\rho} = f \frac{q^2}{h^2} \quad (4)$$

3. 基礎式と非線形解析

3. 1 基礎式

Boussinesqが導いた鉛直加速度を考慮した波状路床上の流れの水面形方程式は、図-1に示した記号を用いて下記のように表される。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} q^2 \frac{d^3 h}{dx^3} - \frac{2}{3} \frac{q^2}{h} \frac{dh}{dx} \frac{d^2 h}{dx^2} + \left(gh \cos \theta - \frac{q^2}{h^2} \right) \frac{dh}{dx} \\ & + \frac{1}{3} \frac{q^2}{h^2} \left(\frac{dh}{dx} \right)^3 - gh \sin \theta + \frac{\tau_{bx}}{\rho} \\ & = -\frac{1}{2} q^2 \frac{d^3 y_b}{dx^3} + \frac{1}{2} \frac{q^2}{h} \frac{dh}{dx} \frac{d^2 y_b}{dx^2} - \frac{q^2}{h} \frac{dy_b}{dx} \frac{d^2 y_b}{dx^2} \\ & - gh \cos \theta \cdot \frac{dy_b}{dx} + \frac{q^2}{h^2} \frac{dh}{dx} \left(\frac{dy_b}{dx} \right)^2 + \frac{d}{dx} \left(-u'^2 h \right) \quad (2) \end{aligned}$$

ここに、 x ：空間座標、 h ：水深、 y_b ： x 軸からの路床高さ、 θ ：水路床勾配、 g ：重力加速度、 q ：単位幅流量、 τ_{bx} ：底面せん断応力ベクトルの x 方向成分、 $\overline{u'^2}$ ：乱れ強さを表す。

右辺最終項は乱れによる運動量輸送項であり、本研究では、簡単のため渦動粘性係数 D を用いて次式で評価する。

$$-\overline{u'^2} = D \frac{d}{dx} \left(\frac{q}{h} \right) \quad (3)$$

渦動粘性係数 D 、および底面せん断応力は次式で評価する。

ここに、 α ：定数、 f ：摩擦損失係数である。

図-3に示した波状路床の振幅 a 、波長 λ および河床が平坦な場合の等流水深 $h_0 = (q^2/g \sin \theta)^{1/3}$ を用いて式(5)に示した無次元量を導入し、基礎式(2)を無次元化すれば式(6)となる。

$$\sigma = \frac{x}{\lambda}, \quad \eta = \frac{h}{h_0}, \quad \delta = \frac{y_b}{a}, \quad \varepsilon = \frac{a}{h_0}, \quad (5)$$

$$\mu = \frac{\lambda}{h_0}, \quad Fr_0 = \frac{q/h_0}{\sqrt{gh_0 \cos \theta}}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \frac{d^3 \eta}{d\sigma^3} - \frac{2}{3} \frac{1}{\eta} \frac{d\eta}{d\sigma} \frac{d^2 \eta}{d\sigma^2} + \mu^2 \left(\frac{\eta}{Fr_0^2} - \frac{1}{\eta^2} \right) \frac{d\eta}{d\sigma} \\ & + \frac{1}{3\eta^2} \left(\frac{d\eta}{d\sigma} \right)^3 - f\mu^3 \left(\eta - \frac{1}{\eta^2} \right) \\ & = -\frac{\varepsilon}{2} \frac{d^3 \delta}{d\sigma^3} + \frac{\varepsilon}{2\eta} \frac{d\eta}{d\sigma} \frac{d^2 \delta}{d\sigma^2} - \frac{\varepsilon^2}{\eta} \frac{d\delta}{d\sigma} \frac{d^2 \delta}{d\sigma^2} - \mu^2 \varepsilon \frac{\eta}{Fr_0^2} \frac{d\delta}{d\sigma} \\ & + \frac{\varepsilon^2}{\eta^2} \frac{d\eta}{d\sigma} \left(\frac{d\delta}{d\sigma} \right)^2 + \alpha\mu \left\{ \frac{1}{\eta^2} \left(\frac{d\eta}{d\sigma} \right)^2 - \frac{1}{\eta} \frac{d^2 \eta}{d\sigma^2} \right\} \quad (6) \end{aligned}$$

