

任意 3 角形平面スキームを用いた 地下水・地表水の流出解析法

RUN-OFF ANALYSIS METHOD OF SURFACE-SUBSURFACE WATER FLOW USING TRIANGLE SCHEME

井戸俊介¹・道上正規²・宮本邦明³・檜谷治⁴

Shunsuke IDO, Masanori MICHIE, Kuniaki MIYAMOTO and Osamu HINOKIDANI

¹ 正会員 工修 (株)ダイヤコンサルタント 環境防災事業部 (〒171-0014 東京都豊島区池袋三丁目 1-2)

² フェロー会員 工博 鳥取大学 (〒680-8550 鳥取県鳥取市湖山町南四丁目 101)

³ 正会員 工博 筑波大学助教授 農林工学系 (〒305-8572 茨城県つくば市天王台一丁目 1-1)

⁴ 正会員 工博 鳥取大学助教授 工学部土木工学科 (〒680-8550 鳥取県鳥取市湖山町南四丁目 101)

Two-dimensional runoff analysis with rect-linear finite differential scheme or one-dimensional runoff analysis with more complex finite differential scheme has been studied. We propose triangle scheme that covers ground surface to make a numerical model of the ground surface topography and strata structure. The ground surface is covered by point-polygon system and the vertexes of a polygon are defined at the gravity centers of triangles surrounding the point. The topography and strata structure are explained by the elevation of ground surface and boundary of each stratum. The depth is defined at the point and the flux is defined at the gravity center of the triangle. Based on the arrangement of variables, two-dimensional runoff analysis can be done. We apply kinematic wave theory to the triangle scheme and show an example of calculation.

Key Words : triangle scheme, runoff analysis, kinematic wave, two-dimensional surface-subsurface water flow model

1. はじめに

降雨の流出は斜面崩壊などの流域における土砂生産や水溶性の環境物質などの物質輸送過程を支配している。したがって流域における降水の動態を知ることがこれらの予測を行っていくうえで重要な課題のひとつといえる。そういう観点から、流域の地形、地質・地層構造や土地利用形態による水文環境の違いなど流域の空間的な特性をモデル化し降水の運動過程を水理学的に追跡する解析手法の研究が数多く行われている^{1),2),3)}。特に最近ではGISの発達により面的なデータの管理が比較的容易になり⁴⁾、流域の水文環境に関するデータをGISを用いて管理することが前提となりつつある。

本研究ではGISの利用を前提として、主に地形の表現を中心に地層構造のモデル化と地下水・地表水の流れに関する支配方程式の差分法について検討している。主な流域地形のモデルとしては国土数値

情報のような構築が容易で水理学的解析が容易なグリッドモデル^{5),6)}と、等高線や谷筋・尾根筋などの微地形、土地利用境界など水文環境の空間的分布に関する表現が容易な3角形平面スキームモデル(3角形網モデル)⁷⁾がある。3角形スキームモデルの利点は流域の水文環境を把握しやすいというところにあるが、水理計算を行う際には要素である3角形の並びが座標系を構成しないので支配方程式の差分化に工夫が必要である。したがって、地下水・地表水の流れに関する水理計算を2次元的に行うことを目的とする場合は流域モデルにグリッドモデルを用い、流域の水文環境の評価を主な目的とする場合は1次元的水理計算スキームを満足するように3角形平面スキームを構築することが一般的である。本研究では2次元的水理計算を可能とする任意形状の3角形要素からなる空間スキームを構築したので報告する。

