

開水路乱流のLESにおける 水面変動のフィルタリング効果

FILTERING EFFECTS OF FREE-SURFACE FLUCTUATIONS
IN LES OF OPEN-CHANNEL TURBULENT FLOWS

横嶋 哲¹・中山 昭彦²

Satoshi YOKOJIMA and Akihiko NAKAYAMA

¹ 学生員, 日本学術振興会特別研究員 (DC), 神戸大学大学院自然科学研究科地球環境科学専攻
(〒 657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1)

² 正会員, Ph.D. 神戸大学大学院教授, 自然科学研究科地球環境科学専攻 (同上)

In an LES calculation of turbulent flows with a moving free surface, represented by an elevation function, new unknown subgrid-scale correlation terms arise from filtering of the kinematic boundary condition. Fundamental characteristics of these subgrid-scale terms and possible models have been investigated using the DNS data of fully-developed open-channel turbulent flow at subcritical Froude numbers. It is found that the magnitudes of the subgrid-scale terms are relatively small but can be important locally. The subgrid-scale model based on the scale similarity appears to be a good candidate, better than gradient-diffusion type model similar to the standard Smagorinsky model for subgrid-scale stresses.

Key Words : large-eddy simulation, open-channel flow, free-surface effects, subgrid-scale fluctuations

1. 序論

ラージ・エディ・シミュレーション (LES) 法は工学, 環境科学等の様々な分野で有用な乱流解析法になりつつある. LES では瞬時の乱流場に空間フィルターが施され, フィルターサイズより大きなスケールの乱れのみ直接的に計算されるが, フィルター操作により失われる情報は SGS(Subgrid-Scale) 成分としてモデル化される必要がある. 流れ領域が固定されている場合には, 速度場に関する支配方程式は Navier-Stokes 方程式に対する空間平均操作により求められ, これによってモデル化を要する SGS 応力が新たに発生する. 一方, 水工学への応用では, 他分野であまり重要視されない自由水面の効果を検討する必要がある場合が多い. 計算格子により水面形状を厳密に解像できない場合には, 水面形状も併せて平均化される必要があるが, この水面形状のフィルタリング効果についてはこれまでに殆ど検討されていない. また, 水面変動を有する場合には流れ領域が変動するため, Euler 的空間平均を定義することが困難になるが, 水面変動が微小な場合には, 局所的, 瞬時的に水面外に出るような位置での速度が仮想的に線形外挿などで定義できるため, 空間フィルター操作は可能となる. Hodges & Street¹⁾ はこうして定義される速度変動と水面変動の積の相関項が SGS 項として新たに発生することを指摘し, そのモデリングの必要性を論じたが, 具体的なモデルの提案は行っていない. Dimas & Fialkowski²⁾ は水面が大きく変動する流

れ場に対して, Smagorinsky モデルに倣った勾配拡散型モデルを用いた計算を行っている. また Shen & Yue³⁾ はこの SGS 相関項について詳細な検討を行わずに, スケール相似則 (Bardina et al.⁴⁾) 型のモデルを適用している. これらの研究では, 水面変動を有する流れ場を LES を用いてシミュレートする場合に, 水面形状のフィルタリングに起因する付加項が発生することが認識され, 何らかのモデリングが試みられてはいるが, 詳細な検討は行われていない.

本研究では, 水面変動の小さな常流開水路乱流の DNS 瞬時データ⁵⁾ にフィルター操作を施すことにより, 上述の速度変動と水面変動の SGS 相関項の基本的特性を調べ, 考えられる二つのモデルを提唱し, その再現性について検討する. なお, それらのモデルを用いた実際の LES 計算については別報⁶⁾ にて報告する.

2. 自由水面乱流 LES における水面の条件

(1) 瞬時式とそのフィルタリング

瞬時水面位置を $x_2 = \bar{h}(x_1, x_3, t)$ のように水平位置 (x_1, x_3) の連続な一価関数で表現した場合, \bar{h} は次の運動学的条件を満足する.

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + u_\alpha \Big|_{\bar{h}} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_\alpha} = u_2 \Big|_{\bar{h}} \quad (1)$$

ここで x_1, x_2, x_3 はそれぞれ主流方向, 路床法線上向き方向及び横断方向を示し, u_i は x_i 方向の瞬時速度

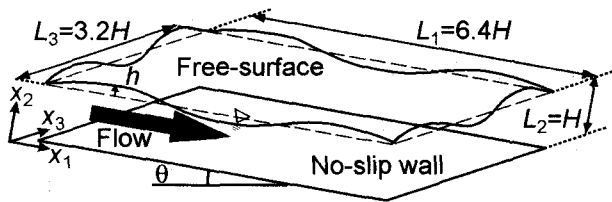


図-1 水面変動を伴う開水路乱流

成分を示す。またギリシャ文字の添え字は水平方向の値 (1 及び 3) のみを取り、 $()|_{\tilde{h}}$ は $x_2 = \tilde{h}$ における値を指すとする。式 (1) 中の速度は瞬時水面上での値であるが、水面変動が小さい場合に適用できる微小振幅波近似では、平均水深 H での速度を用い、また \tilde{h} を平均値からの変動 h で置き直すことができる⁵⁾ ので、式 (1) を以下のように書くことができる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha|_H h) = u_2|_H \quad (2)$$