3. 2 非線形解析

水深を

$$\eta = 1 + A_1 \cos(2\pi\sigma + \phi_1) + A_{20} + A_{22} \cos(4\pi\sigma + \phi_2) \quad (7)$$

路床変動を

$$\delta = \cos(2\pi\sigma) \quad (8)$$

とにおいて、式(6)に代入して得られた式を $\cos(2\pi\sigma)$ 、 $\sin(2\pi\sigma)$ 、 $\cos(4\pi\sigma)$ 、 $\sin(4\pi\sigma)$ の各項についてまとめ、

$$\begin{aligned} p &= A_1 \cos(\phi_1), \quad q = A_1 \sin(\phi_1), \\ r &= A_{22} \cos(\phi_2), \quad s = A_{22} \sin(\phi_2) \end{aligned}$$

と整理すると、 A_{20} , p , q , r , s に関する関係式が得られる。本研究では r , s に関する関係式は用いないため、 A_{20} , p , q についてののみ示す。

$$\begin{aligned} A_{20} : \\ & -24C_4 A_{20}^3 + 36(2\pi C_1 q - 2C_4) A_{20}^2 \\ & + 18\{2(2\pi)C_1\{(2-r)q + ps\} \\ & + 2C_4(-2-p^2-s^2-r^2-q^2) - E_1(2\pi)^3 q\} A_{20} \\ & + 9\{q^3 + (p^2 + 4 + 2s^2 + 2r^2 - 4r)q + 4ps\}(2\pi)C_1 \\ & + 24(-4s^2 - q^2 - p^2 - 4r^2)(2\pi)^2 C_3 \\ & + 18\{(-2+r)q^2 - 2pqs + (-r-2)p^2 - 2s^2 - 2r^2\} C_4 \quad (9) \\ & + 9\{(-2+r)q - ps\}(2\pi)^3 E_1 - 18E_2(2\pi)^3 s \\ & + 36(-q^2 s - 2qrp + p^2 s)(2\pi)^3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p : \\ & -24C_2 A_{20}^3 q(2\pi) \\ & + [36C_1(2\pi)s + 36\{(r-2)q - ps\}(2\pi)C_2 \\ & \quad - 72C_4 p + 8q(2\pi)^3] A_{20}^2 \\ & + [36(pq + 2s)(2\pi)C_1 \\ & \quad + 18\{-q^3 + (-p^2 - 2s^2 - 2r^2 + 4r - 4)q - 4ps\}(2\pi)C_2 \\ & \quad - 24(2\pi)^2 C_3 p + 72\{-qs + (-r-2)p\}C_4 - 24E_1(2\pi)^3 s \\ & \quad + 8\{(-9r+2)q + 9ps\}(2\pi)^3] A_{20} \\ & + 9\{2q^2 s + 4pq + 2p^2 s + s^3 + (r^2 + 4)s\}(2\pi)C_1 \\ & + [6(2r-3)q^3 - 18pq^2 s \\ & \quad + \{-18p^2 + 9(-4+r)s^2 + 9r^3 - 36r^2 + 36r - 24\}q \\ & \quad - 6p^3 s + \{-9s^3 + (-36-9r^2)s\}p](2\pi)C_2 \\ & + \{-108qs + (-24-108r)p\}(2\pi)^2 C_3 \\ & + \{-18pq^2 - 72qs - 18p^3 \\ & \quad + (-72r - 72 - 36s^2 - 36r^2)p\}C_4 \\ & + 12(-pq - 2s)(2\pi)^3 E_1 + 24M_2 q(2\pi) \\ & + \{-8q^3 + (-8p^2 + 8 - 76r^2 - 76s^2 - 72r)q \\ & \quad + 72ps\}(2\pi)^3 = 0 \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q : \\ & -24(2\pi)(C_1 + pC_2) A_{20}^3 \\ & + [36(r-2)(2\pi)C_1 + 36\{-qs + (-r-2)p\}(2\pi)C_2 \\ & \quad + 72C_4 q + 12E_1(2\pi)^3 + 8p(2\pi)^3] A_{20}^2 \\ & + [18(-2s^2 - 2r^2 - p^2 - 4 + 4r - 3q^2)(2\pi)C_1 \\ & \quad + 18\{-pq^2 - 4qs - p^3 + 2(-2r - 2 - s^2 - r^2)p\}(2\pi)C_2 \\ & \quad + 24(2\pi)^2 qC_3 + 72\{(2-r)q + ps\}C_4 \\ & \quad + 24(-r+1)(2\pi)^3 E_1 + 8\{9qs + (2+9r)p\}(2\pi)^3] A_{20} \\ & + [18(2r-3)q^2 - 36pqs - 18p^2 \\ & \quad + 9(-4+r)s^2 + 9r^3 - 36r^2 + 36r - 24\}(2\pi)C_1 \\ & + [-6q^3 s - 18pq^2 \\ & \quad + 9\{-2p^2 s - s^3 + (-4-r^2)s\}q + 6(-3-2r)p^3 \\ & \quad + \{9(-4-r)s^2 - 9r^3 - 36r^2 - 36r - 24\}p](2\pi)C_2 \\ & + [12(-9r+2)q + 9ps\}(2\pi)^2 C_3 \\ & + 18\{q^3 + (-4r + 2r^2 + 4 + p^2 + 2s^2)q + 4ps\}C_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + 6(-4r + s^2 + 2 + r^2 + 2q^2)(2\pi)^3 E_1 \\ & + 24E_2(2\pi)^3 p + 24M_2 p(2\pi) \\ & + \{-8pq^2 + 72qs - 8p^3 \\ & \quad + 4(18r - 19s^2 - 19r^2 + 2)p\}(2\pi)^3 = 0 \quad (11) \end{aligned}$$