2. 三角形を用いた斜面モデル

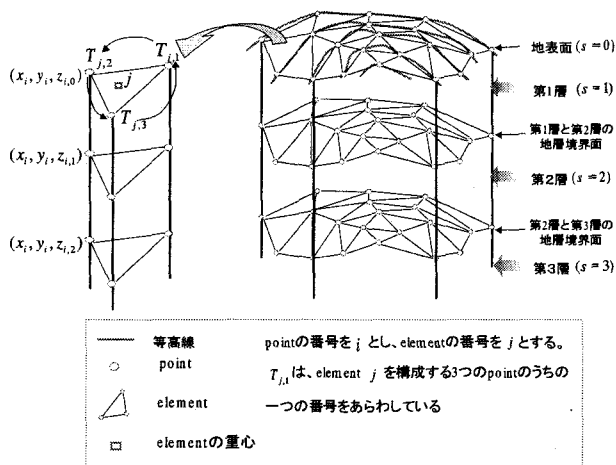
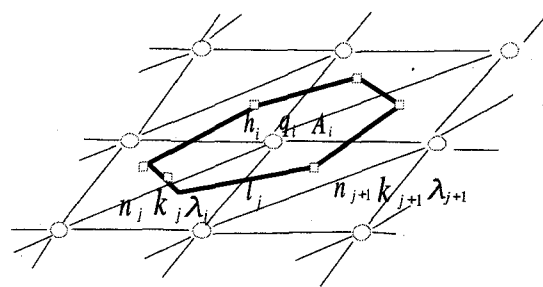


図-1 斜面モデルおよび地層構造



i : pointの番号 j : elementの番号
 h_i : 水深 q_i : 単位面積あたりの流入量
 A_i : polygonの面積 n_j : マニングの粗度係数
 k_j : 透水係数 λ_j : 間隙率
 l_j : 辺長

図-3 諸量の配置

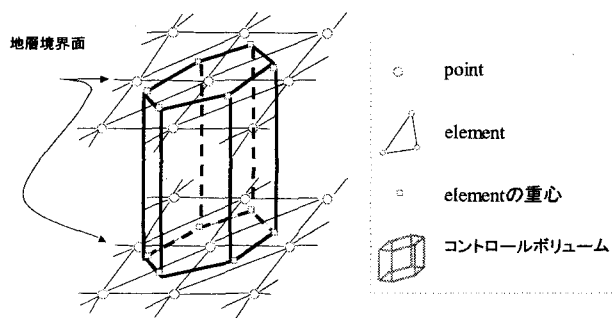
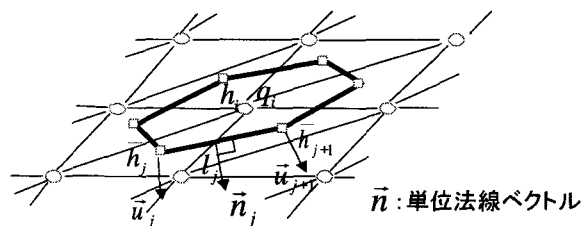


図-2 コントロールボリューム



$$h_i(t + \Delta t) = h_i(t) - \frac{\Delta \int (\bar{u}h) \cdot \bar{n} dl}{A_i} + q_i \Delta t$$

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\bar{u}_j \bar{h}_j + \bar{u}_{j+1} \bar{h}_{j+1}}{2} \right) \bar{n}_j l_j$$

図-4 支配方程式の差分化

斜面モデルでは、地表の地形と地層構造が表現される。地表面のモデル化は、等高線や表面地質の境界線を離散化し点（以下 point と呼ぶ）の集合で表現することにより行う。解析の対象とする領域全体を、それらの point を頂点とする三角形（以下 element と呼ぶ）の集合で覆う。地表面の形状および地層構造は各 point にその地点における地表および地層境界面の標高を与えることにより認識する。

具体的には図-1 に示すように、各 point に番号を与え、その番号に平面上の座標データ (x_i, y_i) を与える。そして、point i に対応する地表・地層の境界の標高データを $z_{i,s}$ で与える。添え字 s は地表から数えて $s-1$ 層と s 層の境界面を表す。3つの point で構成される各 element に対しても番号 j を与え、その平面上の配置をそれを構成する3つの point の番号を左回りに並べた $(T_{j,1}, T_{j,2}, T_{j,3})$ で定義する。

各 point に対して占有空間を図-2 に示すように、その point を共有する element の重心を結んだ多角形（以下 polygon と呼ぶ）で定める。この polygon で

