

連続式分解型地下水浸透計算モデルにおける 安定性と精度の検討

EXAMINATIONS ON THE STABILITY AND ACCURACY OF A CONTINUITY-SPLITTING SUBSURFACE FLOW MODEL

琴浦 毅¹・真野 明²

Tsuyoshi KOTOURA and Akira MANO

¹ 学生員 東北大学大学院工学研究科修士課程 (〒980-8579 宮城県仙台市青葉区青葉 06)

² 正会員 工博 東北大学教授 工学研究科附属災害制御研究センター (〒980-8579 宮城県仙台市青葉区青葉 06)

In this study, the accuracy and stability of a subsurface flow model previously reported by the authors was examined. The model is based on splitting the flow continuity equation into vertical and horizontal components. Vertical flow is computed by Richard's equation in the unsaturated zone, and lateral flow is computed by Darcy's law, assuming that most of the lateral flow occurs in the saturated zone. In joining these two parts of the continuity equation, a systematic error occurs, but this can be reduced by introducing a correction factor to the height of the vertical flow results. Use of this factor also improves the stability of the model, which is stable for most natural groundwater conditions.

Key Words: subsurface flow, continuity equation split, groundwater

1. はじめに

近年局地的豪雨が頻繁に発生しそれに伴い地滑りや洪水などの災害が発生し, 大きな被害が報告されている。一方で, 洪水流は山地から栄養塩類や土砂を海域まで運搬する重要な役割を担っている。これらは一連の現象であり, これらを同じ解析手法で検討できる分布型の流出解析モデルの開発が競って行われている。

中村ら¹⁾は土壌中を不浸透域, 浸透域, 帯水域に分割し, それぞれの域に対して支配方程式を設定し, また水平方向と鉛直方向の透水係数を変化させて用いる流域水循環系解析モデルを提案している。また, この計算法では入力パラメーターとして地下水揚水や上下水道の漏水, 土地利用区分に対応する浸透能を用いることにより構成されていて, 海老川流域を対象に適用し, 良好な結果を得ている。

天口ら²⁾は従来集中型モデルで用いられていた SMPT モデル (Soil Moisture Parameter Tank Model) を分布型水循環モデルに用いることを提案し, 東川上流試験流域に適用することによってその再現性を確認している。

しかし, これらの分布型モデルでは地下水計算を行うときに2次元の支配方程式をそのまま適用して計算を行っている。その結果は良好であるものの, 大きな流域に適用する場合, 多次元の方程式を直接解析する必要があるため計算時間が非常に長くなる。そこで筆者らは土壌水分の連続式を良い近似で満足しながら簡単に計算できる計算法を提案し, 水理実験と比較を行い再現性の検討を行った。また, 阿武隈川流域を対象とした分布型モデルに適用して大きな流域において良好な結果が得られることから, その実用性を確認した³⁾。しかし, このときに用いていた水分特性曲線あてはめ式は飽和域と不飽和域を連続して表現できるものを用いていなかったこと, 湿潤面が地表面から降下する場合の計算法に不明瞭な点が含まれているなどの指摘があった。

本論文では地下水面付近の飽和域, 不飽和域を連続して表現できる水分特性曲線あてはめ式に変更し, 豪雨時に湿潤面が地表面から降下する場合にも計算ができるように改良した。また, 良い精度の結果を安定して得るために, 計算法の再検討を行い, 安定した計算ができる範囲と精度の良い結果を得るための条件を解明した。

2. 地下水分モデル

(1) 連続式の分解と補正計算

地下水分の挙動の計算を筆者らが開発したモデルを参考にして行う³⁾。地下における座標軸を地下水の水平流下方向を x 軸、鉛直上方に z 軸とし、地表面の位置を z_s 、地下水面の位置を z_w 、不透水層の位置を z_b と定義し、 (x, z) 方向の流速を (u, w) 、土壌水分含水率を θ で表す。

