

鉛直加速度を考慮した水深積分モデルの改良と 多次元数値解析結果を用いた検証について

Verification of a Refined Boussinesq Equation
by Using Vertical 2-D Numerical Analysis

音田 慎一郎*・細田 尚**・木村 一郎***
Shinichiro ONDA・Takashi HOSODA・Ichiro KIMURA

*学生員 京都大学大学院 工学研究科土木工学専攻修士課程 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

**正会員 工博 京都大学大学院助教授 工学研究科土木工学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

***正会員 工博 四日市大学助教授 環境情報学部環境情報学科 (〒512-8512 三重県四日市市萱生町1200)

The refinement on a depth-averaged model with effects of vertical acceleration was tested in this paper. A refined type equation is firstly derived with the iteration procedure to modify a vertical velocity distribution under irrotational condition, which is slightly different from the model by Madsen et al and Nwogu. The pressure distribution is determined by using the modified vertical velocity distribution. The way used by Madsen is further applied to the depth averaged momentum equation, which is derived by substituting the modified vertical velocity and pressure distribution, to avoid the singularity in linear dispersion relation. To evaluate the model performance, the equation is applied to the free surface oscillation in a water tank and the relation of linear distribution is compared with the Airy wave. In addition, the non-linear approximate solution of the equation is analytically derived and the characteristics of the equation are examined through the comparison with the numerical solution by vertical 2-D CFD model.

Key Words : *depth-averaged flow model, sloshing in a tank, dispersion relation, non-linear analysis*

1. はじめに

Boussinesq方程式は海岸域の波・流れ共存場の水面変動の予測だけでなく、開水路流れの波状跳水や砂堆の発生・発達過程を再現できる実用的な水深積分モデルである。しかし、原形Boussinesq方程式は、例えば水の波に適用した場合、高波数領域で微小振幅波理論の分散関係と適合しない、波上路床上流れの底面せん断応力分布が再現できないなどの問題点がある。

そこで、原形Boussinesq方程式の修正に関して様々な改良が提案されてきた。Madsenら¹⁾は、分散項に長波の運動方程式を空間的に2階微分した項を加え、線形分散関係が広範囲で適用するようなパラメータを同定した。Nwogu²⁾は、平均流速でなく任意の高さの流速をパラメータとした、非回転条件に近似的に適合する流速分布形を導入した。さらに、連続式、運動量方程式に代入して水深積分することで任意の高さの流速をパラメータとした基礎式を導いた。上述の方法を発展させたさらなる改良とその検証がMadsenら^{3), 4)}、Agnonら⁵⁾、Gobbiら⁶⁾によって行われている。

これらの改良型モデルでは、流速分布を任意の高さの流速と水深平均流速の複雑な関係式として陰的に表しているものが多く、河川流などの基本量である水深平均流速と流速分布との関係を陽的に簡易に表しているモデルは少ない。

そこで、本研究では流速分布、基礎式を水深平均流速で陽的かつ簡易に表すことに着目して水深積分モデルの改良を行う。

一様な流速分布から出発し、非回転条件と連続式を繰り返して用いることで非回転条件に適合する流速分布を求める方法を適用する⁷⁾。次に、流速分布を運動方程式に代入して積分することで、圧力分布と水深積分型運動量方程式を導く。さらに、このままでは高波数で分散関係の分母がゼロになるため、Madsenら³⁾と類似の方法を適用してこのsingularityの解消を試みる。

導かれた基礎式を水槽内水面振動現象に適用し、線形・非線形解析と微小振幅波理論あるいは鉛直2次元数値解析結果を比較することで、モデルの検証を行った。

2. 基礎式の誘導過程

2. 1 流速分布の修正と運動量方程式

底面は平坦路床とし、路床に沿う流下方向、鉛直上向きをそれぞれ x 軸、 z 軸とする。一様な流速分布 $u = U(x)$ から出発し、第一段階の運動量方程式を導く手順を箇条書きにして示せば下記ようになる。

