

飽和不飽和浸透流モデルの周波数応答特性

FREQUENCY RESPONSE CHARACTERISTIC OF UNSATURATED FLOW EQUATION

田中 岳
Gaku TANAKA

正会員 博士(工学) 北海道大学助手 大学院工学研究科 (〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)

A mountainous drainage basin with forested soil is considered as a lowpass filter. Unsaturated flow equation is frequently substituted for runoff system in a mountain slope. This substitution is based on the analysis of actual rainfall-runoff phenomena there. This paper adopts a two-dimensional unsaturated flow equation as runoff system and theoretically derives its equivalent frequency transfer function. The validity of the proposed function is cross-checked by a simulation method. By using this function, it is possible to estimate a gain characteristic of substituted runoff system. The analytical result using frequency response method by the gain characteristic shows the response characteristic of this system for arbitrary rainfall input.

Key Words: frequency transfer function, frequency response, gain characteristic, unsaturated flow equation

1. はじめに

河川の氾濫原がある中・下流域に、人口や資産の大半が集中している我が国では、河川改修等の防災事業や洪水時の水防活動、避難誘導等の被害軽減対策を行う上で、より高い精度で実用的な流域全体の洪水流出を管理できるシステムの開発が切望されている。汎用的計算機が高速でかつ大容量演算を可能にする昨今、レーダ情報や国土数値情報(GIS)など、大量の情報を取り込んだ流出解析は容易になりつつある。しかしながら、その解析結果の信頼度には、入力データの不確定さを考えると依然として疑問が残るため、流出モデルの選定の際には、データの不確定さの範囲内に収まるように降雨流出現象を集中化(簡略化)したモデルが採用されている。

集中化の妥当性は、田中、藤田¹⁾が提案しているように、基本となるモデルと集中化されたモデルの周波数応答特性(ゲイン)を比較することで、任意の降雨波形に対するモデルの応答を検討することができる。流出モデルのゲインについては、既に藤田、工藤²⁾が、貯留型流出モデルについて推定している。さらに、田中、藤田¹⁾は、藤田、工藤²⁾の行った手法を用いて、実流域での再現性が高い貯留型流

出モデルについて、さらにKinematic Waveモデルについても検討している。

本研究では、森林土壌に覆われた山地斜面の流出過程において、土壌間隙の流れが支配的であることを踏まえ、山地斜面に2次元飽和不飽和浸透流モデルを採用して、その周波数伝達関数を誘導し、さらにそのゲインを推定する。

2. 2次元飽和不飽和浸透流モデル

地下水から土壌水の流れにまで拡張されたダルシー則と、地中水(地下水および土壌水)の連続の式とを組み合わせたRichards式は、図-1のように座標軸を鉛直下向きおよび流下方向を正とすれば、

$$c \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \quad (1)$$

$$v_x = -k \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \sin \zeta \right) \quad (2)$$

$$v_y = -k \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - \cos \zeta \right) \quad (3)$$

で表される。なお、 $c (= \partial \theta / \partial \psi)$: 比水分容量; θ : 体積含水率; ψ : 圧力水頭(サクション); v_x, v_y : x, y 方向のflux; k : 透水係数; ζ : 斜面勾配である。式(1)~(3)を解

くためには、土壌特性を表す式、 $\theta \sim \psi$ 関係および
 $k \sim \theta$ 関係が必要となる。本研究では、 $\theta \sim \psi$ 関係に
 Ahuja&Swartzendruberの提案した式(4)、さらに
 $k \sim \theta$ 関係には一般化Kozeny式(式(5))を採用する。

$$\theta = \frac{1}{1 + (a|\psi|)^n} (\theta_s - \theta_r) + \theta_r \quad (4)$$

$$k = k_s s_e^\eta \quad (5)$$

なお、 $s_e = (\theta - \theta_r) / (\theta_s - \theta_r)$; s_e : 有効飽和度; θ_s : 飽和含水率;
 θ_r : 気乾含水率; k_s : 飽和透水係数; a, n, η : 定数
 である。境界条件には、図-1のAB断面で速やかに
 降雨強度が y 方向のfluxへと変換され、AD, CD両断面
 で不透水層に接するとして下式を採用した。

$$AB: v_y|_{y=0} = r \cos \zeta; AD: v_x|_{x=0} = 0; CD: v_y|_{y=d} = 0$$

また、BC断面での境界条件には、下流端でサク
 ションが急激に変化しない条件として次式を採用し
 た。

$$BC: \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0$$

なお、 d : 土層厚; l : 斜面長である。

式(1)~(5)では、斜面形状に関するパラメータが l, d, ζ 、土壌特性に関するパラメータが $\theta_s, \theta_r, k_s, a, n, \eta$ と、その数が非常に多い。ここで、次式を用いて
 式(1)~(5)を無次元変量で表し、パラメータの集約化
 を図る。変数($\Psi, K, X, Y, V_x, V_y, \Theta, T$)は、それぞ
 れ次元を有する変数($\psi, k, x, y, v_x, v_y, \theta, t$)の無次
 元変量を表している。

$$\Psi = \psi_* \Psi, \quad k = k_* K, \quad x = x_* X, \quad y = y_* Y,$$

$$v_x = v_{x*} V_x, \quad v_y = v_{y*} V_y, \quad \theta = \theta_* \Theta, \quad t = t_* T$$