区切られる各地層毎の柱状の空間をコントロールボリュームと呼ぶ。この時、polygon を構成する各 element の重心の相対的位置関係が重要になる。ここでは左回りに相対的な位置を認識する。この時、ある point に対して、その周りの element が閉じているときは計算領域内部にあり、閉じていないときその point は計算領域の周辺境界にある。

3. 支配方程式とその差分化

流水の支配方程式は、連続式と運動方程式からなる。斜面上を流れる地表水および地下水の流れでは、

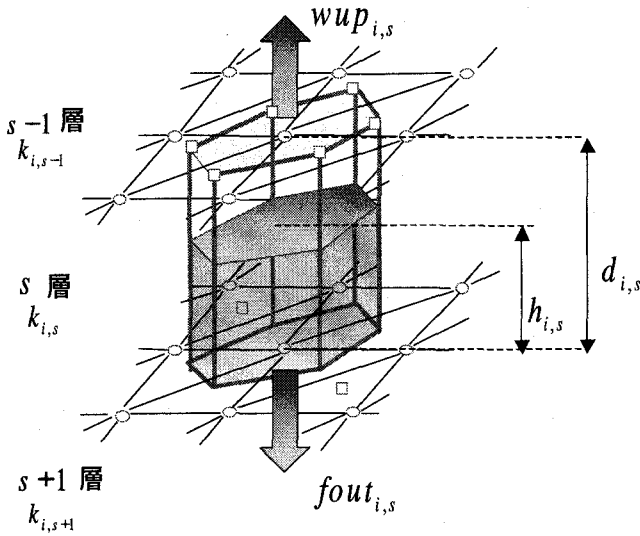


図-5 鉛直方向の水収支

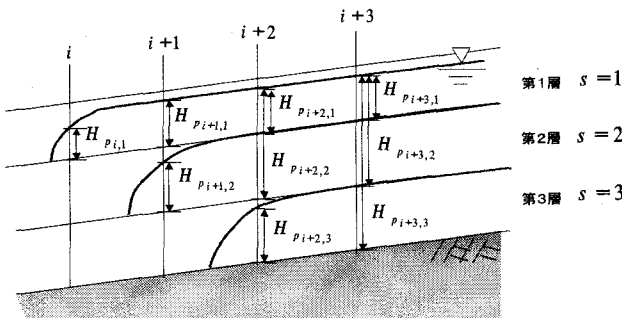


図-6 圧力水頭の取り扱い

水理量の時間的、場所的変化は緩やかであると考えられるので、ここでは流出モデルとして kinematic wave を用いる。また、浸透流の運動方程式としては、飽和浸透流を考えダルシー則で与え、地表流の運動方程式はマニング則で与える。すると支配方程式は次のようになる。

- ・ 浸透流に対して

$$\text{連続式} \quad \lambda \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\lambda u_x h) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda u_y h) = q \quad (1)$$

$$\text{ダルシー則} \quad \bar{u} = -k \bar{I} \quad (2)$$

- ・ 地表流に対して

$$\text{連続式} \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_x h) + \frac{\partial}{\partial y}(u_y h) = q \quad (3)$$

$$\text{マニング則} \quad \bar{u} = \frac{1}{n} R^{\frac{2}{3}} \bar{I}^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

ここに、 h : 水深、 $\bar{u}$: 流速($\bar{u} = (u_x, u_y)$)、 λ : 間隙率、 k : 透水係数、 $\bar{I}$: 動水勾配、 q : 単位面積単位時間あたりの降水量あるいは地層境界を通