- ① 連続式を積分して鉛直流速 w の分布形を求める。
- ② この w を用いて非回転条件を積分することで u の分布形を求める。
- ③ この u の分布形を用いて①を繰り返す。
- ④ ②を繰り返し u を求め直す。
- ⑤ z 方向の運動方程式に上記流速分布を代入し圧力分布を求める。
- ⑥ 圧力分布、流速分布を x 方向の運動方程式に代入し、水深積分することで運動量方程式を導く。

ここでは紙面の都合のため、得られた流速分布および運動量方程式のみ記述する。

$$u = U + \frac{h^2}{2} B \left(\frac{z^2}{h^2} - \frac{1}{3} \right) + \frac{h^4}{12} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \left(\frac{z^2}{h^2} - \frac{1}{3} \right) - \frac{h^4}{24} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \left(\frac{z^4}{h^4} - \frac{1}{5} \right) \quad (1)$$

$$w = \frac{z}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \left(\frac{h^2}{6} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{h^4}{36} \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} - \frac{h^4}{120} \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} \right) z - \left(\frac{1}{6} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{h^2}{36} \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} \right) z^3 + \frac{1}{120} \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} z^5 + \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{h}{3} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{h^3}{18} \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} - \frac{h^3}{36} \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} \right) z \quad (2)$$

$$\text{ここに、} A = B = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right\}.$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{G h^2}{2} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{1}{3} h^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial t} + \frac{1}{3} h^2 U^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{2}{3} h^2 U \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} \right. \\ & - \frac{1}{45} h^4 \frac{\partial^4 q}{\partial x^3 \partial t} + \frac{1}{45} h^4 U^2 \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} + \frac{2}{45} h^4 U \frac{\partial^4 h}{\partial x^3 \partial t} \\ & \left. - \frac{2}{945} h^6 \frac{\partial^6 q}{\partial x^5 \partial t} + \frac{2}{945} h^6 U^2 \frac{\partial^6 h}{\partial x^6} + \frac{4}{945} h^6 U \frac{\partial^6 h}{\partial x^5 \partial t} \right\} \\ & + \dots = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

ここに、 h ; 水深、 U ; 水深平均流速、 q ; 単位幅流量、 G ; 重力加速度。

7次の項は非回転条件を反復することで現れる項である。Madsenら³⁾が指摘するように流速分布の非

回転条件のみを考慮しても、水の波の線形分散関係に分母が0になる点 (singularity) が存在するが、反復回数を増やせばこの点は高波数へ移動していく。

2. 2 分散項の修正

次に(3)式の微分の階数を減らし、singularityを解消するため、圧力分布の水深積分から導かれる分散項の修正を考える。Madsenら³⁾、Agnonら⁵⁾が、ポテンシャル流の基礎式から導かれたモデルに適用した方法に類似の方法を(3)式に適用することを試みる。

修正の方法を簡単に記述すると次のようになる。考えている微分方程式が次式で表されるとする。

$$L1(x) + L2(x) = \alpha \frac{d^2 L2(x)}{dx^2} + \dots, \quad \alpha ; \text{定数}$$

上式中、 $L2$ は $L1$ より高階とし、右辺は左辺各項より微小とする。

このとき、上式の第一近似は $L2(x) = -L1(x)$ であり、これを右辺に代入すると微分の階数を減少させることができる。ただし代入する時、 $L2(x) = -\xi L1(x)$ のように定数を乗じて、何らかの制約条件 (ここでは分散関係) を満足させることができるようにする。

