

河川水温の非線形解析

NON-LINEAR ANALYSIS OF RIVER WATER TEMPERATURE

佐渡 公明¹・杉山 一郎²・中尾 隆志³
 Kimiteru SADO, Ichiro SUGIYAMA and Takashi NAKAO

¹フェロー 工博 北見工業大学教授 土木開発工学科 (〒090-8507 北海道北見市公園町 165 番地)

²学生会員 北見工業大学大学院 土木開発工学専攻 (〒090-8507 北海道北見市公園町 165 番地)

³正会員 北見工業大学助手 土木開発工学科 (〒090-8507 北海道北見市公園町 165 番地)

River water temperature has a great influence on the increase of phytoplankton and the habitat of fish, and it is dependent on hydraulic and meteorological elements. The surface heat balance, which is composed of net radiation, sensible and latent heat fluxes, is a non-linear function of water temperature. So a differential equation concerning river water temperature is non-linear. The surface heat balance has been treated as a regression quadratic equation of water temperature in some papers.

In this paper the following three trajectories of solution for one-dimensional non-linear heat balance equation are shown using Bernoulli's equation with a threshold value, convergence to an equilibrium temperature, constant value and divergence. The difference between non-linear and linear analyses of the river water temperature is investigated under some combinations of hydrological and meteorological elements.

Key Words : river water temperature, non-linear analysis, threshold value, equilibrium temperature, divergence

1. まえがき

河川水温は、河川の自然環境を示す一つの指標である。植物プランクトンの増殖は水温の影響を受け、また魚の生育環境は選好温度や耐容温度から分かるように水温に大きく影響される。河川水温は水理要素・気象要素に支配される。純放射量、顕熱・潜熱フラックスから成る水面熱収支量は、水面逆長波放射量、水面の飽和水蒸気圧及び接水気層が不安定の際の顕熱・潜熱伝達率のために水温に関し非線形である。したがって、河川水温に関する微分方程式(1次元熱収支方程式)は非線形となる。

TVA¹⁾、Wunderlich²⁾は、1ヶ月間の水面熱収支量を0～40℃の水温範囲に対し水温の回帰2次曲線で表し、日平均水温の予測を行っている。また、Morse^{3), 4)}も水面熱収支量を水温の回帰2次曲線とし、回帰係数を3, 6時間間隔ごとに3～11日の期間に対して求め、数値解析に変数分離法を用いている。しかし、水温を記述する非線形微分方程式の解の挙動を扱った研究は見当たらない。

本論文では、最初に著者らが提案した、一般化した1次元熱収支方程式⁵⁾を閾値のあるBernoulliの微分方程式に変形することにより、解の挙動を明らかにする。すなわち、水温の解析解は、平衡温度への収束、一定値、発散の3つの挙動を示すことを導く。次に、各種の水理要素・気象要素の組み合わせに対して、平衡温度や水温計算値を求め、線形解と非線形解の比較検討を行う。

2. 一般化した1次元熱収支方程式の線形解析

(1) 一般化した1次元熱収支方程式

著者は、文献5)において、次の一般化した1次元熱収支方程式を提案している。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + U \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(AD_t \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{H_T(\theta)}{c_w \rho_w h} \quad (1)$$

$$H_T(\theta) = H_S(\theta) + H_b(\theta) + c_w \rho_w r(\theta_r - \theta) + \overline{C_k \mu_k h} + \frac{c_w \rho_w q_{tr}}{B} (\theta_{tr} - \theta) + \frac{\rho_w g}{J} i_f q \quad (2)$$

$$H_S(\theta) = (1-\alpha)I + \varepsilon(0.51 + 0.066\sqrt{e_a})\sigma T_a^4 - \varepsilon\sigma T_w^4 + \alpha_H(\theta)(\theta_a - \theta) + \alpha_E(\theta)\{e_a - e_S(\theta)\} \quad (3)$$

$$\alpha_E(\theta) = \frac{\rho_w L}{24 \times 3600} \{0.112 V + 0.094(\Delta\theta_V)^{1/3}\} \quad (4)$$