ただし、ここでは表記を簡単にするため、係数を以下の定数で置き換えている。

$$C_1 = \varepsilon \frac{\mu^2}{Fr_0^2}, C_2 = \frac{\mu^2}{Fr_0^2}, C_3 = \alpha\mu, C_4 = f\mu^3 \quad (12)$$

$$E_1 = \varepsilon, E_2 = \varepsilon^2, M_2 = \mu^2$$

本研究では、解析の第一段階として、 A_{22} の影響が微小であるとして r , s の項を無視した。 A_{22} の項は、正弦波形状の対称な水面形からシュート&プール型の歪んだ水面形への遷移過程を考察する際重要となる。しかし、この項を考慮すると非常に複雑になるため、二次の項として、まず A_{20} のみ考慮したときの基礎式系の基本特性を考察する。

非線形連立方程式を解く手順を示せば次のようになる。まず式(5)の無次元パラメータを定めて連立方程式に代入し、式(9)、(10)および(11)の二乗和を目的関数として、これを最小にする A_{20} , p , q の組を求めた。その際、 A_{20} , p , q の3変数について適当な初期値を与え、それぞれの変数について微係数を微小二点間での勾配で近似したニュートン法を用いた。

この方法は、非線形の連立方程式系に一般的に適用できる方法ではないと思われるが、後述のように非線形性のパラメータが小さいとき(図-3の $\varepsilon=0.01$ の場合)、計算解は線形解に近づくことから、本研究の範囲ではほぼ妥当な解を得ることができたと考えている。

4. 解析結果の考察

$f=0.005$, $\alpha=0.05$ とし、無次元波数 $M \equiv 2\pi/\mu$, および波状路床の振幅 a と平坦河床の等流水深 h_0 の比 ε をパラメータとして、振幅比 A_1 , 位相差 ϕ_1 , 2次の定数項 A_{20} のフルード数に対する応答関係を $M=0.7$ および $\varepsilon=0.01, 0.1, 0.2$ について示すと図-3のようになる。これらの図より、摂動解と同様に共鳴点近傍において2次の定数項 A_{20} も大きくなることから、 A_1 と A_{20} の共鳴点が近いことが分かる。また、 ε が大きくなると、共鳴点付近で Fr_0 に対し A_1 , A_{20} が多価となっている。

実験結果との対応を考えると、 Fr_0 でなく、抵抗の増加による水深の増加、平均流速の減少を考慮したみかけのフルード数を用いる必要がある。

無次元水深が

$$\eta = 1 + A_1 \cos(2\pi\sigma + \phi_1) + A_{20} + A_{22} \cos(4\pi\sigma + \phi_2) \quad (13)$$