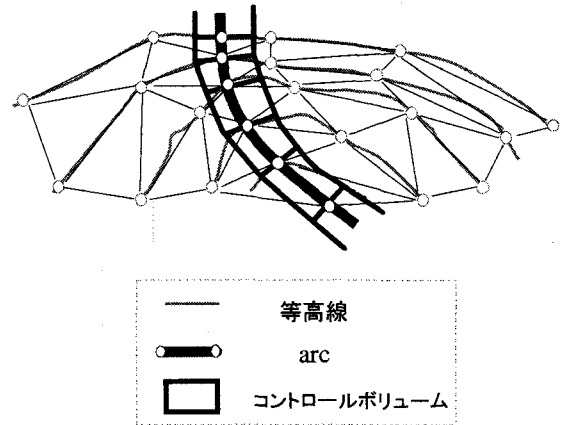
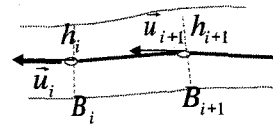


図-7 コントロールボリューム



$$h_i(t + \Delta t) = h_i(t) - \frac{(\bar{u}_i h_i B_i - \bar{u}_{i+1} h_{i+1} B_{i+1}) \Delta t}{A_i} + q_i \Delta t$$

図-8 支配方程式の差分化

て流入する流量、 n : マニングの粗度係数、 R : 径深である。

斜面モデルへ支配方程式を適用する。式(1)~式(4)の変数をそれぞれ図-3に示すように配置し、計算は差分法を用いて計算を行う。連続式の差分は図-4に示すように時間については前進差分を空間については中央差分をとる。図-4は表流水に関する連続式の差分を示しているが、地下水の連続式も同様の手法を用いている。次に流速 $\bar{u}$ は、浸透流に対して

$$\bar{u}_j = k_j \bar{\nabla} H_j \quad (5)$$

また地表流に対して、

$$\bar{u}_j = \frac{1}{n_j} h_j^{\frac{2}{3}} (\bar{\nabla} H_j)^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

で得られる。ここに、 H は圧力水頭と位置水頭を足したものである。よって水面勾配 $\bar{\nabla} H_j$ は、幾何学的な関係から次式を連立させることで得られる。

$$H_{T_{j,2}} - H_{T_{j,1}} = (\bar{\nabla} H_j) \cdot (\overline{T_{j,1} T_{j,2}}) \quad (7)$$

$$H_{T_{j,3}} - H_{T_{j,1}} = (\bar{\nabla} H_j) \cdot (\overline{T_{j,1} T_{j,3}}) \quad (8)$$

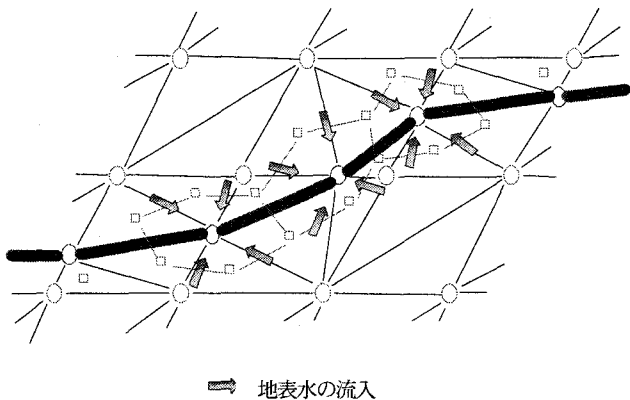


図-9 地表水と河川水の水収支

地表面および地層境界面を通して鉛直方向に移動する浸透流を図-5に示すように与える。すなわち、下層への浸透量 q_{out} については、地層境界面において、その上層($s-1$ 層)にあたるコントロールボリューム内の単位面積あたりの水量と下層(s 層)の透水能(ここに、透水能を透水係数に間隙率と計算刻み時間を乗じたものとする)を比較してどちらか小さい方を与える。また、下層(s 層)へ浸透した降水はダルシー則で与えられる浸透速度で地下水面に到達するまで鉛直浸透する。 s 層に全く地下水が存在しないときは降雨による浸透はウェッティングフロントを形成して浸透していく。ウェッティングフロントがより下層($s+1$ 層)の地層との境界に達し、 s 層の鉛直浸透量が $s+1$ 層の浸透能より大きいときは s 層に地下水面が形成される。このとき、地下水流の連続式、式(1)の右辺は次式で表される。