LES 計算を行う場合には、式 (2) にも空間フィルター操作が施されることになる。式 (2) は鉛直方向座標 x_2 に依存しないので、空間フィルターは運動方程式の平均化に用いられる三次元フィルターではなく、水平面内での二次元フィルターとなる。フィルター平均された量を $\langle \rangle$ で表すと

$$\frac{\partial \langle h \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \{ \langle u_\alpha \rangle|_H \langle h \rangle \} = \langle u_2 \rangle|_H - \frac{\partial \tau_{h\alpha}}{\partial x_\alpha} \quad (3)$$

が得られる。ここで、 $\tau_{h\alpha}$ はフィルター操作により生ずる項で

$$\tau_{h\alpha} \equiv \langle h u_\alpha \rangle|_H - \langle h \rangle \langle u_\alpha \rangle|_H \quad (4)$$

である。ここで注意すべきことは $\tau_{h\alpha}$ の定義は一義的に決まるのではなく、式 (3) 左辺の移流項が、式 (4) を式 (3) に代入した際に現れる第二項と一致すればよいことである。また、平均化された動力的条件は

$$\nu \langle S_{12} \rangle|_H - \tau_{12}|_H = 0 \quad (5)$$

$$\nu \langle S_{23} \rangle|_H - \tau_{23}|_H = 0 \quad (6)$$

$$\langle p \rangle|_H = -g_2 \langle h \rangle + 2\nu \langle S_{22} \rangle|_H - \tau_{22}|_H \quad (7)$$

となる。ここで、 τ_{ij} 及び $\langle S_{ij} \rangle$ は

$$\tau_{ij} \equiv \langle u_i u_j \rangle - \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle \quad (8)$$

$$\langle S_{ij} \rangle \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) \quad (9)$$

で表され、それぞれ通常の SGS 応力及び空間平均化された速度場に対するひずみ速度テンソルである。このように動力的条件中には新たな付加項は現れない。

(2) 水面平均による SGS 項のモデル化

式 (2) は分子拡散項を含まないスカラー量の二次元場での輸送方程式に類似している。したがって $\tau_{h\alpha}$ のモデルとしてまず考えられるのは、フィルター平均量 $\langle h \rangle$ の勾配に比例する勾配拡散型モデル

$$\tau_{h\alpha} = -\gamma_{\text{SGS}} \frac{\partial \langle h \rangle}{\partial x_\alpha} \quad (10)$$

である。ここで、 γ_{SGS} は SGS 拡散係数であり、これ自身がモデル化される必要があるが、スカラー拡散と同様の Reynolds アナロジーに相当する相似則が成り立つとすれば、SGS 渦動粘性係数 ν_{SGS} に比例するとして

$$\gamma_{\text{SGS}} = C_{h1} \nu_{\text{SGS}} \quad (11)$$

と置くことが考えられる。 ν_{SGS} に対して Smagorinsky モデルを用いると

$$\nu_{\text{SGS}} = (C_S \Delta)^2 \sqrt{2 \langle S_{\alpha\beta} \rangle \langle S_{\alpha\beta} \rangle} \quad (12)$$

のようになる。ここで C_S は Smagorinsky 定数、 $\Delta = \sqrt{\Delta x_1 \Delta x_3}$ であり、フィルターサイズ及びひずみ速度テンソルが水平二次元空間上で与えられていることに注意されたい。

次に考えられるのは、やはり SGS 応力のモデルに用いられるスケール相似則⁴⁾ である。これによると

$$\tau_{h\alpha} = C_B (\langle \langle h \rangle \langle u_\alpha \rangle \rangle - \langle \langle h \rangle \rangle \langle \langle u_\alpha \rangle \rangle) \quad (13)$$

と置くことができる。ここで C_B は Bardina 定数に相当する定数で、SGS 応力と同様に 1 に近い値をとると予想される。

また、式 (3) には現れないので $\langle h \rangle$ の計算には必要ないが、水面変動の算定の際には SGS 成分 $\tau_{hh} \equiv \langle h^2 \rangle - \langle h \rangle^2$ に対するモデルが必要となる。ここでは、この項についても以下のような Smagorinsky モデルに倣ったモデルを提案する。

$$\tau_{hh} = (C_{h2} \Delta)^2 \sqrt{\frac{\partial \langle h \rangle}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \langle h \rangle}{\partial x_\alpha}} \quad (14)$$