側方流動を無視し、鉛直方向の浸透のみを考えた水分連続式の θ を θ_1 とすると、

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = -\frac{\partial w}{\partial z} \quad \begin{cases} z = z_b & w = 0 \\ z = z_s & w = w_s \end{cases} \quad (1)$$

この(1)式の両辺を z_b から z_s まで積分すると、

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial t} = -w_s \quad [\Theta_1 \equiv \int_{z_b}^{z_s} \theta_1 dz \text{ を定義}] \quad (2)$$

ここで、 w_s : 地表面の水分移動量を定義した。

次に側方流動を考える。(1)式を2次元の連続式に代入して整理すると、

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \theta_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial (\theta - \theta_1)}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad (3)$$

ここで、 $\theta_2 \equiv \theta - \theta_1$ とすると、これは水平方向流動で生じる水分の変化分になる。(3)式から、

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad (4)$$

(4)式を z_b から z_s まで積分すると以下の式になる。

$$\frac{\partial \Theta_2}{\partial t} = -\frac{\partial Q_g}{\partial x} \quad [\Theta_2 \equiv \int_{z_b}^{z_s} \theta_2 dz \text{ を定義}] \quad (5)$$

ここで、 Q_g は側方浸透流量である。

(4)式から分かるように θ_2 は側方方向流動で生じる水分変化である。水平方向流動は飽和層内での流動なので、 θ_2 は地下水面近くにおいて変化する。そこで側方流動により生じる地下水面付近の水分分布の変化を示すために、図-1 に示すように θ は θ_1 の分布形を変えないで、 z 方向に $c_g \times dt$ だけ平行移動しただけと仮定する。このとき Θ_2 、つまり側方流動の流入出の相違による水分変化量は、

$$\Theta_2 = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} c_g \cdot \delta \theta = c_g \cdot \delta (\theta_{\max} - \theta_{\min}) \quad (6)$$

と書くことができ、(5)式に代入すると、

$$c_g (\theta_{\max} - \theta_{\min}) = -\frac{\partial Q_g}{\partial x} \quad (7)$$

が得られ、これから以下の(8)式を得る。

$$c_g = -\frac{1}{\theta_{\max} - \theta_{\min}} \frac{\partial Q_g}{\partial x} \quad (8)$$

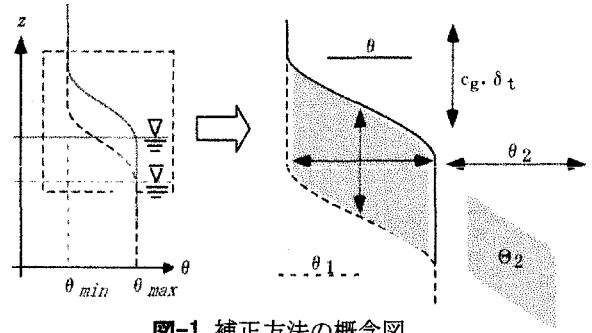


図-1 補正方法の概念図

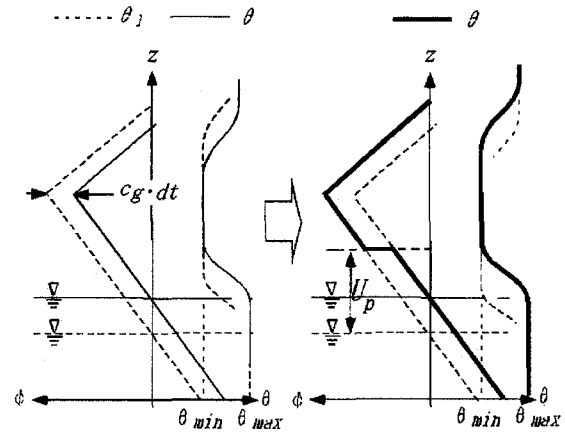


図-2 計算中における補正計算法

以上から $\partial Q_g / \partial x$ 、 $\theta_{\max} - \theta_{\min}$ が分かれば c_g を計算でき、このとき、

$$\theta_2 = -\frac{\partial \theta_1}{\partial z} c_g \cdot \delta \quad (9)$$

が与えられ、(10)式のように θ が得られる。

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = \theta_1 - \frac{\partial \theta_1}{\partial z} c_g \cdot \delta \quad (10)$$