無次元化基準量(添え字*)には、次式を採用した。

$$\psi_* = d, \quad k_* = k_s, \quad x_* = l, \quad y_* = d, \quad v_{x*} = x_* v_{y*} / y_*,$$

$$v_{y*} = \bar{r} \cos \zeta, \quad \theta_* = \theta_s - \theta_r, \quad t_* = y_* \theta_* / k_*, \quad \bar{r}: \text{平均降雨強度.}$$

結果のみを示すと、以下の通りである。

$$C \frac{\partial \Psi}{\partial T} = -\alpha \left(\frac{\partial V_x}{\partial X} + \frac{\partial V_y}{\partial Y} \right) \quad (6)$$

$$V_x = -\frac{\beta^2}{\alpha} K \left(\frac{\partial \Psi}{\partial X} - \frac{1}{\beta} \sin \zeta \right) \quad (7)$$

$$V_y = -\frac{1}{\alpha} K \left(\frac{\partial \Psi}{\partial Y} - \cos \zeta \right) \quad (8)$$

$$\Theta = \frac{1}{1 + (\gamma |\Psi|)^n} + \Theta_r \quad (9)$$

$$K = \left\{ \frac{1}{1 + (\gamma |\Psi|)^n} \right\}^\eta \quad (10)$$

なお、 $\theta_r = \theta_* \Theta_r, C = \partial \Theta / \partial \Psi, \alpha = v_{y*} / k_*, \beta = y_* / x_*, \gamma = a \psi_*$
 ある。このとき、境界条件は、

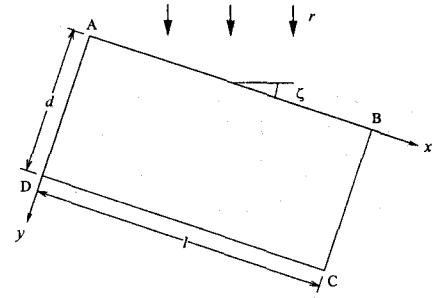


図-1 モデル化された山地小流域の斜面

$$AB: V_y|_{y=0} = R;$$

$$AD: V_x|_{x=0} = 0;$$

$$CD: V_y|_{y=1} = 0;$$

$$BC: \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right|_{x=1} = 0$$

ただし、 $r = r_* R, r_* = \bar{r}$ 。以後、式(6)~(10)を基礎式と
 して取り扱い、土壌特性の異方性およびヒステリシ
 ス現象は無視して解析を進める。

3. 基礎理論

一般に、線形システム T_l において、実数正弦状波
 $r = \bar{r} + A \sin(\omega t)$ (A : 振幅; ω : 角周波数)を複素数表現し
 た(複素正弦状波)

$$r = \bar{r} + A e^{j\omega t} \quad (11)$$

を入力とすれば、その出力は次式のように表される。

$$T_l[\bar{r} + A e^{j\omega t}] = T_l[\bar{r}] + H(j\omega) e^{j\omega t} \quad (12)$$

$H(j\omega)$: 周波数伝達関数

一方、本論文で取り扱われる降雨流出系は、その応
 答特性が弱い非線形性を示し、また高調波成分を無
 視できるような性質を有する。従って、降雨流出系
 のような場合、非線形システム T_m であっても周波
 数伝達関数(等価周波数伝達関数)を用いて、その出
 力を次式のように定義することができる。

$$T_m[\bar{r} + A e^{j\omega t}] \approx T_m[\bar{r}] + H(j\omega) e^{j\omega t} \quad (13)$$

本研究では、式(6)~(10)を基礎式とした2次元飽和不
 飽和浸透流モデルを用いて、AB断面(図-1)での y 方
 向のfluxを入力とし、BC断面での x 方向のfluxを出
 力とした場合の等価周波数伝達関数 $H(j\Omega)$ を求める。