モデル定数 C_{h2} の値は DNS データベースより推定可能である。

3. DNS データによる SGS モデルの検証

(1) DNS データの概要

本章では、著者らによって行われた常流開水路等流 DNS⁵⁾ より得られた瞬時場に空間フィルター操作を施し、先に述べた新たな SGS 相関項 $\tau_{h\alpha}$ の基本特性を検討する。上述の DNS は、底面摩擦速度 u_τ 及び平均水深 H に基づく Reynolds 数 Re_τ が 180 で、Froude 数 $Fr = U_m / \sqrt{gH}$ は 0.3, 0.6 及び 0.9 の三種類の流れについて行われており、Reynolds 数は低いものの常流状態はほぼ全域がカバーされているため、 $\tau_{h\alpha}$ についてはフィルターサイズ依存性のみならず、Froude 数依存性についても検討することが可能である。

(2) 空間フィルタリング

DNS データに施す空間フィルターには、次式で与えられる二次元 Gaussian フィルターを用いる。

$$G(r_1, r_3) = \frac{6}{\pi \Delta_{F1} \Delta_{F3}} \exp \left(\frac{-6r_1^2}{\Delta_{F1}^2} + \frac{-6r_3^2}{\Delta_{F3}^2} \right) \quad (15)$$

ただし、 $r_\alpha = \xi_\alpha - x_\alpha$ で、 ξ_α は x_α 方向の空間積分変数、 $\Delta_{F\alpha}$ はフィルター幅を示す。本報では、 $\Delta_{F\alpha}^+$ と DNS 計算格子幅 $(\Delta_1^+, \Delta_3^+) = (9, 4.5)$ との比 $r \equiv$