上記の方法を(3)式に適用すると次のようになる。

$$\begin{aligned} L2 &= \frac{1}{45} h^4 \frac{\partial^5 q}{\partial x^4 \partial t} - \frac{1}{45} h^4 U^2 \frac{\partial^5 h}{\partial x^5} - \frac{2}{45} h^4 U \frac{\partial^5 h}{\partial x^4 \partial t} \\ &= \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{G h^2}{2} \right) \\ & - \frac{1}{3} h^2 \frac{\partial^3 q}{\partial x^2 \partial t} + \frac{1}{3} h^2 U^2 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{2}{3} h^2 U \frac{\partial^3 h}{\partial x^2 \partial t} \\ \frac{\partial^2 L2}{\partial x^2} &= \frac{1}{45} h^4 \frac{\partial^7 q}{\partial x^6 \partial t} - \frac{1}{45} h^4 U^2 \frac{\partial^7 h}{\partial x^7} - \frac{2}{45} h^4 U \frac{\partial^7 h}{\partial x^6 \partial t} \\ &= \xi \left\{ \frac{\partial^3 q}{\partial x^3 \partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\frac{G h^2}{2} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{3} h^2 \frac{\partial^5 q}{\partial x^4 \partial t} + \frac{1}{3} h^2 U^2 \frac{\partial^5 h}{\partial x^5} + \frac{2}{3} h^2 U \frac{\partial^5 h}{\partial x^4 \partial t} \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

(3)式中7次の項に、(4)式を代入し、整理すると以下ようになる。 ξ が制約条件としての分散関係を近似的に満足させるための定数である。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{G h^2}{2} \right) + \frac{1}{3} h^2 U^2 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{2}{3} h^2 U \frac{\partial^3 h}{\partial x^2 \partial t} \\ & - \frac{1}{3} h^2 \left(1 + \frac{2}{7} \xi \right) \frac{\partial^3 q}{\partial x^2 \partial t} - \frac{2}{21} \xi h^2 \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{G h^2}{2} \right) \\ & - \frac{1}{45} h^4 \left(1 - \frac{10}{7} \xi \right) \frac{\partial^5 q}{\partial x^4 \partial t} + \frac{1}{45} h^4 U^2 \left(1 - \frac{10}{7} \xi \right) \frac{\partial^5 h}{\partial x^5} \end{aligned}$$

$$+\frac{2}{45}h^4U\left(1-\frac{10}{7}\xi\right)\frac{\partial^5h}{\partial x^4\partial t}=0 \quad (5)$$

3. 水槽内水面振動の線形解と微小振幅波理論の比較

本研究では後述の数値計算や非線形解析の容易さを考えて、矩形水槽内の水面振動現象を用いて、基礎式の適用性を検証する。

(5) 式および連続式を

$$h = h_0 + h', \quad U = U_0 + U'$$

とにおいて線形化すると、 h' に関する次のような線形化方程式が得られる。(水槽内水面振動では $U_0=0$ である。)

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} - 2U_0 \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} - (U_0^2 - Gh_0) \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} \\ & + \frac{1}{3}h_0^2U_0^2 \frac{\partial^4 h'}{\partial x^4} + \frac{2}{3}h_0^2U_0 \frac{\partial^4 h'}{\partial x^4} + \frac{1}{3}h_0^2 \left(1 + \frac{2}{7}\xi\right) \frac{\partial^4 h'}{\partial x^2 \partial t^2} \\ & - \frac{2}{21}\xi Gh_0^3 \frac{\partial^4 h'}{\partial x^4} + \frac{1}{45}h_0^4 \left(1 - \frac{10}{7}\xi\right) \frac{\partial^6 h'}{\partial x^4 \partial t^2} \quad (6) \\ & + \frac{1}{45}h_0^2U_0^2 \left(1 - \frac{10}{7}\xi\right) \frac{\partial^6 h'}{\partial x^6} + \frac{2}{45}h_0^4U_0 \left(1 - \frac{10}{7}\xi\right) \frac{\partial^6 h'}{\partial x^5 \partial t} = 0 \end{aligned}$$

$$h' = -a_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right), \quad U_0 = 0$$