この計算法を用いれば、鉛直方向のみの計算を行って得られた水分分布を、側方方向の浸透により得られる $c_g \times dt$ で補正計算を行うことで、2次元の浸透計算と同等の結果を得ることができる。側方方向の浸透により生じる水分変化量は、比較的求めやすい $\partial Q_g / \partial x$ から得られる c_g を用いて図-1 のように補正計算を行うことから、繰り返し計算を用いなくて直接 θ を知ることができ、地中水の計算を簡略化できるものである。

今回用いる計算法では θ_1 の分布を z 方向に $c_g \times dt$ だけ平行移動すると仮定して補正計算を行っているが、計算は ψ (ψ : 圧力水頭) を用いて行うため、補正を ψ に反映させなければならない。そこで、側方流動による水分変化が地下水面を $c_g \times dt$ だけ上げることを表しているので

$$\psi' = \psi + c_g dt \quad (11)$$

により補正する。この補正により地下水計算が簡易

に計算ができる一方で、土壌上部から湿潤面が降下するような浸透が生じている場合、図-2 左図に示す計算が行われてしまう。この時の土壌水分分布が θ_1 の場合、(11)式による補正を土壌全体で行うと、左図中における θ の分布を得る。土壌全体で(11)式による計算を行った結果、本来は側方浸透により水分変化が行っていない地表面付近も水分変化が起こる計算を行っている。そのため、図-1 右図に示すように元の地下水面からある高さ(ここで Up と定義)までは θ の ψ 分布を、 Up 以上では θ_1 の ψ 分布を用いることで、2次元浸透により変化する水分分布の最終的な計算結果を得る。

(2) 鉛直方向計算

不飽和域で生じる不飽和鉛直浸透計算における水分量を 2. (1) で定義したように θ_1 とする。 θ_1 の変化の計算は以下の 3 つの支配方程式(Richards の式 (12)式, Van Genuchten の式 (13), (14)式)を用いて Crank-Nicolson 法により差分計算を行った。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{d\theta}{dSe} \frac{dSe}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ k_z(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + 1 \right) \right\} \quad (12)$$

$$Se = \frac{\theta_s - \theta}{\theta_s - \theta_r} = \left\{ 1 + (\alpha\psi)^N \right\}^{-M} \quad (13)$$

$$k_z(\psi) = k_{so} \times Se^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 - (1 - Se^{\frac{1}{M}})^M \right\}^2 \quad (14)$$

ここで、 $k_z(\psi)$:不飽和透水係数、 θ_s :飽和体積含水率、 θ_r :残留含水率、 k_{so} :飽和透水係数、 Se :有効飽和度、 α, N は土壌特性を表す定数、また、 $M = 1 - 1/N$ である。