無次元変量で表された複素正弦状波

$$R = \bar{R} + A^{no} e^{j\Omega T} \quad (14)$$

(ただし、 $\omega = \omega_* \Omega, \omega_* = 1/t_*$ 。)がAB断面での入力とな
 れば、サクシオン、透水係数、 X, Y 方向のfluxお
 よび比水分容量は、それぞれ

$$\Psi(X, Y, T) = \bar{\Psi}(X, Y) + \tilde{\Psi}(X, Y) e^{j\Omega T} \quad (15)$$

$$K(X, Y, T) = \bar{K}(X, Y) + \tilde{K}(X, Y) e^{j\Omega T} \quad (16)$$

$$V_x(X,Y,T)=\bar{V}_x(X,Y)+\tilde{V}_x(X,Y)e^{j\Omega T} \quad (17)$$

$$V_y(X,Y,T)=\bar{V}_y(X,Y)+\tilde{V}_y(X,Y)e^{j\Omega T} \quad (18)$$

$$C(X,Y,T)=\bar{C}(X,Y)+\tilde{C}(X,Y)e^{j\Omega T} \quad (19)$$

のように表される(誘導過程については、付録1参照)。このとき、 $H(j\Omega)$ は次式で与えられる。

$$H(j\Omega)=\frac{\int_0^1 \tilde{V}_x|_{X=1} dY}{\int_0^1 \tilde{V}_y|_{Y=0} dX} \quad (20)$$

式(15)~(19)を式(6)に代入すると、

$$\begin{aligned} & (\bar{C}+\tilde{C}e^{j\Omega T})\frac{\partial(\bar{\Psi}+\tilde{\Psi}e^{j\Omega T})}{\partial T} \\ & = -\alpha \left\{ \frac{\partial(\bar{V}_x+\tilde{V}_xe^{j\Omega T})}{\partial X} + \frac{\partial(\bar{V}_y+\tilde{V}_ye^{j\Omega T})}{\partial Y} \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

式(21)を展開する際、その高調波成分を無視すると、

$$j\Omega\bar{C}\tilde{\Psi}e^{j\Omega T} = -\alpha \left(\frac{\partial\bar{V}_x}{\partial X} + \frac{\partial\bar{V}_y}{\partial Y} \right) - \alpha \left(\frac{\partial\tilde{V}_x}{\partial X} + \frac{\partial\tilde{V}_y}{\partial Y} \right) e^{j\Omega T} \quad (22)$$

が得られる。式(22)が任意の T に対して成立するためには、

$$0 = -\alpha \left(\frac{\partial\bar{V}_x}{\partial X} + \frac{\partial\bar{V}_y}{\partial Y} \right) \quad (23)$$

$$j\Omega\bar{C}\tilde{\Psi} = -\alpha \left(\frac{\partial\tilde{V}_x}{\partial X} + \frac{\partial\tilde{V}_y}{\partial Y} \right) \quad (24)$$

式(20)および(23),(24)より、 $H(j\Omega)$ が求められる。なお、時間遅れ $T_{lag}(\Omega)$ は、

$$T_{lag}(\Omega) = -\frac{1}{\Omega} \tan^{-1} \left(\frac{I_m\{H(j\Omega)\}}{R_e\{H(j\Omega)\}} \right) \quad (25)$$

で定義される(負符号は、時間遅れを正と定義するために導入した)。ただし、 $R_e\{*\}$ および $I_m\{*\}$ は、複素関数の実部および虚部を意味する。

4. 等価周波数伝達関数の妥当性についての検証

前章では、式(20)および(23),(24)により、理論的に等価周波数伝達関数 $H(j\Omega)$ を求めた。しかし、この $H(j\Omega)$ は、高次の微小項および高調波成分の無視による近似を施すことによって求められている。本章では、その妥当性をシミュレーションに基づいて検証する。

式(6)~(10)を差分法により数値計算するシミュレーションでは、AB断面での境界条件として模擬的に発生させた降雨量 $R(=\bar{R}+A^{no}\sin(\Omega T))$ を直接入力として計算を行い、図-2で表されているように流出量 Q を $\bar{Q}+B^{no}\sin(\Omega T+\Theta_0)$ と近似できるような範囲