であることから、平均水深が $h_{ave} = h_0(1 + A_{20})$ と表される。よって見かけのフルード数、および平均の抵

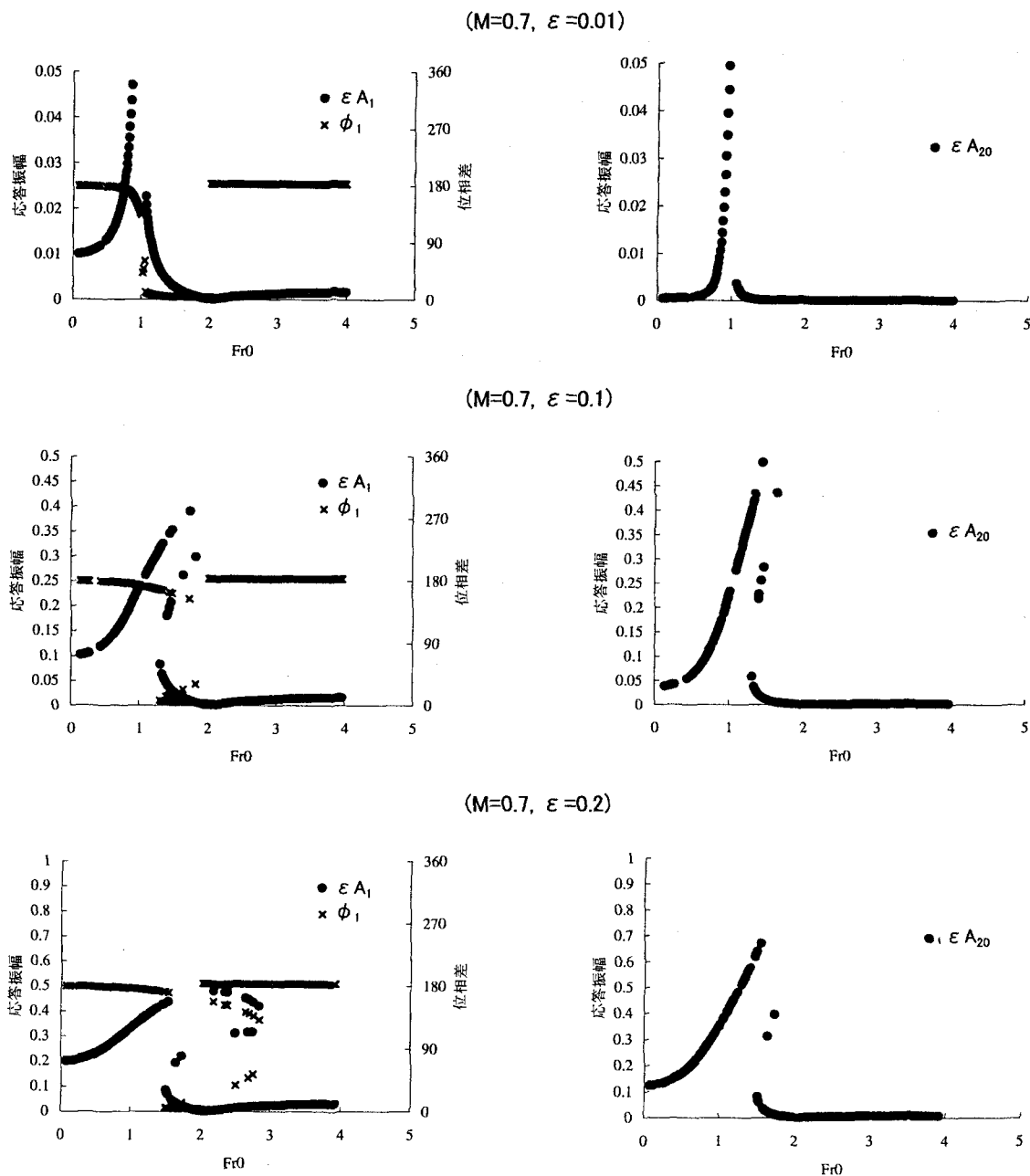


図-3 Fr_0 で整理した非線形解析結果

抗係数はそれぞれ

$$Fr' = Fr_0(1 + A_{20})^{-3/2}, \quad f_{ave} = f(1 + A_{20})^3$$

となる。

図-3の一部をを Fr' に関して示すと図-4となる。これらの図を見ると、 ϵ が小さい場合は線形解に近い応答を示すが、 ϵ が大きくなると振幅の値が小さくなる事が分かる。(図では ϵA_1 の値を示した。)