を代入すれば、分散関係として次式を得る。

$$\begin{aligned} T'^2 &= T^2 G/h_0 \\ &= \frac{1 + \left(1 + \frac{2}{7}\xi\right) \frac{1}{3}k'^2 - \frac{1}{45} \left(1 - \frac{10}{7}\xi\right) k'^4}{k'^2 + \frac{2}{21}\xi k'^4} \quad (7) \end{aligned}$$

ここに、 T ; 周期、無次元波数 $k' = \frac{\pi h_0}{L}$ 。

微小振幅波理論についても同様に、水槽内水面振動（重複波）の分散関係を求めると、以下のようになる。

$$T_s'^2 = (2\pi)^2 \frac{1}{k' \tanh k'} \quad (8)$$

微小振幅波理論と高波数領域においても適合するように、(7) 式中のパラメータ ξ を同定すると、 $\xi = 0.92$ となる。図-1は T'/T_s' と k' との関係を示している。Madsen¹⁾、Nwogu²⁾の結果よりも線形分散関係が高波数領域まで適合しており、 $T'/T_s' \leq 1 \pm 0.5$ すると適合する無次元波数がほぼ9まで増加している。Gobbiら³⁾の提案式に比べると、若干適応範囲が狭いものの、今回の水深積分モデルの改良は、任意の高さの流速をパラメータとしたモデル²⁾⁻⁶⁾より、

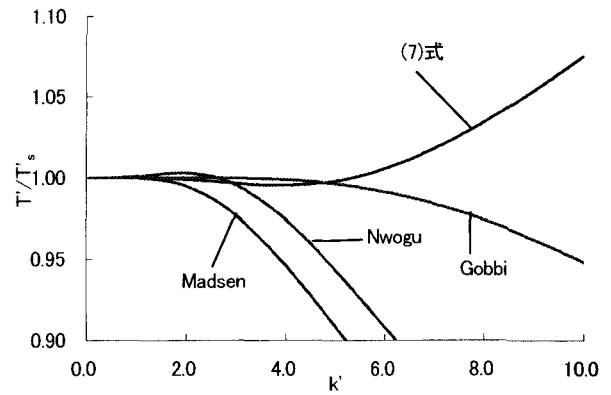


図-1 各モデルによる線形分散関係の比較

流速分布、基礎式を水深平均流速で簡易に表すことができると考えられる。また、水槽内水面振動のようにポテンシャル流として扱われる解析では、非回転条件の反復を増やすことで、線形分散関係がより高波数領域まで適合すると思われる。

4. 矩形水槽内水面振動の鉛直2次元数値解析

次に非線形性が強い領域でのモデルの適用性を検討するために、数値解析を行い、非線形解析と比較するデータとする。

鉛直2次元水面振動の数値計算に関して、まず時間的に変動する水面に適合した移動一般座標系を用いる方法を考える。

流速ベクトルの反変成分 V^i を未知数として基礎式を記述すると、移動一般座標系での連続式、運動方程式は以下になる。なお、水槽内水面振動はポテンシャル流として扱われるので、粘性項は無視している。

[連続式]

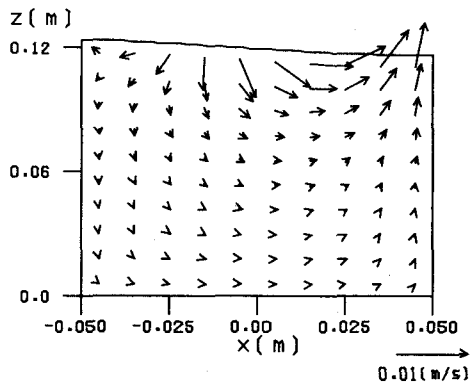
$$\frac{1}{\sqrt{J}} \frac{\partial V^\alpha \sqrt{J}}{\partial \xi^\alpha} = 0 \quad (9)$$

[運動方程式]