$$\alpha_H(\theta) = \frac{c_a p}{622 L} \alpha_E(\theta) \quad (5)$$

ここで、 θ : 水温、 T_w : 水温の絶対温度、 U : 断面平均流速、 A : 横断面積、 h : 断面平均水深、 B : 水面幅、 D_t : 乱流拡散係数、 c_w : 水の比熱、 ρ_w : 水の密度、 H_T : 全熱収支量、 H_S : 水面熱収支量、 H_b : 河床伝熱量、 i_f : 摩擦勾配、 q : 単位幅当りの流量、 J : 熱の仕事当量、 q_b : 本川単位長さ当りの横流入量、 θ_b : 横流入水の温度、 r : 雨量、 θ_r : 雨水の温度、 C_k : 水中にある物質 k の断面平均濃度、 μ_k : 水中物質 k による単位質量・単位時間当りの(生)化学的反応熱量、 α : アルベド、 I : 全日射量、 ε : 放射率、 σ : ステファン・ボルツマン定数、 α_H : 顕熱伝達率、 α_E : 潜熱伝達率、 θ_a : 気温、 T_a : 気温の絶対温度、 e_a : 空気の水蒸気圧、 e_s : 水面上の空気の飽和水蒸気圧、 L : 蒸発の潜熱、 V : ある一定の高さの相対風速、 $\Delta\theta_V$: 水面上とある一定の高さの湿潤空気の仮温度差、 c_a : 空気の定圧比熱、 p : 気圧である。

式(1)で分散係数でなく、乱流拡散係数を用いているのは、横断面内の水温分布および流速分布を一定とする 1 次元解析を行っているからである。

(2) 河川水温の線形解析

全熱収支量 H_T は水面熱収支量 H_S のために水温 θ の非線形関数である。式(2)の $H_T(\theta)$ を θ に近い基準温度 θ_B を用いて Taylor 級数に展開し、 θ の 1 次の項までとると次式のようになる。

$$H_T(\theta) = K(\theta_B)\{\theta^*(\theta_B) - \theta\} \quad (6)$$

$$K(\theta_B) = K_S(\theta_B) + 2\sqrt{\frac{c_g \rho_g \lambda_g}{\pi \Delta t}} + \frac{c_w \rho_w q_{tr}}{B} + c_w \rho_w r \quad (7)$$

$$\theta^*(\theta_B) = \theta_B + \frac{H_T(\theta_B)}{K(\theta_B)} \quad (8)$$

ここで、 $K(\theta_B)$ と $\theta^*(\theta_B)$ はそれぞれ水体に作用する全熱収支量を考慮したときの熱交換係数と平衡温度で、 K_S は水面熱収支量に対する熱交換係数である。また、 c_g 、 ρ_g 、 λ_g はそれぞれ河床地盤の比熱、密度、熱伝導率である。なお、水面熱収支のみを考慮すると、熱交換係数 $K_S(\theta_B)$ 及び平衡温度 $\theta_S^*(\theta_B)$ は次式となる。

$$K_S(\theta_B) = 4\varepsilon\sigma T_w^3 + \alpha_H(\theta_B) - \alpha'_H(\theta_B)(\theta_a - \theta_B) + \alpha_E(\theta_B)e'_S(\theta_B) - \alpha'_E(\theta_B)\{e_a - e_S(\theta_B)\} \quad (9)$$

$$\theta_S^*(\theta_B) = \theta_B + \frac{H_S(\theta_B)}{K_S(\theta_B)} \quad (10)$$

次に、式(6)を式(1)に代入し、乱流拡散項を無視すると押し出し流れとなり、水温計算式は式(11)となる。

$$\frac{dx}{dt} = U \quad \text{上で} \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{K(\theta^* - \theta)}{c_w \rho_w h} \quad (11)$$

この式は、水温の時間的変化が平衡温度と水温の差に比例していることを表している。なお乱流拡散の影響については、次の式(12)が成立すれば乱流拡散項を無視できることが著者の文献(6)で明らかにされている。

$$\frac{U^2}{4D_t} \gg \frac{K}{c_w \rho_w h} \quad (12)$$

式(11)を水塊の出発点 $x=x_0$ 、 $t=t_0$ で $\theta=\theta_0$ の初期条件のもとに解き、 U 、 h 、 K 、 θ^* を一定とすると水温は次のように表される。

$$x = x_0 + U(t - t_0) \quad (13)$$

$$\theta = \theta^* + (\theta_0 - \theta^*) \exp\left\{-\frac{K}{c_w \rho_w h}(t - t_0)\right\} \quad (14)$$

$$= \theta^* + (\theta_0 - \theta^*) \exp\left\{-\frac{K}{c_w \rho_w q}(x - x_0)\right\} \quad (15)$$