また、実験結果の図で値が存在しないフルード数の領域に対して、本節の解析法でも値が存在するということについては、以下のように説明できると考えられる。

図-3を見ると、 ϵ の増加とともに振幅比が Fr_0 に関して多価となっている。このような応答特性は多くの非線形振動の応答曲線に見られる。例として非線形強制振動のモデル方程式であるダフィン方程式において、外力の振動数を変化させたときの応答曲線を図-5に示した³⁾。外力の振動数の増加に対して $P \rightarrow P_{C1} \rightarrow Q_{C1} \rightarrow Q$ ，外力の振動数の減少に対して $Q \rightarrow Q_{C2} \rightarrow P_{C2} \rightarrow P$ というように応答が不連続になることが知られている。これは多価の解をもつ振動数領域での応答振幅が、それ以前の履歴に依存する履歴現象とよばれる。

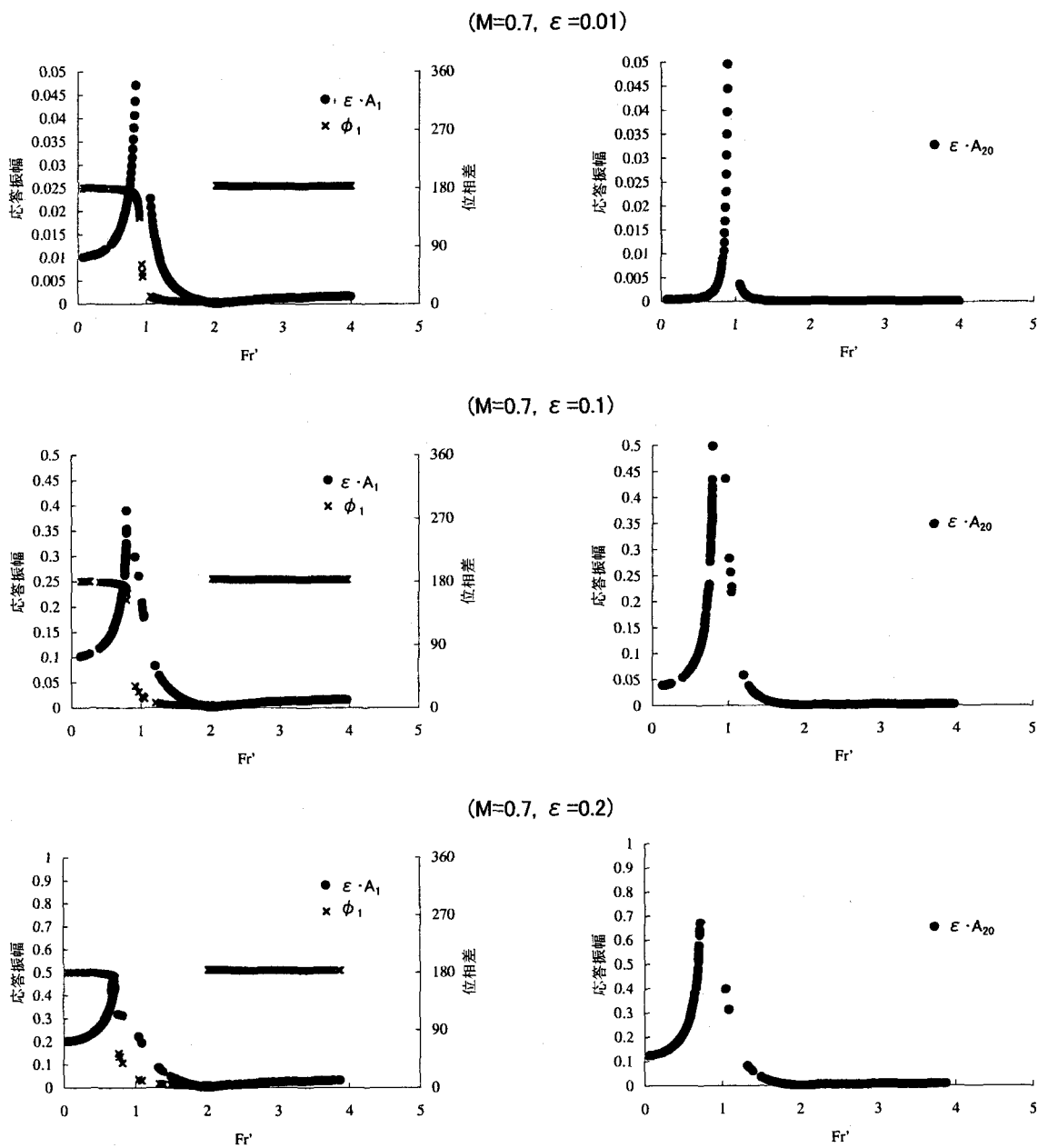


図-4 見かけのフルード数 Fr' で整理した非線形解析結果

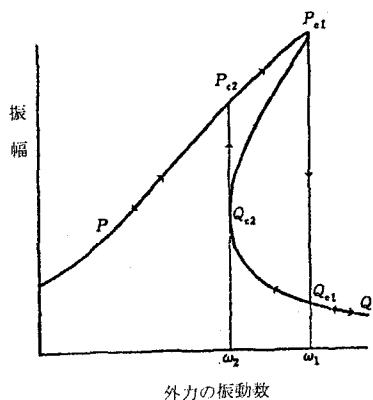


図-5 非線形強制振動の応答曲線に見られる履歴現象

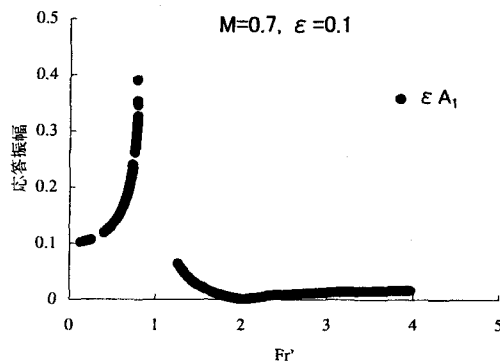


図-6 共鳴点近傍で実験結果が存在しないことの説明

これと同様に、本研究では ε を一定として水路勾配を徐々に急にし、その後緩くしたときの応答を考えてみる。図-3の多価の解を持つ場合の応答を考えると、ダフィン方程式と同様の履歴現象が発生し、多値の領域の上の曲線と下の曲線を通る応答のみ存在し、その間の曲線を通る応答は存在しないことが考えられる。この中間の領域の解を省いて、図-4を描きなおすと図-6となり、Yuen・Kennedyの実験結果(図-2)と対応した結果となっている。