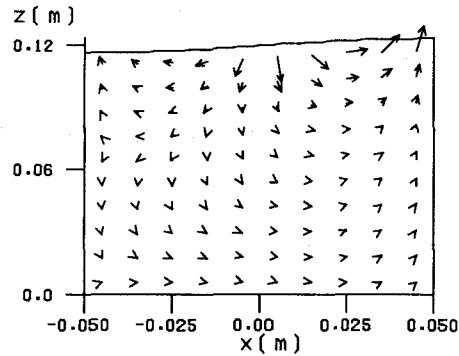
$$\begin{aligned} & \frac{\partial V^i}{\partial t} + \nabla_j [V^i (V^j - W^j)] + V^i \nabla_j W^j + V^j \nabla_j V^i \\ & = F^i - \frac{1}{\rho} g^{ij} \nabla_j p \end{aligned} \quad (10)$$

ここに、 ξ^i ; 計算空間での空間座標、 t ; 時間、 ∇_i ; 共変微分、 V^i ; 流速ベクトルの反変成分、 W^i ; 計算格子移動速度ベクトルの反変成分、 p ; 圧力、 ρ ; 水の密度、 F^i ; 外力、 g^{ij} ; 基本反変テンソル、 J ; 基本反変テンソルからなる行列の行列式。

変数の配置には、スタッガードスキームを用いて配置し、基礎式の離散化として、有限体積法を用いる。また移流項の離散化にはTVD-MUSCLを用いる。



(a)



(b)

図-2 初期振幅が小さい場合の水面振動の計算結果

	数値解析法	初期振幅 a_0/h_0
RunA03	移動一般座標系	0.03
RunA20-B	移動一般座標系	0.20
RunA20-V	VOF	0.20
RunA30-B	移動一般座標系	0.30
RunA30-V	VOF	0.30

表-1 数値解析の水理条件

水槽内水面振動の数値解析として初期の波形に正弦波を与える。

$$h = h_0 - a_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$$

ここに、 h_0 ；平均水深、 a_0/h_0 ；初期振幅、 T ；周期、 L ；水槽の長さ。

$L = 0.1\text{m}$ に固定し、平均水深を $h_0 = 0.05\text{m}$ から 0.15m まで 0.01m ごとに増加させて数値計算を行う。なお、初期水面の振幅については、表-1に示すように小さい場合、比較的大きい場合、大きい場合としてそれぞれ $a_0/h_0 = 0.03, 0.2, 0.3$ とする。水面の変動がほぼ安定するまで計算を繰り返し、そのときの周期を求める。また、水深を大きくしていくと、水面の変動によっては移動一般座標系で計算できない場合があるため、 $h_0 = 0.1\text{m}$ からはデカルト座標系での基礎式を用いたVOF法により解析を行っている。VOF法においても変数の配置、基礎式の離散化、計算条件などは同じである。

鉛直2次元数値解析による計算例として、初期振幅が小さい場合 (RunA03) の $h_0 = 0.12\text{m}$ における流況の時間的変化を示したものが図-2 (a), (b) である。(a), (b) はほぼ初期波形と同位相、あるいは逆位相での結果である。周期的に水面の変動している様子が再現されている。また、初期振幅が小さい場合の数値解析結果を用いて分散関係を示したのが図-3であり、微小振幅波理論とほぼ一致している。