3. 河川水温の非線形解析

(1) 閾値のある Bernoulli の微分方程式

式(3)の $H_S(\theta)$ を $\theta=\theta_B$ を用いて Taylor 級数に展開し、 θ の 2 次の項までとり、 θ^2 、 θ および定数項でまとめると

$$H_S(\theta) = \frac{H_S''(\theta_B)}{2}\theta^2 + \{H_S'(\theta_B) - H_S''(\theta_B) \times \theta_B\}\theta + H_S(\theta_B) - H_S'(\theta_B) \times \theta_B + \frac{H_S''(\theta_B)}{2} \times \theta_B^2 \quad (16)$$

となる。 θ の 2 次、1 次の係数、および定数項をそれぞれ a 、 b 、 c とおき、 H_T として H_S のみを考えて式(16)を式(11)に代入して、次の Riccati の微分方程式を得る。

$$\frac{dx}{dt} = U \quad \text{上で} \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{a\theta^2 + b\theta + c}{c_w \rho_w h} \quad (17)$$

ここで、水温の時間的変化は、式(11)の水温に比例する過程に、さらに水温の 2 乗に比例する過程が追加されている。 $\theta=\psi(\text{定数})$ を式(17)に代入して、特殊解 ψ は

$$\psi = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad (D \equiv b^2 - 4ac \geq 0) \quad (18)$$

となる。これに $z(t)$ を未知関数として、求める $\theta(t)$ を $\theta = z + \psi$ とおき、式(17)に代入すると、 $a\psi^2 + b\psi + c = 0$ であるから次式を得る。

$$\frac{dz}{dt} \mp \frac{\sqrt{D}}{c_w \rho_w h} z = \frac{a}{c_w \rho_w h} z^2 \quad (19)$$

これは z についてのBernoulliの微分方程式であり、初期条件 $t=t_0$ のとき $z=z_0$ のもとで解くと

$$z(t) = \frac{\mp \sqrt{D}}{a - \left(a \pm \frac{\sqrt{D}}{z_0} \right) \exp \left\{ \mp \sqrt{D} \frac{(t-t_0)}{c_w \rho_w h} \right\}} \quad (20)$$

である。式(18), (19), (20)は複合同順である。 $D=0$ の場合は $z(t)$ が不定形となり、解 θ は得られない。式(20)に特殊解 ψ を加えると、最終的に解 θ は次式にまとめられる。

$$\alpha \equiv \frac{b + \sqrt{D}}{2a}, \quad \beta \equiv \frac{b - \sqrt{D}}{2a} \quad \text{において}$$

$$\theta = \frac{-\alpha(\theta_0 + \beta) + \beta(\theta_0 + \alpha) \exp \left\{ -\frac{\sqrt{D}(t-t_0)}{c_w \rho_w h} \right\}}{(\theta_0 + \beta) - (\theta_0 + \alpha) \exp \left\{ -\frac{\sqrt{D}(t-t_0)}{c_w \rho_w h} \right\}} \quad (21)$$

以上から、水温の解軌道は次のように分類される。

(i) $a > 0$ の場合 ($-\beta > -\alpha$)

式(20)より $a \pm \sqrt{D}/z_0 \gtrless 0$ で分類した解の挙動は次のようになり、これを図-1に示す。

$\theta_0 > -\beta$ のとき、

$$t = t_c = t_0 + \frac{c_w \rho_w h}{\sqrt{D}} \log \left\{ \frac{a}{a - \sqrt{D}/(\theta_0 + \alpha)} \right\} \quad (22)$$

で解は ∞ に発散 …… 図-1の①

$\theta_0 = -\beta$ のとき、解は一定値 $-\beta$ …… 図-1の②

$-\alpha < \theta_0 < -\beta$ のとき、

$t \rightarrow \infty$ で解は $-\alpha$ へ単調減少 …… 図-1の③

$\theta_0 = -\alpha$ のとき、解は一定値 $-\alpha$ …… 図-1の④

$\theta_0 < -\alpha$ のとき、

$t \rightarrow \infty$ で解は $-\alpha$ へ単調増加 …… 図-1の⑤

すなわち、 $-\alpha$ が平衡温度である。

以上、整理すると次のように分類される。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \theta_0 > -\beta & \cdots \cdots \text{① 発散} \\ \theta_0 = -\beta & \cdots \cdots \text{② 一定値} \\ -\alpha < \theta_0 < -\beta & \cdots \cdots \text{③ 平衡温度に収束} \\ \theta_0 = -\alpha & \cdots \cdots \text{④ 一定値} \\ \theta_0 < -\alpha & \cdots \cdots \text{⑤ 平衡温度に収束} \end{array} \right.$$

