

浮力一定の傾斜面から発生するプルーム

PLUME GENERATED FROM A SLOPING BENTHIC LAYER OF CONSTANT BUOYANCY

道奥康治¹・藤田一郎²・高橋俊之³・藪本圭一郎⁴

Kohji MICHIOKU, Ichiro FUJITA, Toshiyuki TAKAHASHI and Kei-ichiro YABUMOTO

¹正会員 工博 神戸大学助教授 工学部建設学科 (〒657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1)

²正会員 学博 神戸大学助教授 都市安全研究センター (同上)

³正会員 修(工) 復建調査設計(株) (〒732-0052 広島市東区光町2-10-11)

⁴(株)マイカル

A plume generated from a sloping boundary of constant buoyancy was investigated. The flow configuration is to simulate an inclined benthic layer in which dissolved constituents are released due to anaerobic reduction from a lake bottom. This process is supposed to play an important role in a eutrophication in lakes and reservoirs. A theoretical model was developed assuming a self-similar flow structure. Solutions for buoyancy and velocity fields were successfully obtained. A laboratory experiment was carried out in a thermal-buoyant plume system. A steady plume was experimentally reproduced by heating up a sloping plate to a constant temperature. Temperature and velocity were measured by means of thermocouples and particle-tracking velocimetry, respectively. The agreement between the analysis and the experiment was quite satisfactory not only in their vertical profiles but also in their streamwise development. The analysis enables us to quantitatively estimate water quality transport caused by the plume in a reservoir benthic layer.

Key Words: plume, benthic layer, anaerobic reduction, self-similar flow, density currents, reservoir eutrophication, PTV

1. はじめに

貧酸素化した湖沼や貯水池では、底質から様々な物質が嫌氣的に溶出し富栄養化を進行させる。底面が傾斜している場合には、溶出塩分の浮力効果によって傾斜プルームが発生する¹⁾。本文ではこれを「溶出プルーム」と称する。溶出プルームによって様々な栄養塩や金属成分、さらに熱が輸送されるとこれらの物質はより高濃度に水域の最深部へ集積する。この場合、鉛直一次元的な水質移動で評価されるよりもさらに底層の有機汚濁が進行する。先に著者らは、底面から一定の溶出フラックスがある場合のプルームについて理論解析と実験を行った²⁾。しかし実際の水域では、ある濃度で底質に含有される物質が溶出する一すなわちフラックス既知ではなく濃度既知の境界から物質溶出が生ずると考えられる。本研究では、この場合の溶出プルームを実験的に再現して流速・浮力を計測し、流れの自己相似性を仮定した理論解析との比較を行った。これより、傾斜底面からの溶出浮力によって駆動される流れが本理論で記述されることを確認し、溶出プルームによる水質輸送量が示された。

2. 理論解析

(1) 基礎方程式と境界条件

図-1のように一定濃度 C_0 に保たれた底面からの物質拡散によって形成される二次元境界層を考える。濃度分布を $C(z)$ 、密度への換質係数を β とする。境界層には相対浮力 $\beta g C$ が作用するため、壁面に傾斜プルームが形成さ

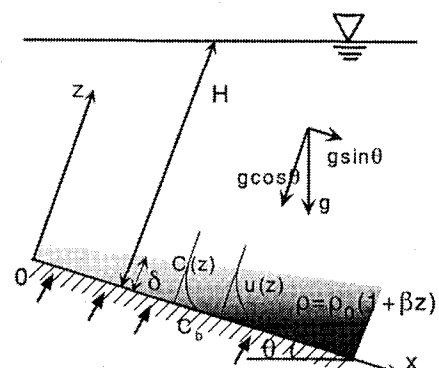


図-1 対象とするプルーム系

れる。Schlichtingは一定温度に保たれた鉛直壁に沿うブルーームの解析を実施しているが³⁾、これは本文で取り扱う密度流系で $\theta=90^\circ$ とおいた特殊な場合に相当する。本研究では、議論をより一般化して、任意の傾斜角 θ に適用できる解を求める。静水圧、境界層、Boussinesqの各近似を施して、連続式、運動方程式、物質保存式が以下のようになる²⁾。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\beta C g \sin \theta}{[G1]} - \frac{\partial}{\partial x} \int_z^\infty \beta C g \cos \theta dz + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2)$$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + w \frac{\partial C}{\partial z} = \kappa_c \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \quad (3)$$

ここで、 (u, w) は x, z 方向の流速、 C : 物質濃度、 g : 重力加速度、 θ : 傾斜角度、 p : 圧力、 ν : 動粘性係数、 κ_c : 拡散係数、である。