5. 非線形解析結果と数値計算結果の比較

5. 1 初期振幅が大きい場合の数値解析結果の考察

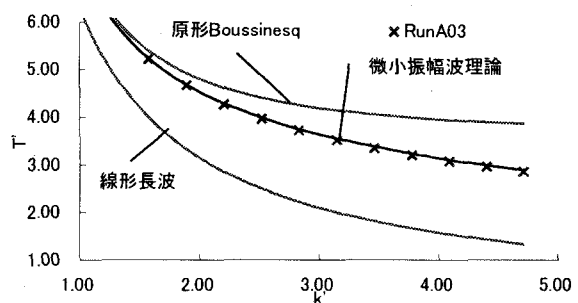


図-3 計算結果と微小振幅理論の比較

図-4, 5は初期振幅が大きい場合 (RunA30) の $h_0 = 0.07\text{m}, 0.12\text{m}$ での流況の時間的変化を示している。 $h_0 = 0.07\text{m}$ は移動一般座標を用いて計算されており、 0.12m はVOF法により計算されている。VOF法による解析は移動一般座標系とは異なり、水面形状をなだらかに表現できないが、 $h_0 = 0.12\text{m}$ については明らかに水面のひずんでいる様子が確認できる。また、水深の増大により非線形性が強くなり、同じ初期振幅を与えても振幅が大きく、波形が急峻になることがわかる。波形勾配が急になることで、移動一般座標系での解析が困難なことも説明される。

5. 2 非線形解析

(5) 式と連続式に

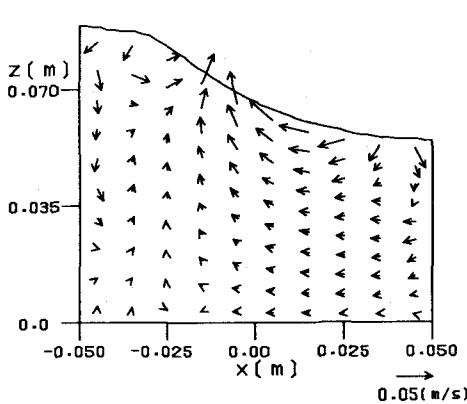
$$h = h_0 + h_1 \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (11)$$

$$U = U_1 \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi_{UT1}\right) \quad (12)$$

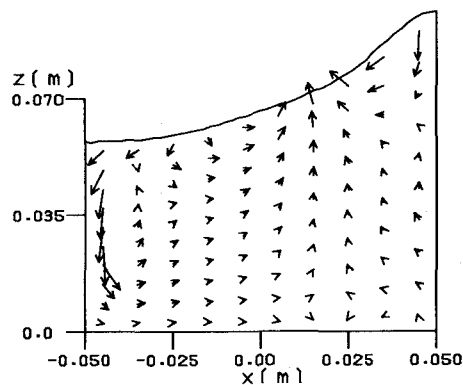
を代入し、時間・空間モード毎に整理することで、非線形領域における水面振動の近似解を求める。ここに、 h_0 ；平均水深、 h_1/h_0 ；振幅、 ϕ_{UT1} ；位相差 ($0 \leq \phi_{UT1} \leq 2\pi$)。

連続式から

$$\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right); \quad h_1 \frac{2\pi}{T} - h_0 U_1 \frac{\pi}{L} \sin \phi_{UT1} = 0 \quad (13)$$

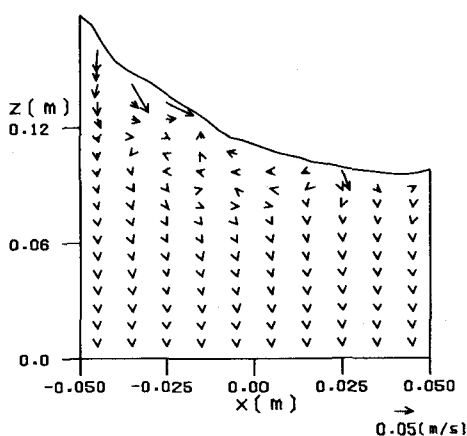


(a)

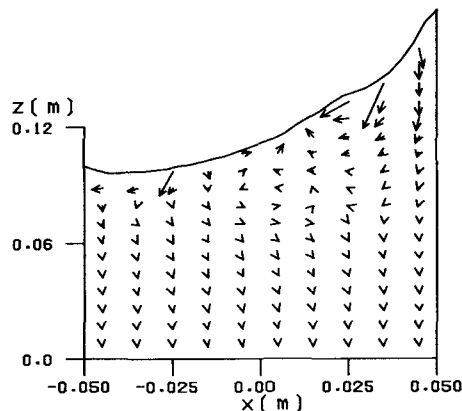


(b)