以上のことは、中間領域の解の安定性を考えることにより証明されなければならず、今後の課題と考えられる。

5. おわりに

正弦波で表される波状路床上の開水路流れに関して、鉛直加速度を考慮した水深積分モデルを用いて、路床と水面形の応答関係に着目した非線形解析を行い、線形理論に見られる共鳴点近傍での路床と水深・水面変動の振幅比や位相差の応答特性について考察した。その結果、1) 非線形性のパラメータが大きくなると、共鳴点近傍で応答曲線が多価にな

ること、2) ダフィン方程式の応答特性からの類推から、多価に領域の中間の応答曲線は現実には存在せず応答が不連続になること、3) このことを見かけのフルード数で整理すると実験結果に見られる共鳴点付近の実験結果が存在しない領域が説明できることが指摘された。今後、3)に関し中間領域の応答の不安定性を証明する必要があるとともに、実際に生じている水面形との対応も明らかにする必要がある。

参考文献

- 1) 細田 尚, 村本嘉雄, 宮本雅章: 水深積分モデルによる波状路床上の流れの底面せん断応力解析, 土木学会論文集 No. 558/II-38, pp. 81-89, 1997.
- 2) Yuen, A. F. H and Kennedy, J. F.: A laboratory investigation of free surface flows over wavy beds, IIHR Report No. 121, Iowa Inst. Hydr. Res., Univ. Iowa, 1971.
- 3) 戸田盛和, 渡辺慎介 (1983): 非線形力学, 共立物理学講座, 共立出版, 1983.

(2001. 10. 1受付)