(ii) $a < 0$ の場合 ($-\alpha > -\beta$)

式(20)より $a \pm \sqrt{D}/z_0 \gtrless 0$ で分類した解の挙動は(i)と同様に得られ、これを図-2示す。

$\theta_0 > -\alpha$ のとき、

$t \rightarrow \infty$ で解は $-\alpha$ へ単調減少 …… 図-2の⑥

$\theta_0 = -\alpha$ のとき、解は一定値 $-\alpha$ …… 図-2の⑦

$-\beta < \theta_0 < -\alpha$ のとき、

$t \rightarrow \infty$ で解は $-\alpha$ へ単調増加 …… 図-2の⑧

$\theta_0 = -\beta$ のとき、解は一定値 $-\beta$ …… 図-2の⑨

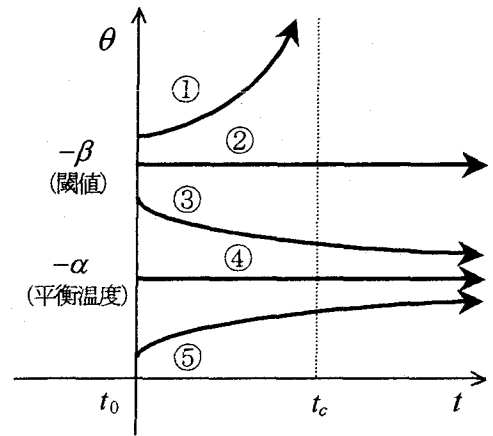


図-1 $a > 0$ の場合の水温の挙動

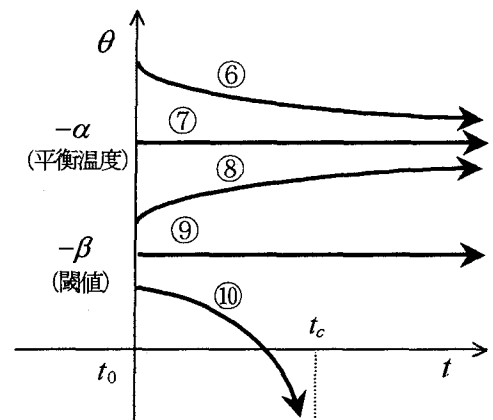


図-2 $a < 0$ の場合の水温の挙動

$\theta_0 < -\beta$ のとき、

$$t = t_c = t_0 + \frac{c_w \rho_w h}{\sqrt{D}} \log \left\{ \frac{a - \sqrt{D}/(\theta_0 + \alpha)}{a} \right\} \quad (23)$$

で解は $-\infty$ に発散 …… 図-2の⑩

以上、整理すると次のように分類される。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \theta_0 > -\alpha & \cdots \cdots \text{⑥ 平衡温度に収束} \\ \theta_0 = -\alpha & \cdots \cdots \text{⑦ 一定値} \\ -\beta < \theta_0 < -\alpha & \cdots \cdots \text{⑧ 平衡温度に収束} \\ \theta_0 = -\beta & \cdots \cdots \text{⑨ 一定値} \\ \theta_0 < -\beta & \cdots \cdots \text{⑩ 発散} \end{array} \right.$$

(iii) $a=0$ の場合、第2章(2)の線形解となる。

図-1, 2では $-\beta$ が閾値となっている。図-1においては、水温初期値 θ_0 が閾値 $-\beta$ より小さいとき水温は平衡温度 $-\alpha$ に収束し、 θ_0 が閾値のとき水温は一定値 $-\beta$ となり、 θ_0 が閾値より大きいとき水温は発散することを示している。 $-\alpha$ 、 $-\beta$ と θ_0 、気象要素(θ_∞ 、湿度: Rh , V , p , I , α)との一般的な対応関係は、今後明確にしていきたい。