図-4 初期振幅を固定し初期水深が小さい場合の計算結果



(a)



(b)

図-5 初期振幅を固定し初期水深が大きい場合の計算結果

$$\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right);$$

$$h_0 U_1 \cos \phi_{UT1} = 0 \quad (14)$$

また、(5)式から

$$\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right);$$

$$h_0 U_1 \frac{2\pi}{T} \cos \phi_{UT1} + \frac{1}{16} h_1 U_1^2 \frac{\pi}{L} \sin 2\phi_{UT1}$$

$$+ \frac{1}{3} h_0 U_1 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{2\pi}{T} \left(1 + \frac{2}{7}\xi\right) \cos \phi_{UT1} \left\{h_0^2 + \frac{1}{16} h_1^2\right\}$$

$$+ \frac{1}{3} h_0 h_1^2 U_1 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{2\pi}{T} \left(1 + \frac{2}{7}\xi\right) \cos \phi_{UT1}$$

$$- \frac{1}{45} h_0 U_1 \left(1 - \frac{10}{7}\xi\right) \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \frac{2\pi}{T} \cos \phi_{UT1}$$

$$\times \left\{h_0^4 + \frac{67}{8} h_0^2 h_1^2 + \frac{129}{64} h_1^4\right\} = 0 \quad (15)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right);$$

$$-h_0 U_1 \frac{2\pi}{T} \sin \phi_{UT1} + \frac{1}{8} h_1 U_1^2 \frac{\pi}{L} + \frac{1}{16} h_1 U_1^2 \frac{\pi}{L} \cos 2\phi_{UT1}$$

$$+ G h_0 h_1 \frac{\pi}{L} + \frac{1}{3} h_0 U_1 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{2\pi}{T} \left(1 + \frac{2}{7}\xi\right) \sin \phi_{UT1} \left\{-h_0^2 - \frac{3}{16} h_1^2\right\}$$

$$- \frac{1}{3} h_0 h_1^2 U_1 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{2\pi}{T} \left(1 + \frac{2}{7}\xi\right) \sin \phi_{UT1}$$

$$+ \frac{2}{21} \xi G h_0^3 h_1 \left(\frac{\pi}{L}\right)^3 + \frac{3}{56} \xi G h_0 h_1^3 \left(\frac{\pi}{L}\right)^3$$

$$- \frac{1}{45} h_0 U_1 \left(1 - \frac{10}{7}\xi\right) \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \frac{2\pi}{T} \sin \phi_{UT1}$$

$$\times \left\{-h_0^4 - \frac{73}{8} h_0^2 h_1^2 - \frac{261}{64} h_1^4\right\} = 0 \quad (16)$$

(14)式より $\cos \phi_{UT1} = 0$ なので、(15)式は自動的に満足される。また、 $\phi_{UT1} = \pi/2, 3\pi/2$ が考えられるが、(13)、(14)式を用いて(16)式から $\sin \phi_{UT1}$ 、 U_1 を消去し、 h_1^2 、 U_1^2 以上の項を無視して得られる分散関係が線形分散関係と一致するように ϕ_{UT1} を求めると、 $\phi_{UT1} = \pi/2$ となる。したがって、(16)式から ϕ_{UT1} 、 U_1 を消去し整理すると、非線形領域における分散関係は次のように求められる。

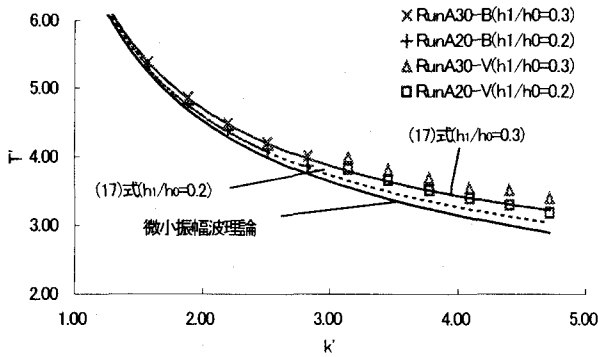


図-6 非線形解析結果と計算結果の比較

$$\left\{ k'^2 + \frac{2}{21} \xi k'^4 + \frac{3}{56} \xi \left(\frac{h_1}{h_0} \right)^2 k'^4 \right\} T'^2$$