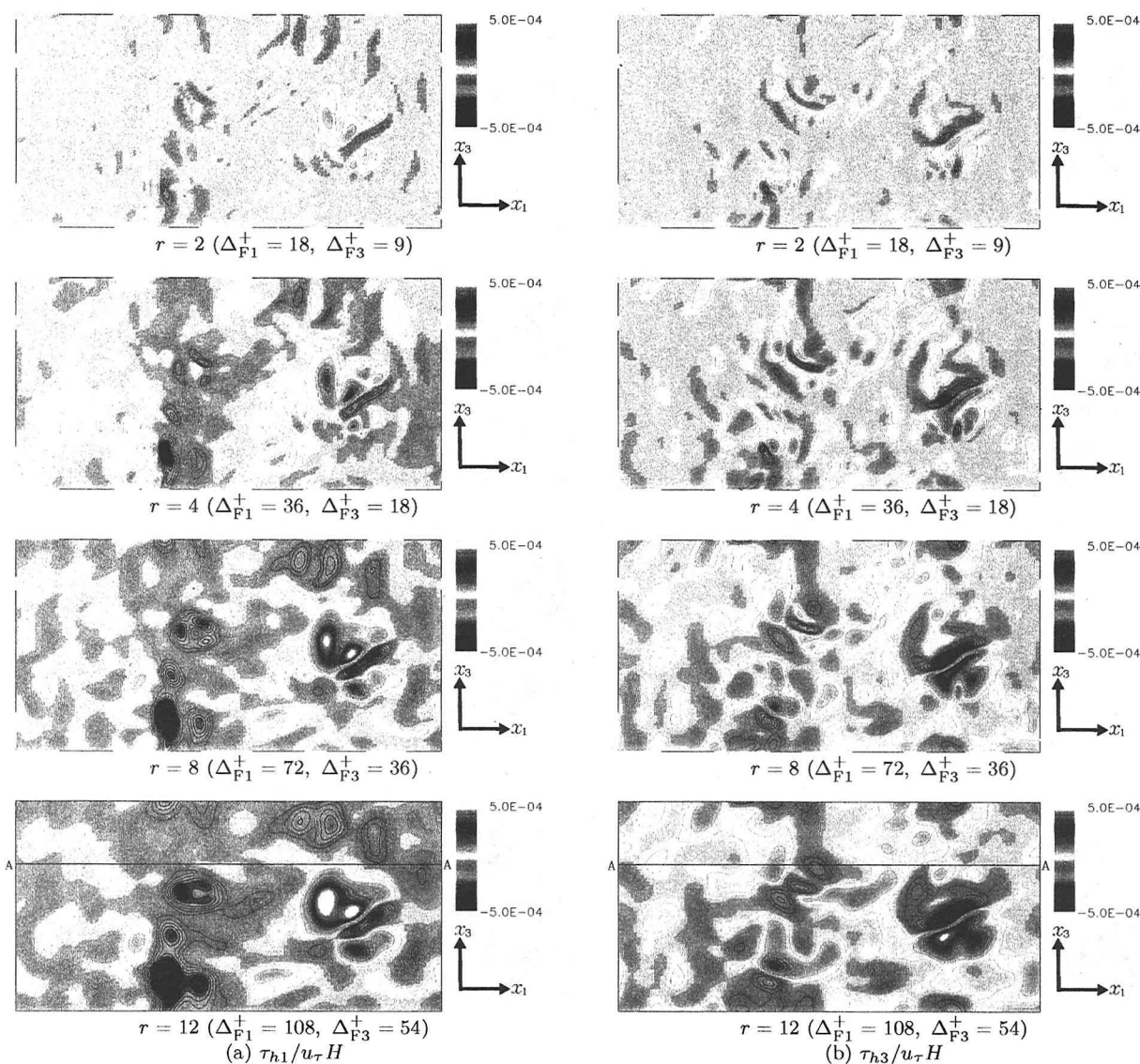


図-2 瞬時 DNS データに対する陽的フィルター操作による SGS 項 $\tau_{h\alpha}$ の評価 ($Fr = 0.3$)

$\Delta F_\alpha / \Delta_\alpha$ が 2, 4, 8, 12 となる四種類のサイズの異なるフィルターを用いて空間平均値が算出された。空間平均値は、 $r = 4, 8, 12$ の場合にはフィルターサイズに比べて十分広い領域内での Simpson 公式に基づく畳み込み積分によって評価されたが、 $r = 2$ の場合には格子幅に比べてフィルター幅が十分に大きくないため、非フィルター関数の Taylor 展開より得られる

$$\langle f \rangle = f + \frac{\Delta_\alpha^2}{24} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} + \dots \quad (16)$$

を用いて解析的に積分がなされた。

(3) SGS 項の基本特性

図-2, 3 は $Fr = 0.3$ 及び 0.9 の瞬時 DNS データ⁵⁾ から前節の方法によって求められた SGS 項 τ_{h1} , τ_{h3} の瞬時分布の一例である。値は底面平均摩擦速度 u_τ 及び H で無次元化されている。 τ_{h1} と τ_{h3} の間には、値あるいは分布特性についても有意な差は確認されず、双方ともフィルターサイズが大きくなるにつれて、値及びその変化の長さスケールが大きくなるのが認められる。 $r = 8$ と $r = 12$ においては、変化のスケールは増

大しているものの値そのものには顕著な差は見られないので、 $\tau_{h\alpha}$ は $r = 10$ 前後で極大値をとると推察される。また、 $Fr = 0.9$ の場合には $Fr = 0.3$ に比べて値は四倍程度となり、水面変動のフィルタリング効果は Froude 数の増加で大きく変化することがわかるが、変動の長さスケールはフィルターサイズに支配されるためか、Froude 数依存性は殆ど見られない。さらに、流れ方向のフィルター幅が横断方向の二倍であるにも拘わらず、変動スケールには方向性が見られないことが注目される。これはフィルター幅が方向によって異なっても一つのフィルターサイズが存在する事を示唆しており、このことは面平均の場合に二方向の格子幅の相乗平均を用いるモデルの正当性を意味している。

これらの SGS 項が、空間平均された $\langle h \rangle$ の時間発展(式(3))に対してどの程度の影響を及ぼすのかを検討するため、図-2 中の断面 A-A、図-3 中の断面 C-C における式(3)中の各項の分布を図-4(a),(b)にそれぞれ示す。これより、時間変化項と移流項がほぼバランスするが、これらの相違を補う $\langle u_2 \rangle$ の寄与も無視できないことがわかる。また、SGS 項はこれらに比べると値は小さいが、局所的に増減する様子が確認される。