(3) 水平方向の計算

水平方向は飽和域でのみ浸透が起こると考えるためダルシー則(15)式を用いて求める。

$$Q_g = -k_{so} h i \quad (15)$$

ここで、 h は飽和層の厚さ、 i は動水勾配である。

この計算において土壌柱を深さ方向に分割したメッシュの中央が差分の中心であることを考慮に入れると、飽和層の厚さ h は以下に示す式で求める。

$$h = \psi_{bottom} + dz/2 \quad (16)$$

ここで、 ψ_{bottom} :最下層メッシュの圧力水頭、 dz :1メッシュあたりの厚さである。

3. 鉛直計算の安定性

厚さ 2m の土壌全体が飽和に到達するまでの時間を比較することで、パラメーター変化に対する安定性の検討を行った。支配方程式を陰解法で差分化し

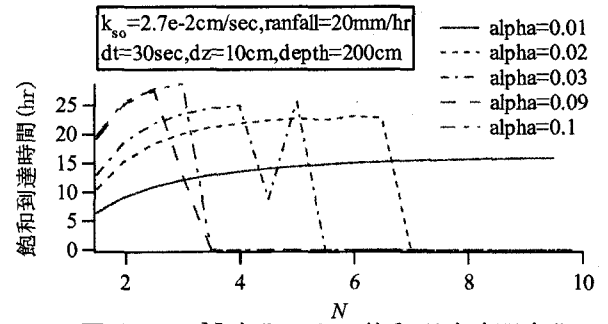


図-3 α, N 変化による飽和到達時間変化

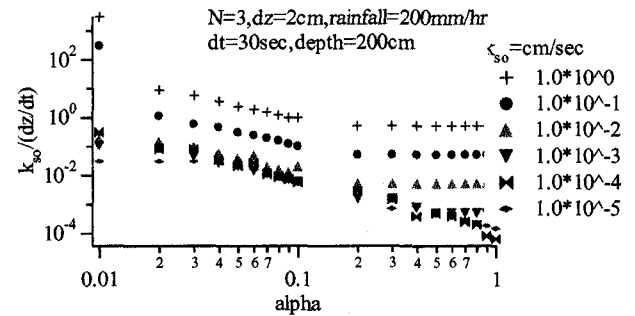


図-4 $\alpha, k_{so} / (dz/dt)$ 変化による安定性の変化

ているため、線形化した理論的な安定解析では常に安定という結果が出ている。しかし、実際には計算中で不安定が現れるためこれを検討した。この時の計算において地表面の浸透能については、第1層目が飽和し、第1層目の水分移動フラックスが上向き、もしくは水分移動が無い場合は0とを与え、それ以外は k_{so} を与えている。そして地表面の水分移動量は浸透能と降雨強度の小さいほうを採用する。

(1) α, N の影響

(12)~(14)式に含まれる α, N を変化させ比較をした結果が図-3 である。縦軸は土壌全体の飽和到達時間、横軸は N である。同じ土壌深さ、降雨条件であっても α, N の値によっては飽和到達時間が異なること、計算結果が安定しない場合があることが分かる。これは α, N の変化により変化する水分特性曲線において Se がほぼ 0 になる場所があり(12)式の左辺の分母に代入することで生じる不安定と考えられる。そのためある程度の飽和度を持った土壌に対して適用するのが安定して計算を行うためには望ましい。つまり地下水面からの距離や α, N により決定される水分特性曲線を検討する必要がある。

(2) 分割数、計算時間による変化

土壌柱を i_{max} 個に分割した時の 1 メッシュ高さを dz 、計算における時間 1 ステップを dt とし、 k_{so}, α を変化させて安定して計算が行える範囲を検討した。

図-4 で縦軸は $k_{so} / (dz/dt)$ で表される無次元パラメーター、横軸は α ($0.01 \leq \alpha \leq 1.0$) を用いて示し

ている。また、図中には k_{so} が $10^{-5} \sim 1.0$ cm/sec までのグラフを示した。これらのグラフで示される線から下の部分であれば安定して計算が行われることを示している。

(12)～(14)式で用いられる土壌パラメーターの α が大きくなるにつれて安定して計算が行える範囲が減少することが図-4 から確認できる。また、 k_{so} が変化により安定範囲の変化するものの、 $k_{so} < 10^{-2}$ では安定計算の範囲が同じであることが分かる。この原因として地表面の水分移動量が考えられる。

$k_{so} > \text{rain}$ の時は地表面から浸透する水分量は rain であるため k_{so} には依存せず dz/dt と rain との関係で安定性が決定し、 $k_{so} < \text{rain}$ の時は地表面から浸透する水分量は k_{so} なので $k_{so}/(dz/dt)$ の値により安定性が検討できることが分かる。