図-2は、図-1を横軸対称に変換し、その後平行移動したときの挙動を示している。

(2) 変数分離法

変数分離法により式(17)を、初期条件 $t=t_0$ で $\theta=\theta_0$ のもとに解くと、

$$\int_{t_0}^t \frac{dt}{c_w \rho_w h} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{a\theta^2 + b\theta + c} \quad (24)$$

となり、水温 θ は次のように求まる。

(i) $D>0$ の場合

解は式(21)に一致する。

(ii) $D=0$ の場合

$$\theta = -\frac{b}{2a} + \frac{1}{\frac{2a}{2a\theta_0 + b} - a \frac{(t-t_0)}{c_w \rho_w h}} \quad (25)$$

このときの平衡温度は、 $\theta^* = -b/(2a)$ である。さらに、 $\alpha=\beta$ となるので、解の挙動は $a>0$ のとき、図-1の①、②、⑤となり、 $a<0$ のとき、図-2の⑥、⑦、⑩となる。また、①と⑩のとき、次式で解は発散する。

$$t_c = t_0 + \frac{2c_w \rho_w h}{2a\theta_0 + b} \quad (26)$$

(iii) $D<0$ の場合

$\gamma = \sqrt{4ac - b^2}$ とおくと

$$\theta = \frac{\theta_0 + \left\{ \frac{\gamma}{2a} + \frac{b}{\gamma} \left(\theta_0 + \frac{b}{2a} \right) \right\} \tan \left\{ \frac{\gamma(t-t_0)}{2c_w \rho_w h} \right\}}{1 - \frac{(2a\theta_0 + b)}{\gamma} \tan \left\{ \frac{\gamma(t-t_0)}{2c_w \rho_w h} \right\}} \quad (27)$$

このとき平衡温度は虚根となり、求めることはできない。

変数分離法のみでは、解の発散を判別することは不可能である。以上より、水温非線形解析においては、 D の正、0、負に対応して解をそれぞれ式(21)、(25)、(27)から求めればよい。

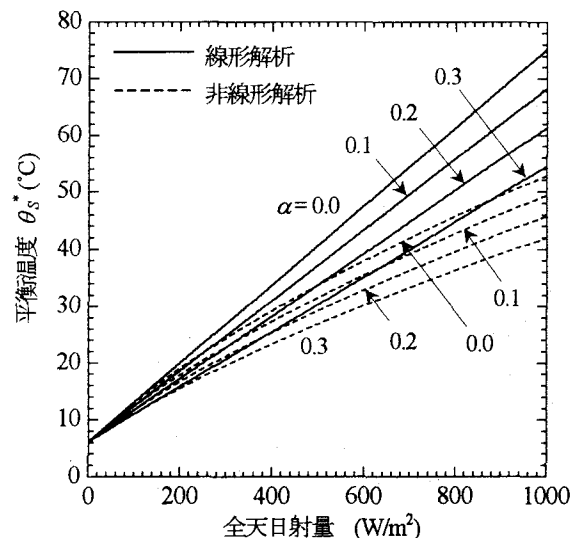


図-3 全日射量、アルベドと平衡温度 ($\theta_B=10(^{\circ}\text{C})$, $\theta_a=15(^{\circ}\text{C})$, $Rh=70(\%)$, $p=1000(\text{hPa})$, $V=2.0(\text{m/s})$)

4. 水温非線形解と線形解の比較検討

(1) 平衡温度の比較

水面熱収支量に対する平衡温度 θ_s^* は、式(10)より、気温、湿度、風速、気圧、全日射量、アルベド、基準温度の関数である。これらの気象要素を用いて非線形解析と線形解析から求めた θ_s^* の比較を図-3~5に示す。

いずれの場合においても θ_s^* は、非線形解析の方が線形解析よりも低い値を示している。全日射量、気温、湿度の増加、およびアルベド、風速の減少に伴い、水面熱収支量は増加するので平衡温度は当然増加するが、このとき非線形解析と線形解析の平衡温度の差も全般的に増加していることが分かる。ここで、図-4の気温 10°C 付近において、気温 10.3°C を境に接水気層が不安定から安定へと変化し、このとき、線形解析の θ_s^* は急激に増加して