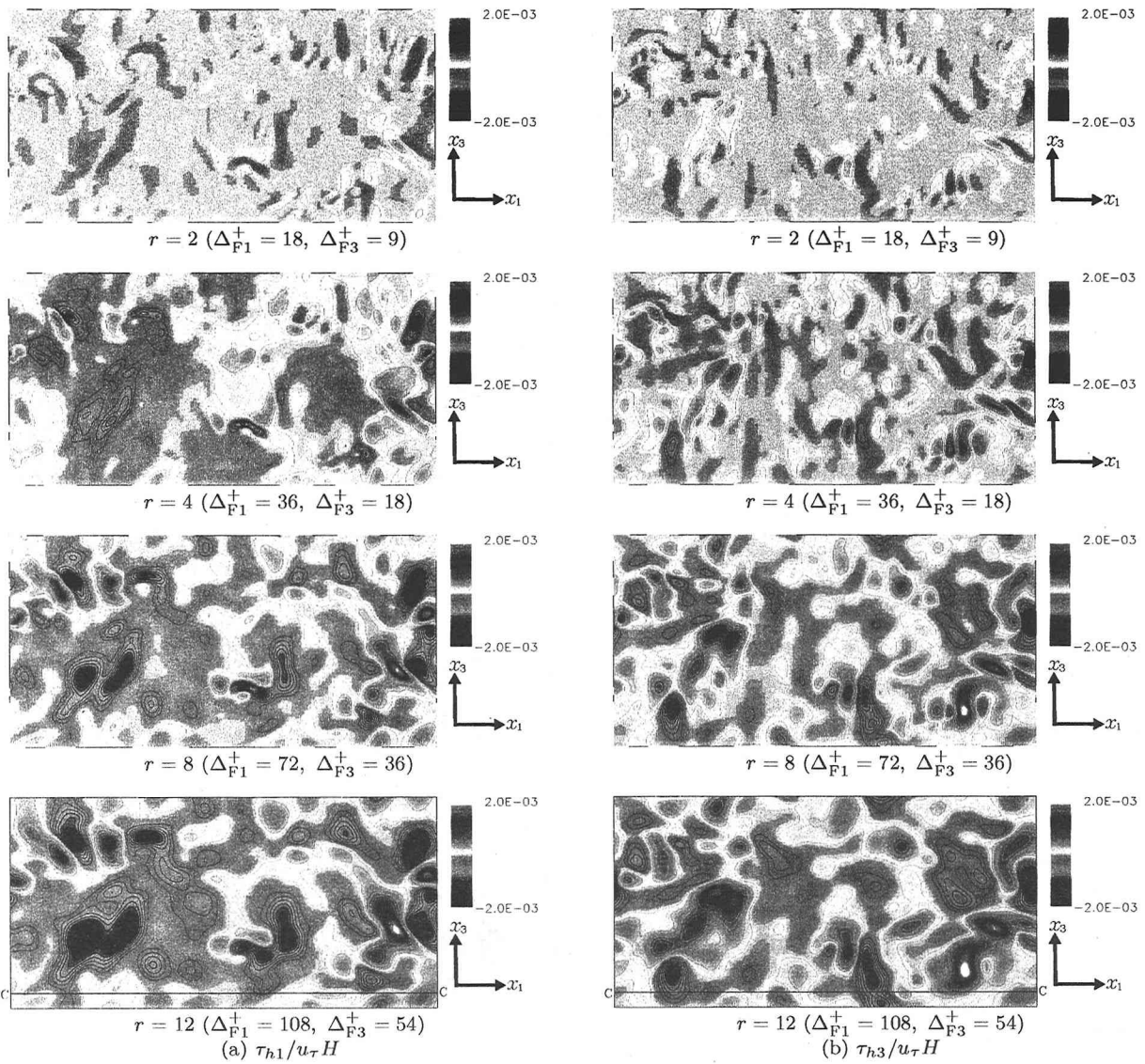


図-3 瞬時 DNS データに対する陽的フィルター操作による SGS 項 $\tau_{h\alpha}$ の評価 ($Fr = 0.9$)

(4) SGS 項モデルの検証

図-2,3 で示した $r = 12$ のデータをターゲットとして、勾配拡散モデル (式 (12)) 及びスケール相似則 (式 (13)) により算定された τ_{h1} , τ_{h3} の分布を、DNS データからの直接評価 (式 (4)) と共に図-5,6 に示す。ただし、両モデルにおいて比例係数部分は無視されていることに注意されたい。図より、両モデルとも概ね DNS データからの直接算出値が示すピーク値の分布等の大まかな特性は捉えられていることが確認され、これらより勾配拡散モデルの係数 C_{h1} は約 5.0、スケール相似則モデルの C_B は 2.0 程度の値をとることがわかる。しかしながら、スケール相似則によって推定された $\tau_{h\alpha}$ は DNS データからの直接評価と非常に良い相関を示しているのに対し、勾配拡散モデルではピーク値の符号が逆になっている部分が多く、再現性が低いことが認められる。ここで示した瞬間データから算出された、各モデルと DNS 結果との相関係数は、スケール相似則の場合には 0.8 以上、勾配拡散モデルの場合には 0.5 以下であり、これは Froude 数に殆ど依存しない。勾配拡散モデルの不一致の原因を検討するために、 $\langle h \rangle$ の勾配も同図に示されているが、これを DNS データからの直接

算出値と比較すると、変動の大きい領域で $\langle h \rangle$ の勾配も大きく変化しているものの局所的な符号が一致しておらず、拡散係数が負になる、SGS 応力の場合のバックスキッターに相当する現象が発生していることがわかる。これらの結果からは、スケール相似則モデルが勾配拡散モデルに比べ優れていると言えるが、次章で考察するように、この a priori test の結果が必ずしも一般的な LES 計算での有用性を意味しているとは限らず、その判断には実際の LES 計算⁶⁾が必要である。