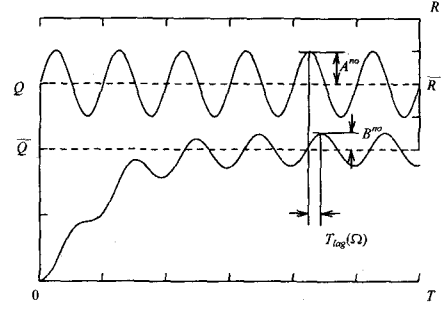


図-2 概念的な降雨流出関係

表-1 計算に用いたパラメータの値

$\alpha(\times 10^{-2})$	$\beta(\times 10^{-2})$	γ	η	n
1.732	5.0	1.8	5.00	1.4

(T)において、ゲイン $G(\Omega)$ および時間遅れ $T_{lag}(\Omega)$ を求める。

$$G(\Omega) = \frac{B^{no}}{A^{no,1}} \quad (26)$$

$$T_{lag}(\Omega) = -\frac{1}{\Omega} \Theta_0 \quad (27)$$

なお、 $Q = \int_0^1 V_x|_{X=1} dY$ 。また、 $G(\Omega) = |H(j\Omega)|$ を考慮すれば、定義式(25)および式(26),(27)から、 $H(j\Omega)$ を求めることができる。図-3~5はそれぞれ、 $H(j\Omega)$ 、 $G(\Omega)$ および $T_{lag}(\Omega)$ のシミュレーションによる数値計算結果と前章で求めた理論解(式(20)および(23),(24))との比較を示している。記号●は、シミュレーションによる数値計算結果を、実線は理論解をそれぞれ表している。図-3~5より、両者の適合度は良好であるといえる。なお、パラメータ α 、 β 、 γ 、 η および n には、表-1中の値をそれぞれ採用した。 α 、 β および γ は、観測値をもとに $\bar{r}=5.0(\text{mm/hr})$ 、 $\zeta=\pi/6$ 、 $k_s=25(\text{cm/hr})$ 、 $d=1.0(\text{m})$ 、 $l=20(\text{m})$ 、 $a=0.018(\text{cm}^{-1})$ として与え、さらに、 $\theta_s=0.3372$ とした。境界条件を有効にするため、はじめの数時間は自然排水をさせ、その後、降雨量を発生させて Q の計算を行った。シミュレーションおよび理論解の数値計算の詳細については、付録2および3を参照されたい。

5. 周波数応答特性(ゲイン)

ここでは、前章で示された2次元飽和不飽和浸透流モデルの理論的なゲインから、土壌特性を表すパラメータ $\alpha(k_s$ の関数)ならび η を取り上げ、これらがモデルの応答特性に与える影響について考察し、さらに2次元飽和不飽和浸透流モデルとこれを集中化して得られるKinematic Waveモデルのゲインを比

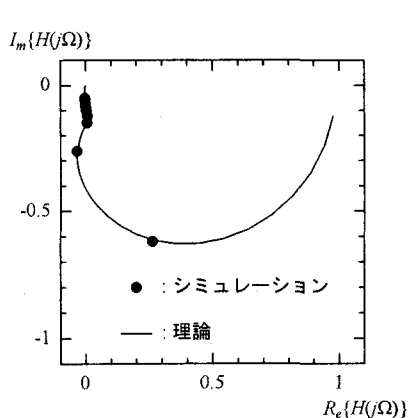


図-3 シミュレーション結果 ($H(j\Omega)$)

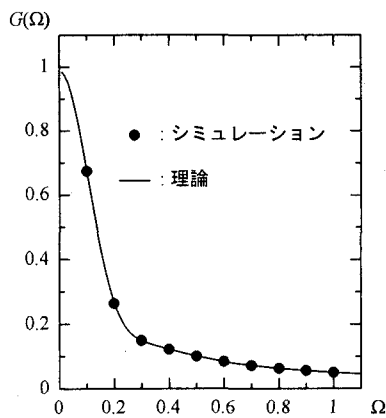


図-4 シミュレーション結果 ($G(\Omega)$)

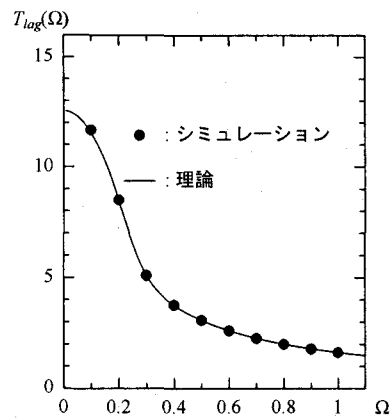


図-5 シミュレーション結果 ($T_{\log}(\Omega)$)

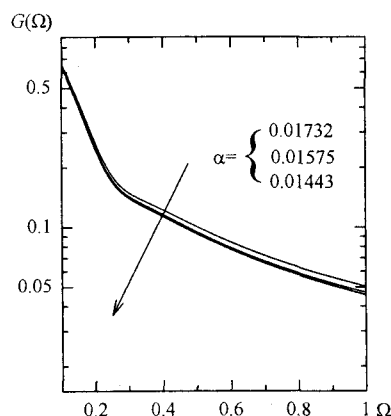


図-6 ゲイン (α のみ変化)

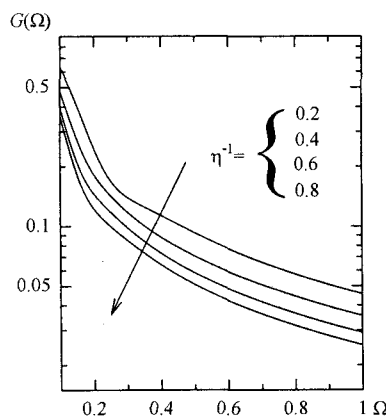


図-7 ゲイン (η のみ変化)