境界条件は、底面($z=0$)において

$$u=w=0, \quad C(0)=C_b \quad (4)$$

鉛直上方($z=\infty$)において

$$u=0, \quad C(\infty)=0 \quad (5)$$

で与えられる。

(2) 相似解析

ブルーームやジェットの解析^{3,4)}と同様にして次のような自己相似関数を導入する。

$$\eta = ax^l, \quad \psi = bx^m F(\eta), \quad C = ex^n G(\eta) \quad (6)$$

ここで、 ψ は流れ関数、 $F(\eta)$ と $G(\eta)$ は η に関する無次元関数、 (a, b, e, l, m, n) は未定定数である。

式(6)を式(1)~(5)の方程式・境界条件に代入する。関数 (F, G) が x に独立な自己相似関数であるための条件は、

$$m+n-l-1=n-2l, \quad 2m-2l-1=n=l+n-1=m-3l, \quad n=0 \quad (7)$$

であるが、これを満足する (l, m, n) の組はない。相似解析を可能にするために、ここでは式(2)右辺の第二浮力項 $[G2]$ が他項に比べて小さいと仮定する。これが厳密に成立するのは $\theta=90^\circ$ の場合だけであるが、一定の浮力フラックス供給下のブルーームに関する解析³⁾において、 $\theta=0^\circ$ に近い場合を含む広い水理条件に対して $o[G2] \ll o[G1]$ となることを確認している。本解析ではこれと異なる境界条件のブルーームを対象としているが、ブルーームのスケールや浮力は先の実験³⁾と同様である。以上のことから、 $[G2]$ を無視することによる不都合は実質的にないと考えてよい。この仮定の妥当性については、後述のように実験値との比較によっても検証されることになる。

以上の考察に基づき $[G2]$ を無視すると、べき数は以下のように決定される。

$$l=1/4, \quad m=3/4, \quad n=0 \quad (8)$$

なお、浮力フラックス一定の境界条件で発生するブルーームでは、次のべき数が得られている³⁾。

$$l=1/5, \quad m=4/5, \quad n=1/5 \quad (9)$$

式(6)、(8)を式(2)、(3)に代入すれば、 $F(\eta)$ と $G(\eta)$ に関する常微分方程式は

$$\frac{1}{2} F'^2 - \frac{3}{4} F F'' - G - \text{Pr} F''' = 0 \quad (10)$$

($\text{Pr} = \nu / \kappa_c$: Prandtl number)

$$\frac{3}{4} F G' + G'' = 0 \quad (11)$$

となる。上式は、鉛直壁面ブルーームに対してSchlichtingが得た方程式³⁾と同形である。

一方、式(4)、(5)の境界条件は次のように得られる。

$$F(0)=F'(0)=0, \quad G(0)=1, \quad F(\infty)=0, \quad G'(\infty)=0 \quad (12)$$

ここでは、簡単な方程式形となるように、 (a, b, e) が次のように定義されている。

$$a = (\kappa_c^2 C_b \beta g \sin \theta)^{-1/4}, \quad b = (\kappa_c^2 C_b \beta g \sin \theta)^{1/4}, \quad e = C_b$$

以上のように決定された諸係数を用いて、式(6)の相似関数が次のように書き直される。

$$\eta = (\kappa_c^{-2} C_b \beta g \sin \theta)^{1/4} z x^{-1/4} \quad (13)$$

$$\psi = (\kappa_c^2 C_b \beta g \sin \theta)^{1/4} x^{3/4} F(\eta) \quad (14)$$

$$C = C_b G(\eta) \quad (15)$$

$G(\eta)$ の解が得られると底面からの物質フラックスは次のように与えられる。

$$F_c = -\kappa_c \left. \frac{\partial C}{\partial z} \right|_{z=0} = -G'(0) (\kappa_c^2 C_b \beta g \sin \theta)^{1/4} x^{-1/4} \quad (16)$$

(3) 規準化

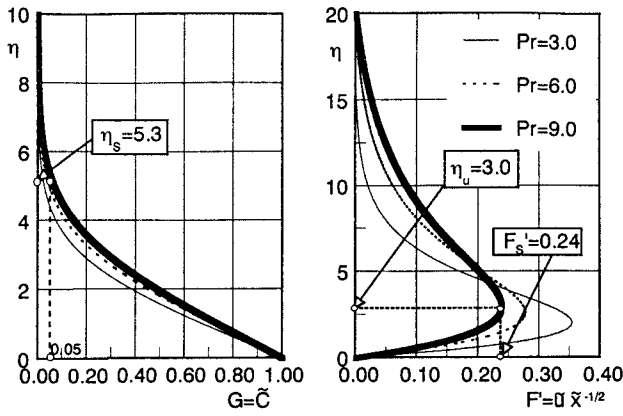
濃度の代表量を $C_0=C_b$ とにおいて、

$$P_c = \frac{U_0 L_0}{\kappa_c} = 1, \quad U_0 C_0 = U_0 C_b = F_{c0} \quad (17)$$