$$q = (k + \frac{\partial h}{\partial t})c\lambda - k'\lambda \quad (9)$$

ここに、 c ：飽和度、 k' ：下層の透水係数である。式(1)に代入すると次式を得る。

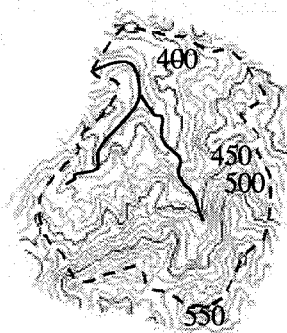
$$\frac{\partial h}{\partial t}(1-c)\lambda + \frac{\partial}{\partial x}(\lambda u_x h) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda u_y h) = kc\lambda - k'\lambda \quad (10)$$

定常で浸透流が供給される場合、浸透が始まってウェッティングフロントが下方の地層境界に到達する時間 T は式(11)で、ウェッティングフロントの境界面到達後地下水面が上方の地層境界へ到達するまでの時間は、斜面長が十分長ければ、式(10)の左辺第2,3項を0とおいて、およそ式(12)で与えられる。

$$T = d/k \quad (11)$$

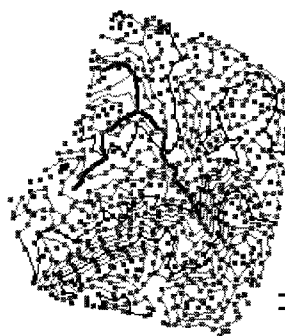
$$\frac{\partial h}{\partial t}(1-c)\lambda = kc\lambda - k'\lambda \quad (12)$$

上層あるいは地表面への湧出量 wup については、

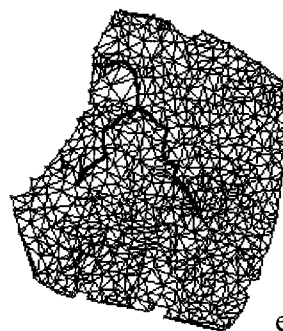


地形図から抽出した流域

流域面積 0.69km²



コンターライン上に point を発生



point から element を作成

200 0 200 400 (m)

図-10 斜面モデルおよび河道モデルの作成

下層にあたるコントロールボリュームの水深(コントロールボリュームの底面を基準)が、その層厚を上回った時、上回った量をその上層にあたるコントロールボリュームへの湧出量とする。したがって、本モデルでは、式(10)からも分かるが、下層ほど透水係数が小さい場合について解析することができる。圧力水頭 H_p は、静水圧分布で与える。ある地層の水深がその層厚に達するまでは圧力水頭は水深に一致する。水深が層厚に達した場合その層の上層の圧力水頭を加えたものが圧力水頭になる(図-6)。

表-1 各物性値

地下	case1	case2
透水係数(第1層)	0.36(m/h)	0.036(m/h)
(第2層)	0.18(m/h)	0.018(m/h)
(第3層)	0.0(m/h)	0.0(m/h)
間隙率(第1層)	0.3	0.3
(第2層)	0.3	0.3
(第3層)	0	0

	マンニングの粗度係数
地表	0.10
河道	0.05

4. 河川モデルおよび斜面モデルとの結合

河川における流れは、通常一次元的であり、流れを追跡するには、一次元の河川モデルを構築し、斜面モデルと結合する必要がある。

河川モデルは、地形図上から読みとった河道と等高線の交点に point を発生させ、その point に下流側から番号を与えることで認識する。コントロールボリュームは、図-7 に示すように隣合う point によりできる線分(以下 arc と呼ぶ)とそれらの point に与えられる川幅により表す。すると、流出モデルの支配方程式は以下で表される。

$$\text{連続式} \quad \frac{\partial hB}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uBh) = q \quad (13)$$

$$\text{マンニング則} \quad \bar{u} = \frac{1}{n} R^{\frac{2}{3}} \bar{I}^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