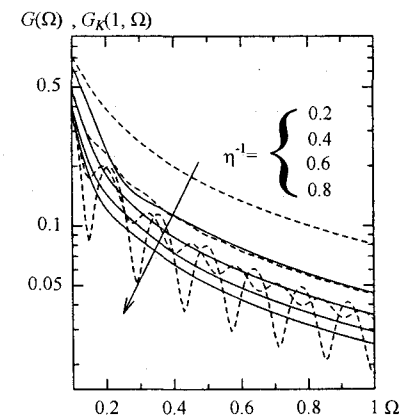


図-8 ゲインの比較

表-2 各パラメータの範囲

パラメータ	範囲
$\alpha (\times 10^{-2})$	1.443 ~ 1.732
η	1.25 ~ 5.00

較する。

図-6, 7は、計算結果を図示したものである。パラメータ $\alpha = 1.433 \times 10^{-2}$ 、および $\eta = 5.00$ (その他のパラメータは、表-1より与えた。)を基本として、図-6の場合は α のみを、図-7の場合は η のみをそれぞれ表-2の範囲で変化させた結果である。 Ω の増加に伴いゲインが減少していることから、本論文で用いた2次元飽和不飽和浸透流モデルが、実流域の特性である低域フィルターとしての性質をよく表していると言える(図-6, 7)。 α の変化に対して、モデルの応答特性に変化が見られない(図-6)。このことは、例えば上記の計算条件下では、 $\bar{r} = 5.0$ (mm/hr) 程度の降雨条件で、土壌特性を表す $k_s (= 27.5$ (cm/hr)) の $\pm 10\%$ 程度の変動が流出特性にほとんど影響を及ぼさないと解釈することができる。図-7から、 η の減少に伴い高周波領域のゲインが、図-6の結果に比して著しく減少している。このことから、(後述の2次元

飽和不飽和浸透流モデルの集中化によって斜面流動数 p と関係付けられる) η が流出解析の際の重要なパラメータの一つであると考えられる。

次に、式(6)~(10)を基礎式とした2次元飽和不飽和浸透流モデルを集中化し、それらのゲインを比較検討する。松林, 高木ら³⁾の方法に従えば、基礎式を鉛直方向に積分することで、

$$\frac{\partial H}{\partial T} + \frac{\partial Q}{\partial X} = R \quad (28)$$

$$H = ZQ^p \quad (29)$$

が得られる。ただし、 $Z = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\beta \sin \zeta} \right)^{\frac{1}{\eta}}, p = \frac{1}{\eta}$ 。 f は、開水路におけるエネルギー補正係数と同様な意味を持つパラメータと関係付けられ、松林, 高木ら³⁾によれば、 $\eta = 4 \sim 12$ の範囲では、 $f = 0.98 \sim 1.0$ とされている。なお、本論文の中では $f = 1.0$ として扱っている。田中⁴⁾は、既に式(28), (29)で表されたKinematic Waveモデルのゲイン $G_k(X, \Omega)$ が次式で表されることを示している。

$$G_k(X, \Omega) = \frac{1}{X} \sqrt{W_1^2 + W_2^2}, \quad 0 \leq X \leq 1 \quad (30)$$

$$\frac{dW_1}{dX} = \cos((ZR^{p-1}X^p)\Omega) \quad (31)$$

$$\frac{dW_1}{dX} = \sin((ZR^{p-1}X^p)\Omega) \quad (32)$$

図-8は、図-7の計算条件と同じく、 η のみを変化させた場合のゲインの比較を表している。実線が基本となる2次元飽和不飽和浸透流モデルのゲインを、破線が式(30)($X=1$)をそれぞれ表している。田中、藤田ら²⁾が既に示しているように、 η の減少に伴いKinematic Waveモデルのゲインは、モデル特有な振動を示しつつ減少している。図-8から、 η の値が小さいほど、式(30)の振動は増幅傾向にあるものの、その平均的特性は、2次元飽和不飽和浸透流モデルのゲインに漸近していることがわかる。

6. まとめ

本論文では、斜面流出に適用される2次元飽和不飽和浸透流モデルを採用し、等価周波数伝達関数を理論的に求め、シミュレーションに基づきその妥当性を示した。流出モデルを無次元変量で表し、モデルパラメータを集約化した。この結果を用いることで、従来の降雨波形に依存した流出解析から任意の降雨波形に対する2次元飽和不飽和浸透流モデルの応答特性を検討することが可能となった。

謝辞：本論文の一部は、(財)北海道河川防災研究センターの助成を受けて行われた。記して謝意を表す。

付録1 式(16)~(19)の誘導

式(15)を式(10)に代入すると、次式が得られる。

$$K = \left\{ \frac{1}{1 + (\gamma|\bar{\Psi} + \tilde{\Psi}e^{j\Omega T})^n} \right\}^\eta$$