を満足するように、[長さ、速度、濃度フラックス]の代表量 (L_0, U_0, F_{c0}) を次式で定義する。

$$\left. \begin{aligned} L_0 &= (\kappa_c^{-2} C_b \beta g \sin \theta)^{-1/3} \\ U_0 &= (\kappa_c C_b \beta g \sin \theta)^{1/3} \\ F_{c0} &= (\kappa_c C_b^4 \beta g \sin \theta)^{1/3} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

これを用いて式(13)~(16)を無次元表示すれば、以下の式が得られる。



(a) 濃度 $G(\eta) = \tilde{C}$ (b) 流速 $F'(\eta) = \tilde{u} \cdot \tilde{x}^{-1/2}$
図-2 濃度・流速の自己相似解

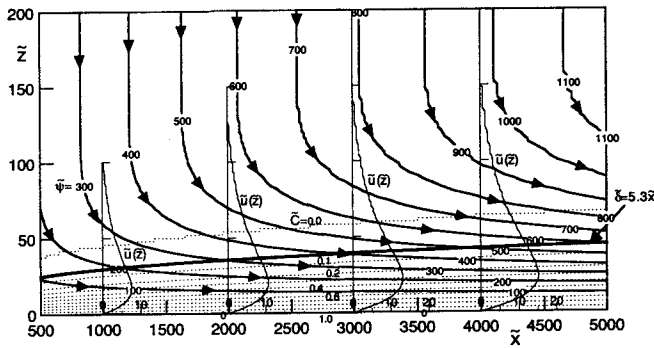


図-3 流線, 濃度, 流速分布の無次元解

[変数] $\eta = \tilde{z} \tilde{x}^{-1/4}, (\tilde{x}, \tilde{z}) = (x/L_0, z/L_0)$ (19)

[速度] $\tilde{u} = u/U_0 = \tilde{x}^{1/2} F'(\eta)$ (20)

$\tilde{w} = w/U_0 = \tilde{x}^{-1/4} \{\eta F'(\eta) - 3F(\eta)\} / 4$ (21)

[濃度] $\tilde{C} = C/C_0 = G(\eta)$ (22)

[濃度フラックス] $\tilde{F}_C = F_C/F_{C_0} = -\tilde{x}^{-1/4} G'(0)$ (23)

(4) 理論解

式(10), (11)を式(12)の境界条件のもとに積分すれば $F(\eta)$ と $G(\eta)$ の解を得る。

図-2は異なるPrandtl数に対して算定された濃度, 流速の自己相似解, $F'(\eta) = \tilde{u} \cdot \tilde{x}^{-1/2}$, $G(\eta) = \tilde{C}$ である。実験における典型的な周囲水の平均水温は10℃程度であり, この時の熱伝導係数と動粘性係数が, $\kappa_f = 0.0014 \text{ cm}^2/\text{s}$, $\nu = 0.013 \text{ cm}^2/\text{s}$ であることを考慮して, 実験値との比較に際しては $Pr = 9.0$ の理論解を採用する。

無次元座標 $(\tilde{x}, \tilde{z})$ 面上に表記した流れ関数

$\tilde{\psi} = \psi / (U_0 L_0) = \psi / \kappa_c$, 濃度 $\tilde{C}$, 流速分布 $\tilde{u}(\tilde{z})$ の理論解を図-3に示す。

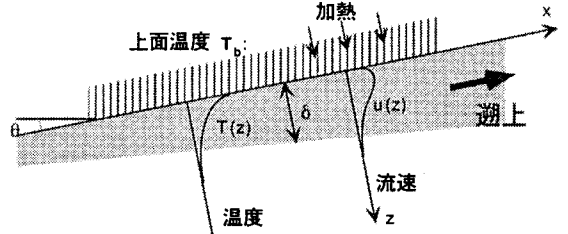


図-4 実験モデル

今, 底面濃度 C_0 の5%値, $C = 0.05C_0$ の高さ z をプルーム層厚 δ と定義する。図-2(a)から $C/C_0 = G(\eta = \eta_s = 5.3) = 0.05$ である。よって, 式(19)に基づく無次元層厚 $\tilde{\delta} = \delta/L_0$ の解は次式で与えられる。

$$\tilde{\delta} = \eta_s \cdot \tilde{x}^{1/4} = 5.3 \tilde{x}^{1/4} \quad (24)$$

これと同様にして, 図-2(b)と式(20)から最大流速 $U_{\max}$ の x 方向変化が次のように無次元表示される。

$$\tilde{U}_{\max} = F'_s \cdot \tilde{x}^{1/2} = 0.24 \tilde{x}^{1/2} \quad (25)$$