つまり、鉛直浸透計算の安定性は地表面の境界条件の安定条件に支配されることが分かった。

4. 2次元計算の精度検討

2次元計算は2に示す通り行うが、連続式を分解し計算した結果を合成する本計算法の精度と安定性の検討を行う。単位幅の土壌柱をコントロールボリュームとして考え、パラメーターの変化による Up の検討を行う。降雨や側方流入が土壌に浸透し、最下層から飽和することで側方流出が生じる2次元の水分移動現象が生じる。その時の現象を鉛直方向の計算結果を、 c_g を用いて地下水面から Up までの区間を(11)式による補正手法を行う本手法で地下の水分移動を計算する。この時、最も良い計算結果を得る Up の値を最適 Up とする。

(1) 最適 Up の決定 ($c_g < 0$)

土壌柱に対する水分流入は降雨のみを用いる。ここでは降雨により土壌柱全体が飽和しないという条件での検討を行う。

a) dz の変化による最適 Up の変化

dz を変化させた場合の最適 Up の変化を検討した。図-5 は $dz = 1\text{cm}$ として水分流入が降雨量の浸透のみの計算を行ったハイドログラフである。このときは地下水流出が発生し、側方流動により地下水面が減少するとき、つまり $c_g < 0$ のときの計算である。この図の中で Up が 58cm の時は流入と流出が釣りあい、良い結果をえることが分かる。また、それ以外の 57, 59cm についても流入量との誤差は 5% 以下となり、これらの値でも精度良い計算が行えているといえる。

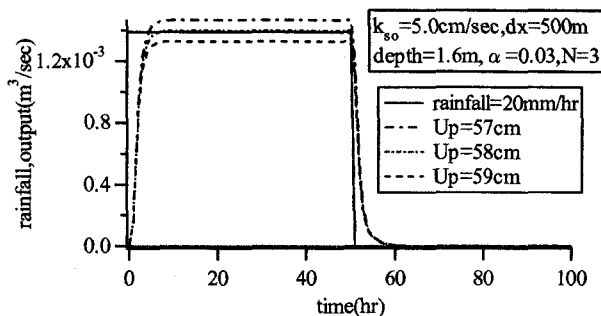


図-5 $dz = 1\text{cm}$ における最適 Up の検討

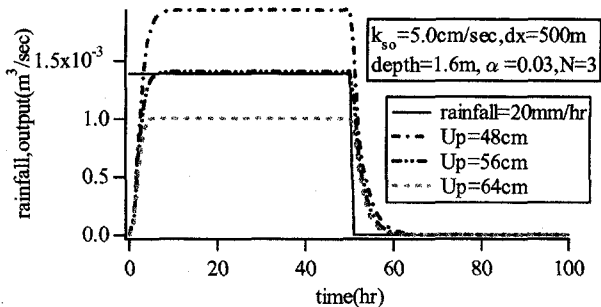


図-6 $dz = 8\text{cm}$ における最適 Up の検討

次に同じ深さを持つ土壌柱の分割数のみを変化させ $dz = 8\text{cm}$ とし、最適 Up を検討したのが図-6 である。この図は高さで 48, 56, 64cm を Up として計算したものを示している。この条件下では 56cm まで補正する時が最も精度良く計算できる。この高さは $dz = 1\text{cm}$ における 58cm に近い値になっている。

同様に同じ α, N, dt , 深さ, k_{so} を持つ土壌柱の分割数のみを変え、さまざまな dz を試した結果、全ての分割数において 58cm 付近を Up として計算を行えば良好な精度が得られることが分かった。また、最適 Up は水分特性曲線における $\theta = 50\%$ の圧力水頭 ψ_{50} との相関関係を持つことを確認している。つまり、最適 Up の値は土壌特性により決定されるものであり、同じ α, N, dt で計算をすると同じ程度の値であることが分かった。また、降雨量を変化させて検討した結果、降雨量によって最適 Up は変化しないことが確認した。

b) dt の変化による最適 Up の変化

α, N , 降雨強度, 土壌柱分割数を固定して、 dt を変化させた場合の最適 Up の変化を検討した。図-7 を見ると dt のみを変化させると最適 Up が変化することが分かる。また、 dt が小さくなるほど最適 Up が小さくなる傾向が見られ、この傾向は他の α, N を用いた場合にも見られた。しかし、 α, N によって求められる Up と dt の近似曲線と α, N の間には良い相関は確認できなかった。