$$= 1 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{7} \xi \right) k'^2 - \frac{1}{45} \left(1 - \frac{10}{7} \xi \right) k'^4$$

$$- \frac{1}{16} \left(\frac{h_1}{h_0} \right)^2 + \frac{19}{48} \left(1 + \frac{2}{7} \xi \right) \left(\frac{h_1}{h_0} \right)^2 k'^2$$

$$- \frac{73}{360} \left(1 - \frac{10}{7} \xi \right) \left(\frac{h_1}{h_0} \right)^2 k'^4 - \frac{261}{2880} \left(1 - \frac{10}{7} \xi \right) \left(\frac{h_1}{h_0} \right)^4 k'^4 \quad (17)$$

なお、鉛直2次元数値解析と比較する際、非線形領域において非線形性が強くなると定常状態での振幅が初期の振幅と大きく異なる場合がある。初期水面の振幅として大きいRunA20, RunA30について、定常振動での振幅の値を比較してみると、 $h_0 = 0.09\text{m}$ まではほぼ0.2, 0.3と変わらないが、 $h_0 = 0.1\text{m}$ からはそれぞれ0.3, 0.4近くまで大きくなっている。そこで、振幅の小さいRunA03と大きいRunA20, RunA30から得られる周期、定常状態での振幅の値を用いて補間することにより、 $h_1/h_0 = 0.2, 0.3$ に固定した振幅での周期を求め、これを数値解析結果としてプロットする。近似解の(17)式については $h_1/h_0 = 0.2, 0.3$ を代入し、計算する。図-6は非線形領域における分散関係を示している。修正式の近似解が数値解析結果に対しほぼ一致していることが

ら非線形性が強い領域においても適応できると考えられる。

6. おわりに

本研究は、Boussinesq方程式の改良とその検証について考察したものである。改良モデルを水槽内水面振動現象に適用し、線形分散関係がかなりの高波数領域まで改善されることを確認した。また、非線形解析として非線形領域における分散関係の非線形解を求め、鉛直2次元数値解析結果と比較することで、非線形領域での適用性について検証した。

今後、さらに改良モデル(5)式と流速分布の関係について考察したい。

参考文献

- 1) Madsen, P.A., Murry, R. and Sorensen, O.R. : A new form of Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, Coastal Eng., Vol.15, pp374-388, 1991.
- 2) Nwogu, O. : Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation, J. Water, Port, Coastal, and Ocean Eng., ASCE, Vol.119, No.6, pp.618-638, 1993.
- 3) Madsen, P.A. and Schaffer, H.A. : High order Boussinesq-type equations for surface gravity waves-derivation and analysis, Phil. Trans. R. Soc. Lond., A356, pp.79-83, 1998.
- 4) Madsen, P.A., Bingham, H. and Liu, H. : The ultimate Boussinesq formulation for highly dispersive and highly nonlinear water waves, Proc. Coastal Eng., pp176-189, 2000.
- 5) Agnon, Y., Madsen, P.A. and Schaffer, H.A. : A new approach to high-order Boussinesq model, J. Fluid Mech., Vol.399, pp319-333, 1999.
- 6) Gobbi, M.F., Kirby, J.T. and Wei, G. : A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part2. Extension to $O(kh)^4$, J. Fluid Mech., Vol.405, pp181-210, 2000.
- 7) 細田 尚・村本嘉男・宮本雅章：水深積分モデルによる波状路床上の流れの底面せん断応力解析，土木学会論文集，No.558/Ⅱ-38，pp.81-89，1997.

(2001. 10. 1受付)