4. モデルの考察

前章で行われた二つの SGS 項モデルに対する a priori test では、スケール相似則の有用性が確認された。スケール相似モデルは散逸性を持たないため、通常の SGS 応力項のモデリングの場合には、散逸性を持つ渦粘性モデルにサブグリッドスケールのエネルギー散逸を担わせる混合モデルの利用が推奨されている。一方、水面変動の SGS 項の場合には変動エネルギーは $\langle h \rangle^2$ であり、表面張力が無視できる場合には、その時間発展方程式には散逸項が含まれず、必ずしも散逸メカニズ

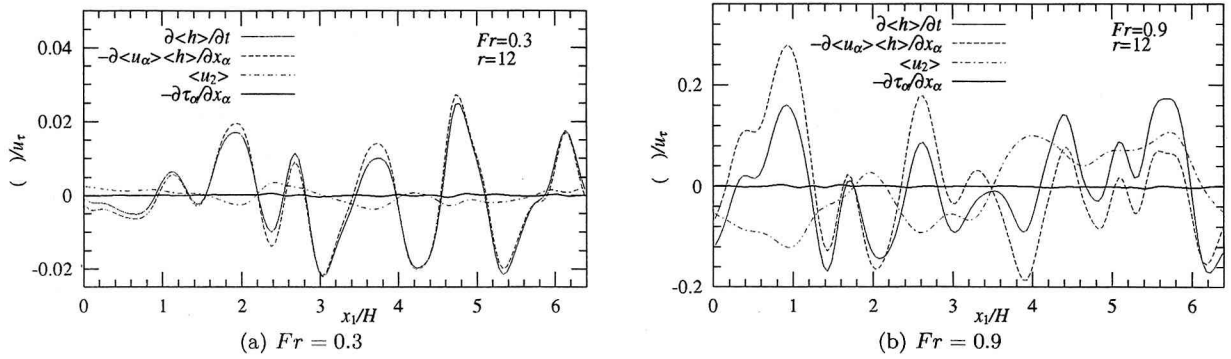


図-4 $\langle h \rangle$ の時間発展方程式 (式 (3)) 中の各項の分布

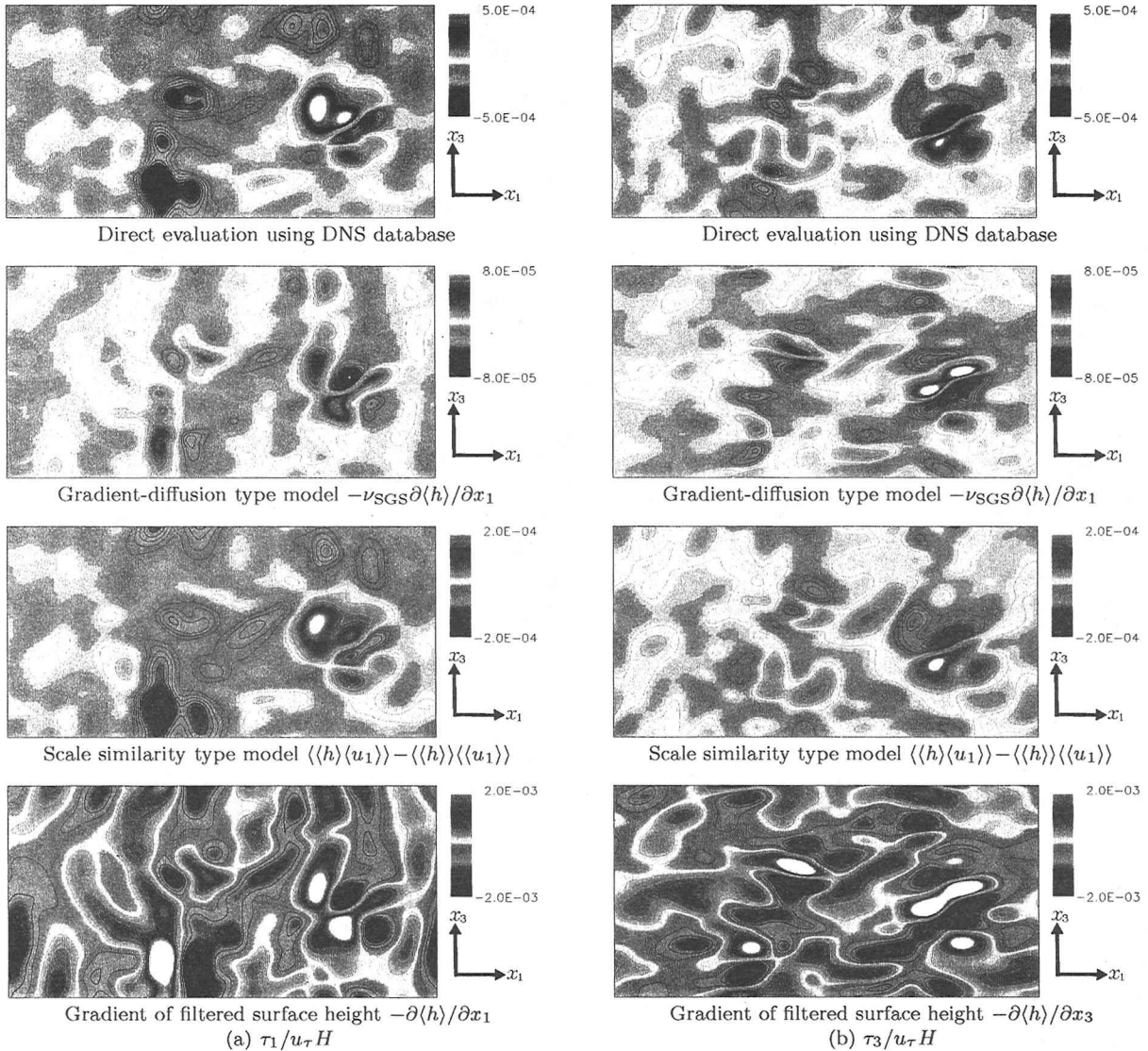
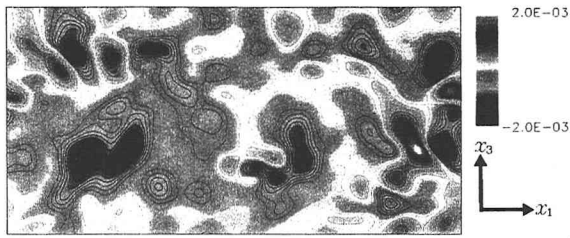