差分化は図-8 に示すように、時間的には前進差分を空間的には後退差分をとっている。流速 $\bar{u}$ は、マンニング則を用いて求める。

$$\bar{u}_i = \frac{1}{n_i} R_i^{\frac{2}{3}} \bar{I} \quad (15)$$

水面勾配 $\bar{I}$ は、

$$\bar{I} = \frac{H_i - H_{i+1}}{\sqrt{(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2 + (z_i - z_{i+1})^2}} \quad (16)$$

で得られる。

次に、河道上の水(河川水)と斜面における地表水・地下水の間の水のやりとりについて述べる。まず、河川水と地表水については、図-9 で示すように、河川を表している point の polygon への流入量を求めその point への流入量とする。次に河川水と地下水については、その境界面の水収支の計算を斜面モデルと同様の方法で行う。

流出高(mm)

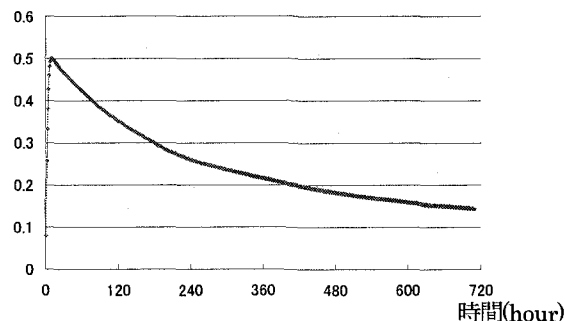


図-11 計算結果(case1)

流出高(mm)

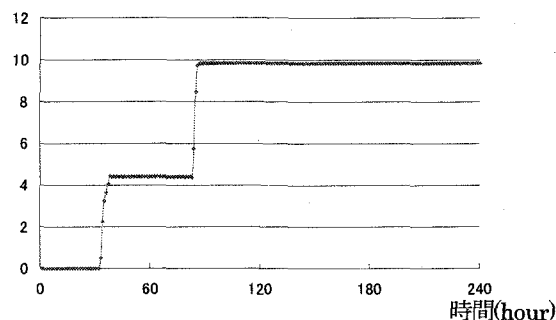


図-12 計算結果(case2)

5. 計算例

モデルの妥当性については数多くの単純な斜面・河道モデルを作成して流出計算を行い解析解と比較して検討している。その結果、解析解と同一の結果が得られることを確認している⁸⁾。

ここでは適当な実際の斜面を選び、本モデルの特徴を表すような簡単な斜面モデルを構築し流出解析を行った結果を示す。モデル作成の対象とした地形、および斜面・河道モデルの作成手順とその結果を図-10 に示す。地層は、3層構造とし、3層目を不透水層としている。各層の透水係数は計算ケースにより表-1 のように変えてある。地層境界面は地表面と平行とし、各層厚は1mで与えた。間隙率は両 case とも表-1 に示すように0.3としている。また、河道幅は10mとした。斜面と河道のマンニングの粗度係数はそれぞれ表-1 に示すような値を用いている。

計算は2つのケースについて行った。case1 は、洪水後期を想定しており、流量が逡減する様子について計算を行っている。ただし、初期条件としては、地下水は全層飽和としているが、簡単のため地表水および河川水は生じていないものとして取り扱って

いる。また、降雨は与えていない。このとき、表面流出は地形的な地下水の集中、勾配の緩和による地下水位の増加に対応して発生する。case2 は、降雨による流出過程、それも初期段階を想定しており、降雨が地下に浸透し、地下水位が上昇し、やがてその水面が地表に達することで生じる地表水の流出について計算を行っている。初期条件として、地下水、地表水および河川水すべてが生じていないとしている。降雨は降雨強度 10mm/hour を流域全体に定常で与えている。