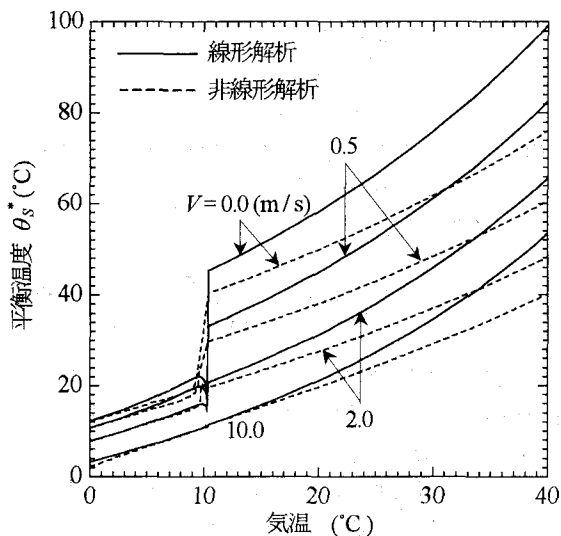


図-4 気温、風速と平衡温度 ($\theta_B=10(^{\circ}\text{C})$, $Rh=70(\%)$, $p=1000(\text{hPa})$, $I=300(\text{W/m}^2)$, $\alpha=0.07$)

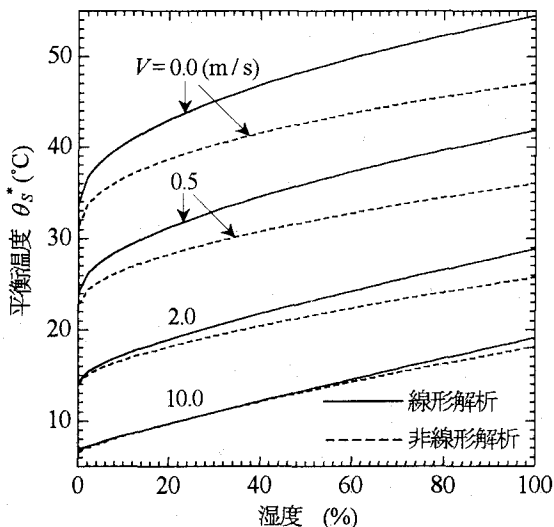


図-5 湿度、風速と平衡温度 ($\theta_B=10(^{\circ}\text{C})$, $\theta_a=15(^{\circ}\text{C})$, $p=1000(\text{hPa})$, $I=300(\text{W/m}^2)$, $\alpha=0.07$)

おり、非線形解析については $D < 0$ となり、 θ_s^* は求まらず便宜的に直線で結んでいる。

(2) 流下に伴う非線形解と線形解

北見工業大学寒地気象観測露場で観測された1987～98年までの観測データを考慮して、実際に起こりうる気象条件下で、流下に伴う水温変化量が大きく、 $D > 0$ となる気象条件の組み合わせを選定した。流下距離および流下時間に伴い、水温計算値が平衡温度に向かって上昇および下降する場合の一例を図-6、7に示す。

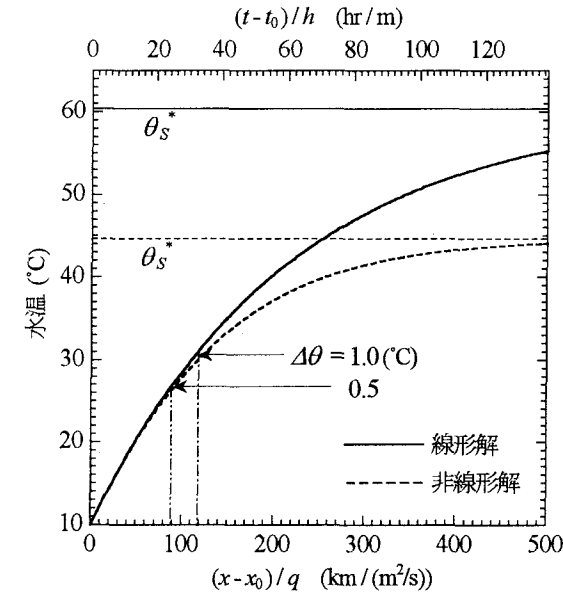


図-6 流下に伴い水温が上昇する場合の線形解と非線形解の比較 ($\theta_0=\theta_B=10(^{\circ}\text{C})$, $\theta_a=20(^{\circ}\text{C})$, $V=3.0(\text{m/s})$, $Rh=70(\%)$, $p=1000(\text{hPa})$, $I=965(\text{W/m}^2)$, $\alpha=0.07$)