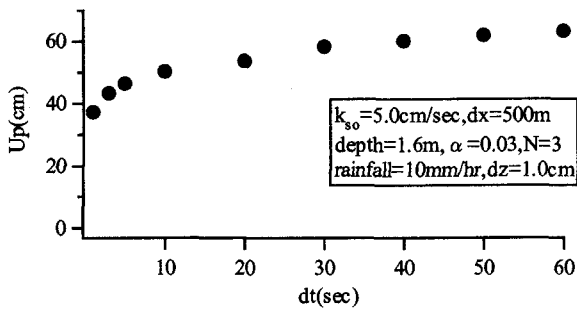


図-7 dt の変化による最適 Up の検討

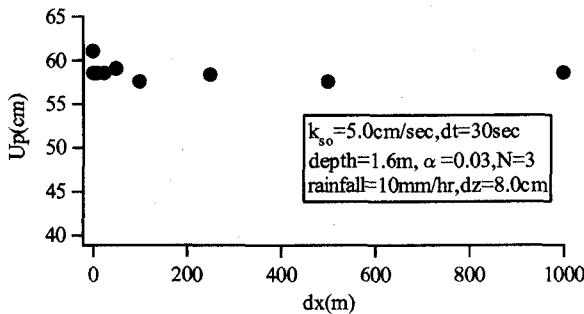


図-8 dx の変化による最適 Up の検討

c) dx の変化による最適 Up の変化

この補正計算の主要なパラメーターである c_g は (8) 式に示されるように dx に依存する。そこで、 dx の変化が最適 Up にどのように影響を及ぼすかを検討した。図-8 は dx の変化がほとんど最適 Up に影響を及ぼさないことを示している。つまり一つの dx に関して最適 Up を決定すれば他の dx にある程度の適用ができることが分かった。また、 dx の増加にとともに側方流出が増加し、すべての dx において c_g の値は等しくなることが確認された。

以上のことから最適 Up は 3. (1). a) に示すように ψ_{50} と関係があることから土壌特性の一つであると言える。また、 α, N, dt に応じて決定する必要があるが、その値は全ての dz, dx に利用できることが分かった。よって、この計算法を用いる場合は、計算の対象とする土壌の特性であるパラメーター α, N, dt とともに最適 Up を求めることで計算に活用できると分かった。

(2) 側方流入が存在する場合の補正計算

次に側方流入が存在し、かつ土壌全体が飽和しない条件での精度の検討を行う。

a) 側方流入のみが存在する場合 ($c_g > 0$)

側方流入が生じる場合では地下水面は上昇する。このときの現象は流入が最初は卓越するため (8) 式の c_g は正の値を持つ。また、土壌のヒステリシスは考慮していないため、 $c_g > 0$ の時にも 3. (1) で得