case1 および case2 の計算結果を流域下流端の流出量を流域面積で割った流出高で表し図-11 および図-12 に示す。

case1 では、計算開始直後から流量の増加が見られる。ピーク後の流量は、指数関数的な減衰を示している。

case2 では、30 時間ほど経過した時点で河道流出が生じている。これは、降雨強度 0.01 (m/h) に対し、第 1 層の透水能が $0.036 \times 0.3 = 0.0108$ (m/h)、第 2 層の透水能が $0.018 \times 0.3 = 0.0054$ (m/h) であるため、降水が全量第 1 層に浸透するものの、第 2 層との境界で地下水流が生じ、最終的に第 1 層が飽和してしまい第 1 層の地下水位が地表面に到達して表流水となって流出し始めたからである。降雨開始から 35 時間ほど経つと、流量は定常状態へと推移しており、その流出高は、降雨強度 0.010 (m/h) から第 2 層の透水能 0.0054 (m/h) を引いた 0.0046 (m/h) 付近の値となっている。次に、85 時間ほど経過した時点に見られる流量の増加は、第 2 層を浸透していた降雨が、不透水層である第 3 層に到達したことで全層が飽和状態となり、雨水が浸透しなくなったことにより生じたものである。その後、流量は定常状態へと推移し、定常状態での流出高は降雨強度 0.010 (m/h) に近い値となっている。

6. むすび

本研究では地下水・地表水の流れに関する 2 次元数値計算を可能とする任意形状の 3 角形要素からなる任意 3 角形平面スキームを作成した。地形・地層構造を、地表に任意に離散的に配置された点 (point) に対して地表面、地層境界面の標高を与えることで表現した。各点に対して占有空間 (polygon) を定義し polygon に対してコントロールボリュームを定め水深を定義し、各点周りの 3 角形要素の重心

(polygon の頂点) において得られる流量とリープフロッグスキームを組んでいる。流れの支配方程式は簡単のためと本スキームの特性把握が容易なように kinematic wave 法を用いており、地下水の流れに対してはダルシー則を、地表水の流れに対してはマニング則を用いている。本手法に従って解析を行う手順を示し簡単な流出計算を行った。本モデルは、流れの支配方程式の高精度化、鉛直浸透や不飽和浸透の考慮、物質輸送に関する拡散方程式などの支配方程式との連立など発展が可能である。今後、実際の観測データとの比較、2 次元解析の一般的な手法であると正方メッシュをベースとした解析との比較や水文環境パラメータの逆解析手法や最適な 3 角形平面スキームの自動生成法などの課題も含めてこのモデルをベースに検討を進めていきたい。

参考文献

- 1) Parkin, G., Ewen, J. and O'Connell, P. E. 2000. SHETRAN: a coupled surface/subsurface modelling system for 3D water flow and sediment and solute transport in river basins. American Society of Civil Engineers Journal of Hydrologic Engineering, 5, 250-258.
- 2) 市川 温, 小椋俊博, 立川康人, 椎葉充晴: 数値地形情報と定常状態の仮定を用いた山腹斜面系流出モデルの集中化, 水工学論文集, 第 43 巻, pp. 43-48, 1999
- 3) 工藤睦信, 藤田睦博, 清水康行, 竹本 晃: 分布型流出モデルに関する研究 - 確率微分方程式の導入 -, 水工学論文集, 第 39 巻, pp. 133-140, 1995
- 4) 村上真幸: 国土地理院の数値地図整備, GIS 理論と応用, Vol4 No2, pp. 29-33, 1996
- 5) 中山恵介, 伊藤哲, 長谷川和義, 藤田睦博: 全流域を矩形グリッドで覆った浸透流解析法に関する研究, 水文・水資源学会 1997 年研究発表会要旨集, pp. 23-24, 1997.
- 6) 中川恵介, 伊藤 哲, 藤田 睦博: 矩形グリッドを用いた山地流出解析, 水工学論文集, 第 43 巻, pp. 31-36, 1999
- 7) 立川康人, 原口 明, 椎葉充晴, 高埴琢馬: 流域地形の三角形要素網表現に基づく分布型降雨流出モデルの開発, 土木学会論文集, Vol 565/II-39, pp. 1-10, 1997
- 8) 井戸俊介: 山地流域の流出過程に関する数値解析法, 鳥取大学修士論文, 2001

(2001. 10. 1 受付)