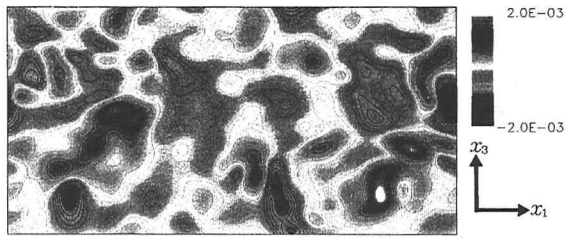
図-5 $\tau_{h\alpha}$ のモデルに対する a priori test ($Fr = 0.3$)

ムは必要とされない. 従ってこの場合には, スケール相似則単独でのモデルも考えられるが, 注意すべき点は, 本検証に用いられた DNS データは Reynolds 数が低く, 殆どの変動成分が狭い波数領域に集中していることである. すなわちフィルター操作でカットされた変動成分は, 波数空間でフィルター量である GS (Grid Scale) 成分に非常に近いので, Reynolds 数が低い流れ場では高 Reynolds 数流れに比べてスケール相似則が示す相似性がより強まると考えられる. また対象とした

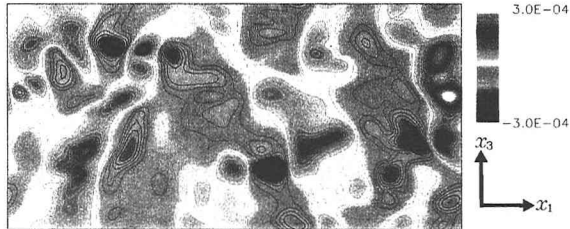
流れ場は完全発達した等流であるため Reynolds 平均量は水平方向には一様で, フィルターサイズがゼロ及び無限大の両極で, SGS 相関項が消滅するという特殊な流れ場であること, 常流であるために水面変動が平均水深に比べて微小であること, 及び Reynolds 数が低い場合運動の最大スケールと最小スケールの比がそれほど大きくないことにも留意されるべきである. 加減速や非定常性を伴うような, 実際に水工学上問題となる高 Reynolds 数流れ場では SGS 応力が支配的になる場



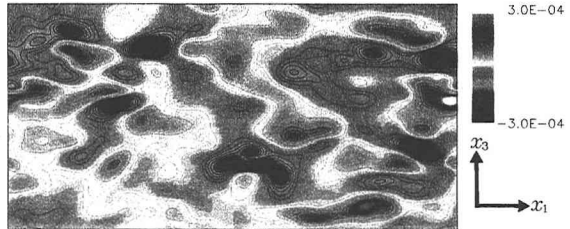
Direct evaluation using DNS database



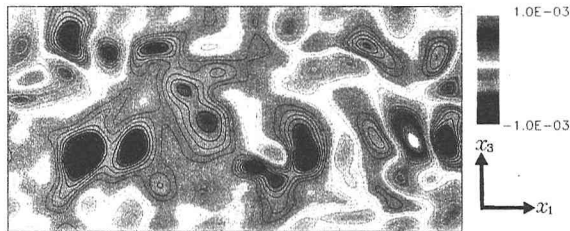
Direct evaluation using DNS database



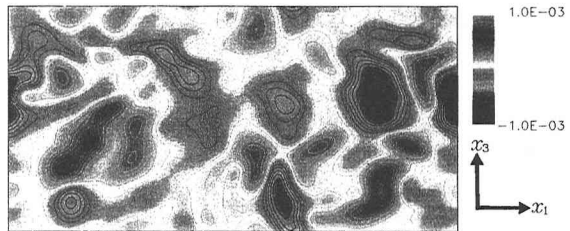
Gradient-diffusion type model $-\nu_{SGS}\partial(h)/\partial x_1$