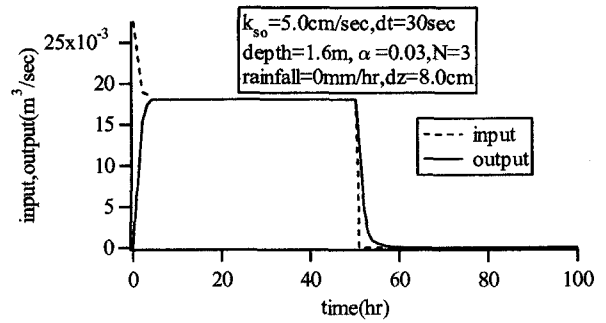


図-9 側方流入が存在する場合の計算結果

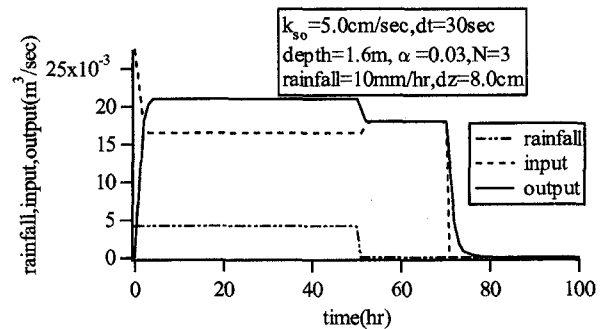


図-10 降雨、側方流入発生における計算結果

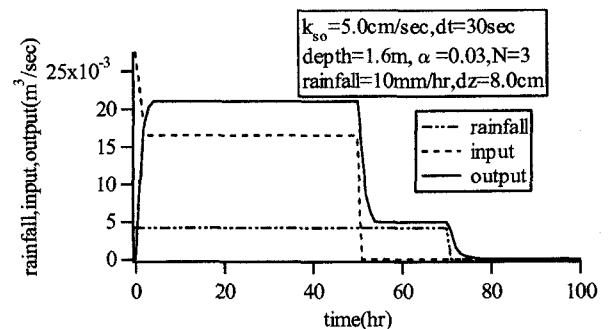


図-11 降雨、側方流入発生における計算結果

た $c_g < 0$ の時における最適 Up を用いる。

流入は土壌柱の隣に水位を一定に保った水槽を想定し、土壌柱と水槽との水位差により土壌柱に浸透する計算を行った。図-9 を見ると最初は流入が卓越しているため地下水面が上昇している。その後、流入と流出が釣り合う状態まで地下水面が上昇することが確認できる。また、流入を 50 時間で 0 にすると流出が卓越するため、地下水面が減少することが分かる。これらの側方流入出による地下水面変化の一連の現象を計算できることから、本計算法は湿潤過程、脱水過程においても良い結果を得ることが確認された。

b) 側方流入と降雨が存在する場合

水分流入が降雨、側方流入の 2 つ同時に発生する条件で計算を行った。図-10 を見ると、降雨、側方流入がどちらも発生しているときには、流出量は降雨量と流入量の合計流入量であり、先に降雨量が停止すると流出が側方流入に等しくなっていることが分かる。図-11 を見ると側方流入が先に停止した後

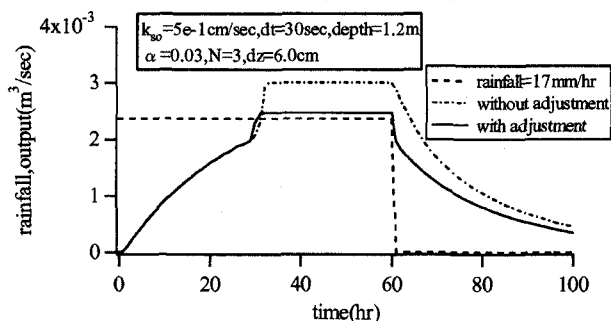


図-12 補正フラックスの適用との比較

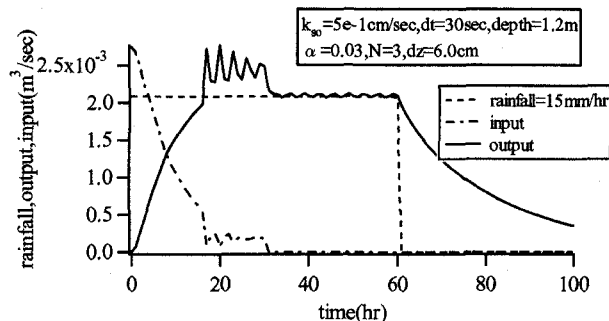


図-13 補正フラックスを直接用いた場合

は流出量が降雨量にほぼ等しくなることが分かる。

つまり、土壌全体が飽和しない条件において、本計算法は排水過程、湿潤過程に関わらず、また降雨、側方流入の条件によらず水分変化の現象を精度良く計算できることが確認された。