ここで、 $\tilde{\Psi}/\bar{\Psi}$ および $\eta\gamma^n|\bar{\Psi}|^{n-1}\tilde{\Psi}/(1+(\gamma|\bar{\Psi}|)^n)$ の高次の微小項を無視すると、次式が得られる。

$$K \approx \left\{ \frac{1}{1 + (\gamma|\bar{\Psi}|)^n} \right\}^\eta \left\{ 1 + \frac{\eta\gamma^n|\bar{\Psi}|^{n-1}\tilde{\Psi}}{1 + (\gamma|\bar{\Psi}|)^n} e^{j\Omega T} \right\} \quad (16)$$

$$\approx \bar{K} + \tilde{K}e^{j\Omega T}$$

$$\text{ただし、} \bar{K} = \left\{ \frac{1}{1 + (\gamma|\bar{\Psi}|)^n} \right\}^\eta, \tilde{K} = \frac{\partial \bar{K}}{\partial \bar{\Psi}} \tilde{\Psi}$$

さらに、式(15)~(17)を式(7),(8)に代入してそれらの高調波成分を無視すると、 X, Y 方向のfluxは、

$$V_x = -\frac{\beta^2}{\alpha} (\bar{K} + \tilde{K}e^{j\Omega T}) \left\{ \frac{\partial(\bar{\Psi} + \tilde{\Psi}e^{j\Omega T})}{\partial X} - \frac{1}{\beta} \sin\zeta \right\} \approx \bar{V}_x + \tilde{V}_x e^{j\Omega T} \quad (17)$$

$$V_y \approx \bar{V}_y + \tilde{V}_y e^{j\Omega T} \quad (18)$$

ただし

$$\bar{V}_x = -\frac{\beta^2}{\alpha} \bar{K} \left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial X} - \frac{1}{\beta} \sin\zeta \right), \quad \bar{V}_y = -\frac{1}{\alpha} \bar{K} \left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial Y} - \cos\zeta \right),$$

$$\tilde{V}_x = -\frac{\beta^2}{\alpha} \left\{ \frac{\partial(\bar{K}\tilde{\Psi})}{\partial X} - \frac{1}{\beta} \sin\zeta \frac{\partial \bar{K}}{\partial \bar{\Psi}} \tilde{\Psi} \right\},$$

$$\tilde{V}_y = -\frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{\partial(\bar{K}\tilde{\Psi})}{\partial Y} - \cos\zeta \frac{\partial \bar{K}}{\partial \bar{\Psi}} \tilde{\Psi} \right\}$$

で表される。同様に、式(9),(15)より比水分容量 C ($\equiv \partial\Theta/\partial\Psi$)は、

$$C = \frac{\eta\gamma^n|\bar{\Psi} + \tilde{\Psi}e^{j\Omega T}|^{n-1}}{\{1 + (\gamma|\bar{\Psi} + \tilde{\Psi}e^{j\Omega T}|)^n\}^2} \approx \bar{C} + \tilde{C}e^{j\Omega T} \quad (19)$$

$$\text{ただし、} \bar{C} = \frac{\eta\gamma^n|\bar{\Psi}|^{n-1}}{\{1 + (\gamma|\bar{\Psi}|)^n\}^2}, \quad \tilde{C} = \left\{ \frac{n-1}{\bar{\Psi}} + \frac{2\eta\gamma^n|\bar{\Psi}|^{n-1}}{1 + (\gamma|\bar{\Psi}|)^n} \right\} \bar{C} \tilde{\Psi}$$

付録2 数値計算

本論文では、 X, Y 方向それぞれの刻みを $\Delta X, \Delta Y$ とし、計算領域を $n_x \times n_y$ 個(n_x : X 方向(i)の分割数; n_y : Y 方向(j)の分割数)の格子に分割し、差分法により数値計算を行った。

$(m+1)\Delta T$ 時刻(ΔT : 計算の時間刻み)における(i, j)格子中心のサクションを Ψ_{ij}^{m+1} として、格子内に流入および流出するfluxを、それぞれ V_{xi}, V_{yi} および V_{x2}, V_{y2} とすると、式(6)は、

$$C(\Psi_{ij}^{m+1}) \frac{\Psi_{ij}^{m+1} - \Psi_{ij}^m}{\Delta T} = -\alpha \left(\frac{V_{x2} - V_{xi}}{\Delta X} + \frac{V_{y2} - V_{yi}}{\Delta Y} \right) \quad (6a)$$

$$\text{ただし、} V_{xi} = -\frac{\beta^2}{\alpha} K_{xi} \left(\frac{\Psi_{ij}^{m+1} - \Psi_{i-1,j}^{m+1}}{\Delta X} - \frac{1}{\beta} \sin\zeta \right),$$