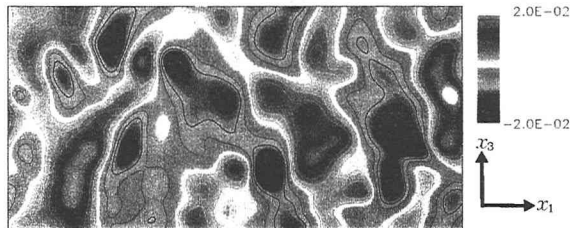
Gradient-diffusion type model $-\nu_{SGS}\partial(h)/\partial x_3$



Scale similarity type model $\langle\langle h \rangle \langle u_1 \rangle \rangle - \langle\langle h \rangle \langle u_1 \rangle \rangle$

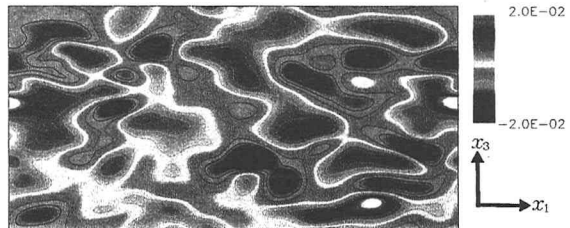


Scale similarity type model $\langle\langle h \rangle \langle u_1 \rangle \rangle - \langle\langle h \rangle \langle u_1 \rangle \rangle$



Gradient of filtered surface height $-\partial(h)/\partial x_1$

(a) $\tau_{h1}/u_\tau H$



Gradient of filtered surface height $-\partial(h)/\partial x_3$

(b) $\tau_{h3}/u_\tau H$

図-6 $\tau_{h\alpha}$ のモデルに対する a priori test ($Fr = 0.9$)

合があり、そこでは本報で取り上げた SGS 相関項が重要な役割を果たす可能性は十分にあると考えられる。これらについては今後更に詳しい検討が必要である。

5. 結論

常流開水路乱流の DNS データベースにフィルター操作を施すことにより、水面変動を伴う LES 計算においてモデル化が必要となる新たな SGS 相関項の基本特性を検討し、提案された SGS モデルの a priori test を行った。本検証に用いられた DNS データは低 Reynolds 数、低 Froude 数でかつ等流であるため、算出された SGS 相関項の値自体は小さいが、モデル化手法としては、スケール相似則に基づくモデルが勾配拡散近似に比べて、DNS データとの相関が非常に高いことが確認された。また、水面変動の時間発展方程式では拡散項が存在しないため、上述の SGS 相関項のモデリングには運動方程式中の SGS 応力モデリングにおいてエネルギー散逸を担うために必要な渦粘性モデルの併用は必要なく、スケール相似モデル単独の利用が可能である。ただし、本報でのモデル検証は DNS データベースを用いた a priori test であり、厳密なモデル性能評価には、実際に LES 計算を用いた検証が必要である。

参考文献

- 1) Hodges, B.R. and Street, R.L.: On simulation of turbulence nonlinear free-surface flows, *J. Comput. Phys.*, Vol.151, pp.425-457, 1999.
- 2) Dimas, A.A. and Fialkowski, L.T.: Large-wave simulation (LWS) of free-surface flows developing weak spilling breaking waves, *J. Comput. Phys.*, Vol.159, pp.172-196, 2000.
- 3) Shen, L. and Yue, D.K.P.: Large-eddy simulation of free-surface turbulence, *J. Fluid Mech.*, Vol.440, pp.75-116, 2001.
- 4) Bardina, J., Ferziger, J. and Reynolds, W.C.: Improved turbulence models based on large-eddy simulation, *AIAA Paper*, 80-1357, 1980.
- 5) 横嶋 哲, 中山 昭彦: DNS による水面近傍の乱流構造に対する Froude 数の影響の検討, 土木学会 応用力学論文集, Vol.4, pp.619-628, 2001.
- 6) Nakayama, A. and Yokojima, S.: LES of open-channel flow with free-surface fluctuation, *Annual J. Hydraulic Eng. JSCE*, Vol.46 (投稿中).

(2001. 10. 1 受付)