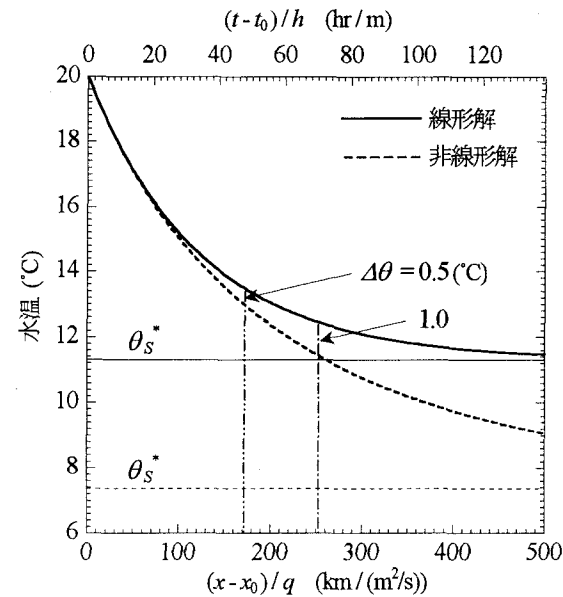


図-7 流下に伴い水温が下降する場合の線形解と非線形解の比較 ($\theta_0=\theta_B=20(^{\circ}\text{C})$, $\theta_a=15(^{\circ}\text{C})$, $V=2.0(\text{m/s})$, $Rh=70(\%)$, $p=1000(\text{hPa})$, $I=0(\text{W/m}^2)$)

図-6、7の解軌道は、それぞれ第3章で述べた $D > 0$, $a < 0$ の場合の⑧、⑥である。線形解析と非線形解析の水温計算値の差が、 $0.5, 1.0^{\circ}\text{C}$ となるのが、図-6では、それぞれ流下距離 $(x-x_0)/q=89.6, 119(\text{km}/(\text{m}^2/\text{s}))$ であり、図-7では、それぞれ171, 251 $(\text{km}/(\text{m}^2/\text{s}))$ であることを示している。

このように流下距離(あるいは流下時間)の増加に伴い、非線形解と線形解の差が増加するので、流下距離の長い場合は、非線形解析を用いた方が望ましい。

5. 結論

本論文で得られた結果をまとめると以下になる。

- (1) 水面熱収支量を水温の2次曲線で近似する方法として、水面熱収支量をある基準温度を用いてTaylor級数に展開し水温の2次の項までとる方法を採用した。
- (2) 閾値のあるBernoulliの微分方程式を用いて、河川水温の非線形解析を行う方法を示し、初期値の取る値が閾値を境に3通りの場合に対応して、水温は3つの全く異なった解軌道—平衡温度への収束、一定値、発散—となることを導いた。
- (3) ある気象要素と水理要素の組み合わせに対し、流下距離の増加に伴い非線形解と線形解の差が増加することを明らかにした。

今後の課題は、本論文で得られた水温非線形解析の手法を実河川を対象に実証し、気象要素と水理要素のどのような組み合わせに対して非線形解析が必要であるかを明らかにすることである。

参考文献

- 1) Tennessee Valley Authority: The computation of daily mean stream temperatures, Water Resour. Res. Lab. Report, No.25, pp.1-12, 1971.
- 2) Wunderlich, W.: Heat transport models for rivers and reservoirs, Int. Inst. Appl. Syst. Anal. Conf. Proc., 76-2, pp.667-713, 1976.
- 3) Morse, W. L.: Stream temperature prediction under reduced flow, Proc. ASCE, Vol.98, No.HY6, pp.1031-1047, 1972.
- 4) Morse, W. L.: The dishonest method in stream temperature modeling, Water Resour. Res., Vol.14, No.1, pp.45-51, 1978.
- 5) 佐渡公明, 杉山一郎: 河川水温に影響する水理・気象要素に関する基礎的研究, 水工学論文集, 第44巻, pp.1257-1262, 2000.
- 6) 佐渡公明: 平衡温度による河川水温の1次元解析, 土木学会論文報告集, No. 333, pp.119-127, 1983.

(2000. 10. 2受付)