$$V_{x2} = -\frac{\beta^2}{\alpha} K_{x2} \left(\frac{\Psi_{i+1,j}^{m+1} - \Psi_{ij}^{m+1}}{\Delta X} - \frac{1}{\beta} \sin\zeta \right),$$

$$V_{yi} = -\frac{1}{\alpha} K_{yi} \left(\frac{\Psi_{ij}^{m+1} - \Psi_{ij-1}^{m+1}}{\Delta Y} - \cos\zeta \right),$$

$$V_{y2} = -\frac{1}{\alpha} K_{y2} \left(\frac{\Psi_{ij+1}^{m+1} - \Psi_{ij}^{m+1}}{\Delta Y} - \cos\zeta \right),$$

$$K_{xi} = \frac{K(\Psi_{i-1,j}^{m+1}) + K(\Psi_{ij}^{m+1})}{2}, \quad K_{x2} = \frac{K(\Psi_{ij}^{m+1}) + K(\Psi_{i+1,j}^{m+1})}{2},$$

$$K_{yi} = \frac{K(\Psi_{ij-1}^{m+1}) + K(\Psi_{ij}^{m+1})}{2}, \quad K_{y2} = \frac{K(\Psi_{ij}^{m+1}) + K(\Psi_{ij+1}^{m+1})}{2}$$

のように表される。ここで、式(6a)を Ψ_{ij}^{m+1} について解き、反復計算(S-O-R法)によって各格子点のサクションを求める。2章で与えた境界条件は、以下の諸式として取り込む。

$(i, 0)$ 格子: $V_{y1}=R$; $(0, j)$ 格子: $V_{x1}=0$

(i, n_y-1) 格子: $V_{y2}=0$;

(n_x-1, j) 格子: $\Psi_{n_x,j}=2\Psi_{n_x-1,j}-\Psi_{n_x-2,j}$

BC断面(図-1)での境界条件は、仮想的な格子 (n_x, j) を置き、定義している。なお、収束条件は、式(6a)の左辺と右辺との(水分量変化の)相対誤差が各格子点において許容範囲内にあることを基準として用いた。また、流出量 Q は、次式によって求めた。

$$Q = \sum_{j=0}^{n_y-1} V_{x2}|_{i=n_x-1} \Delta Y$$

付録3 等価周波数伝達関数の数値計算

式(23)の数値計算は、式(6a)において時間を固定し((左辺)=0)、AB断面(図-1)での境界条件(流入するflux)を降雨量 R の平均値 $\bar{R}$ (定数)として、 (i, j) 格子中心のサクション(平均値 $\bar{\Psi}_{ij}$)を反復計算により求めることに相当する。式(23)の差分表示は、付録2を参照することとして省略する。ここでは、式(24)の数値計算に限り述べる。AB, BC断面での境界条件を考慮すれば、式(20)は以下のように書き改められる。

$$H(j\Omega) = \frac{\int_0^1 \left[-\frac{\beta^2}{\alpha} \left\{ \frac{\partial(\bar{K}\bar{\Psi})}{\partial X} - \frac{1}{\beta} \sin \zeta \frac{\partial \bar{K}}{\partial \bar{\Psi}} \bar{\Psi} \right\} \right] dY}{\int_0^1 A^{no} dX} \quad (20)$$

$$= \int_0^1 U_x|_{X=1} dY$$

ただし、 $U_x = -\frac{\beta^2}{\alpha} \left\{ \frac{\partial(\bar{K}\bar{\Psi})}{\partial X} - \frac{1}{\beta} \sin \zeta \frac{\partial \bar{K}}{\partial \bar{\Psi}} \bar{\Psi} \right\}$ 。なお、 $I \equiv \bar{\Psi}/A^{no}$ 。

さらに、式(24)の両辺を A^{no} で割ると、次式が得られる。

$$j\Omega \bar{C}I = -\alpha \left(\frac{\partial U_x}{\partial X} + \frac{\partial U_y}{\partial Y} \right) \quad (24)$$

ただし、 $U_y = -\frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{\partial(\bar{K}\bar{\Psi})}{\partial Y} - \cos \zeta \frac{\partial \bar{K}}{\partial \bar{\Psi}} \bar{\Psi} \right\}$ 。このとき、境界条件は、

AB: $U_y|_{Y=0}=1$; AD: $U_x|_{X=0}=0$;

CD: $U_y|_{Y=1}=0$; BC: $\frac{\partial^2 I}{\partial X^2} \Big|_{X=1} = 0$

となる。本論文では、上式を差分法により数値計算することで、 $H(j\Omega)$ を求める。式(20)を差分表示すると、

$$H(j\Omega) \approx \sum_{j=0}^{n_y-1} U_{x2}|_{i=n_x-1} \Delta Y \quad (20a)$$

式(24)の差分表示も付録2に準拠して行くと、

$$j\Omega C(\bar{\Psi}_{ij})I_{ij} = -\alpha \left(\frac{U_{x2}-U_{x1}}{\Delta X} + \frac{U_{y2}-U_{y1}}{\Delta Y} \right) \quad (24a)$$