(3) 土壌全体が飽和する場合

地下水面が地表近くまで上昇した場合、最適 Up が地表面からはみ出してしまう。この場合、地下水面から最適 Up の高さまで(11)式による補正を行う本手法では、地表面以上の範囲では計算ができないため水分量の変化を計算できない。その結果、計算できない水分量が土壌中に残存し大きな誤差を発生するため、これを解決する方法を検討した。

土壌柱全体が飽和している状態が継続するなら地下水流出分と同量の水分が地表面から浸透しているはずである。そのため降雨量から地下水流出分を差し引いた値が超過降雨量として地表面に残ることになる。本手法においてこの現象を表現するために、地下水面が地表面に近づき土壌全体が飽和に近づいたときには、土壌柱の流入流出量の差を上向きの補正フラックスとして与えることで、降雨量からその差の水分量を差し引き計算することにした。この補正フラックスを用いる時と用いない時の比較結果を図-12に示す。

しかし、その補正フラックスを直接用いると、地下水面が地表に近づいた時に計算結果が振動を起こす現象が図-13に示すように存在する。そのため計算としての信頼性、安定性に問題が残る。そこで、振動を起こさず、精度の良い計算結果を得るために補正フラックスの検討を行った結果、補正フラックスを 1.05 で割り、排水過程にのみ補正フラックスを利用する時に図-14に示すように安定した結果が得られることが分かった。このことから補正フラックスを適切に用いれば降雨量から地表部に残る超過降雨量を計算でき、評価できることが分かった。つまり土壌全体が飽和しても、補正フラックスを導入することにより地表、地中を含めたコントロールボリュームにおいて、水分の連続性が満たされた計算が行えることが分かった。

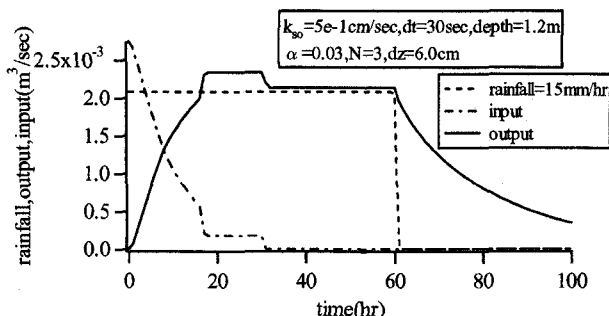


図-14 補正フラックスを 1.05 で割って用いた場合

5. まとめ

2次元の水分の挙動を計算することを目的とした計算法のうち、連続式を分解して1次元計算の結果を線形合成する本研究の計算法は、ラプラス方程式を直接解くSOR法のような繰り返し計算が必要ないため計算効率の向上とも言える。

また最適 Up を導入することで側方流入により生じる水分変化が地表面まで影響を及ぼさない計算が行え、地滑りを引き起こすような豪雨時において、浸潤面が地表面から降下する場合の計算が可能となった。さらに最適 Up が地表面から出る土壌全体が飽和に近づく場合においても、補正フラックスを導入することで計算が行えるようになった。

以上のことから本計算法を用いれば地下水を含めた3次元分布型モデル計算を簡易に短い時間で精度良く行える新しいモデルが提案できると期待できる。

参考文献

- 1) 中村茂, 中嶋規行, 忌部正博, Srikantha Herath: グリッド型水循環解析モデルの開発-海老川流域を対象として, 水工学論文集, 第45巻, pp.103-108, 2001.
- 2) 天口英雄, 安藤義久: SPTM モデルを用いた分布型水循環モデルの開発と東川上流試験流域への適用, 水工学論文集, 第45巻, pp.97-102, 2001.
- 3) 琴浦毅, 真野明: 地表および地下水流に対する擬似3次元洪水流出モデル, 水工学論文集, 第45巻, pp.121-126, 2001.

(2001. 10. 1受付)