ただし、

$$U_{x1} = -\frac{\beta^2}{\alpha} \left\{ L_{x1} \left(\frac{\bar{\Psi}_{ij}-\bar{\Psi}_{i-1,j}}{\Delta X} - \frac{1}{\beta} \sin \zeta \right) \frac{I_{ij}+I_{i-1,j}}{2} + \bar{K}_{x1} \frac{I_{ij}-I_{i-1,j}}{\Delta X} \right\},$$

$$U_{x2} = -\frac{\beta^2}{\alpha} \left\{ L_{x2} \left(\frac{\bar{\Psi}_{i+1,j}-\bar{\Psi}_{ij}}{\Delta X} - \frac{1}{\beta} \sin \zeta \right) \frac{I_{i+1,j}+I_{ij}}{2} + \bar{K}_{x2} \frac{I_{i+1,j}-I_{ij}}{\Delta X} \right\},$$

$$U_{y1} = -\frac{1}{\alpha} \left\{ L_{y1} \left(\frac{\bar{\Psi}_{ij}-\bar{\Psi}_{i,j-1}}{\Delta Y} - \cos \zeta \right) \frac{I_{ij}+I_{i,j-1}}{2} + \bar{K}_{y1} \frac{I_{ij}-I_{i,j-1}}{\Delta Y} \right\},$$

$$U_{y2} = -\frac{1}{\alpha} \left\{ L_{y2} \left(\frac{\bar{\Psi}_{i,j+1}-\bar{\Psi}_{ij}}{\Delta Y} - \cos \zeta \right) \frac{I_{i,j+1}+I_{ij}}{2} + \bar{K}_{y2} \frac{I_{i,j+1}-I_{ij}}{\Delta Y} \right\},$$

$$\bar{K}_{x1} = \frac{K(\bar{\Psi}_{i-1,j})+K(\bar{\Psi}_{ij})}{2}, \quad \bar{K}_{x2} = \frac{K(\bar{\Psi}_{ij})+K(\bar{\Psi}_{i+1,j})}{2},$$

$$\bar{K}_{y1} = \frac{K(\bar{\Psi}_{ij-1})+K(\bar{\Psi}_{ij})}{2}, \quad \bar{K}_{y2} = \frac{K(\bar{\Psi}_{ij})+K(\bar{\Psi}_{i,j+1})}{2},$$

$$L_{x1} = \frac{K_d(\bar{\Psi}_{i-1,j})+K_d(\bar{\Psi}_{ij})}{2}, \quad L_{x2} = \frac{K_d(\bar{\Psi}_{ij})+K_d(\bar{\Psi}_{i+1,j})}{2},$$

$$L_{y1} = \frac{K_d(\bar{\Psi}_{i,j-1})+K_d(\bar{\Psi}_{ij})}{2}, \quad L_{y2} = \frac{K_d(\bar{\Psi}_{ij})+K_d(\bar{\Psi}_{i,j+1})}{2}$$

なお、 $K_d \equiv \partial \bar{K} / \partial \bar{\Psi}$ 。式(24)の差分化に伴い、境界条件は以下のように与え、

$(i, 0)$ 格子: $U_{y1}=1$; $(0, j)$ 格子: $U_{x1}=0$;

(i, n_y-1) 格子: $U_{y2}=0$;

(n_x-1, j) 格子: $I_{n_x,j}=2I_{n_x-1,j}-I_{n_x-2,j}$

収束条件は、第 $m+1$ 近似 I_{ij}^{m+1} と第 m 近似 I_{ij}^m との相対誤差が各格子点において許容範囲内にあることを基準として用いた。

参考文献

- 1) 田中岳, 藤田睦博, 工藤睦信, 内島邦秀: Kinematic Waveモデルと貯留型流出モデルの比較-周波数特性と確率特性-, 土木学会論文集, No. 614/II-46, pp.21-36, 1999.
- 2) 藤田睦博, 工藤睦信, 中尾隆, 橋本誠秀: 貯留型流出モデルの確率応答に関する研究-降雨量が時間的に独立な確率過程の場合-, 土木学会論文集, No. 515/II-31, pp.1-11, 1995.
- 3) 松林宇一郎, 高木不折, 吉田直: 不飽和浸透流理論に基づく斜面流出モデルの集中化について, 土木学会論文集, No. 497/II-28, pp.11-20, 1994.
- 4) 田中岳: 降雨流出系の周波数応答特性と確率応答特性に関する基礎的研究, 北海道大学学位論文, pp.25-42, 2000.

(2001. 10. 1受付)