さらに, $G(\eta)$ の解から $G'(0) = 0.27$ が得られる。これを式(23)に代入すると底面濃度フラックス F_C の x 方向変化

$$\tilde{F}_C = 0.27 \tilde{x}^{-1/4} \quad (26)$$

を得る。

3. 実験方法⁵⁾

実験の便宜上, 図-1の濃度浮力系のかわりに図-4の熱浮力系において溶出プルームを用いた。幾何学的には濃度浮力系と上下逆であるが, 浮力を $\alpha T \Leftrightarrow \beta C$ のように相互換算すれば力学的に相似となり, 上記の理論を適用できる。ここで, α は熱膨張係数, T は温度である。実験装置の諸元は文献2), 5)と同様である。図-4のように角度 θ で傾斜した固定面にヒーターを張り付け, リレー回路とPC制御によって壁面が一定温度 T_b に保たれる。壁面からの熱拡散によって周囲水との浮力差が生じ, 体積供給をとまなわない自然対流の傾斜プルームが発生する。温度は斜面に沿って6断面, 1断面あたり20点で計測された。流れはナイロン粉末によって可視化され, 流速のPTV計測がなされた。流速計測法の詳細については文献5)を参照されたい。周囲水と壁面との水温差を $T_0 = 3.6 \sim 9.7^\circ\text{C}$, 傾斜角度を $\theta = 15, 30, 45, 60, 75^\circ$ の範囲で条件を設定して実験が行われた。この条件下で発生するプルームの典型的な最大流速, 層厚は $U_{\max} = 1 \text{ cm/s}$, $\delta = 1 \text{ cm}$ のオーダーであり, Reynolds数は数100程度である。

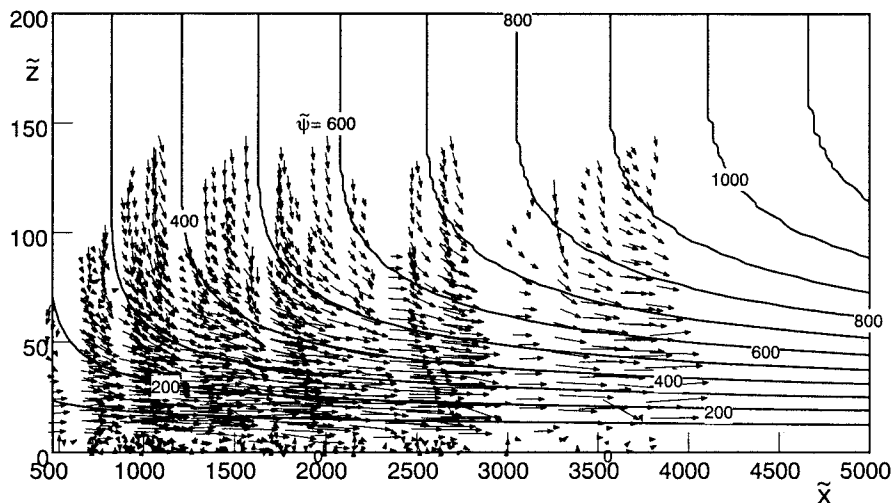
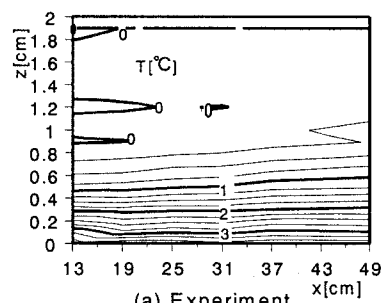
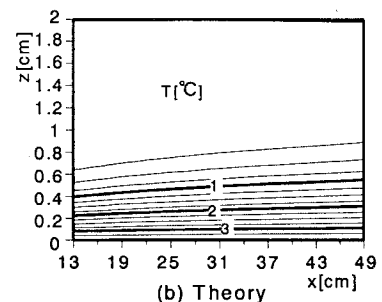


図-5 規準化された流速ベクトルの計測値（全実験ケース）と流線の理論値



(a) Experiment



(b) Theory

図-6 水温の空間分布
($\theta=15^\circ$, $T_0=3.6^\circ\text{C}$)

4. 流速・浮力分布

(1) 流速ベクトル

図-5はPTVによって得られた流速成分(u, w)を無次元化し、($\tilde{x}, \tilde{z}$)平面上にプロットした流速ベクトルである。矢印の流速ベクトルは全ての実験ケースについて、PTVから検出された流速成分を $1\text{mm} \times 50\text{mm}$ のメッシュ内でアンサンブル平均した実験値である。曲線群は本理論から得られた流線の解をあらわす。上流部では流軸に直角に周囲水が連行され、流下とともに壁面からの浮力供給を受けながらプルームが加速しその層厚を増大させている。規準化された実験値は流線の無次元解と良好に一致

しており、解析と規準化の妥当性が確認できる。

(2) 温度（浮力）分布

図-6には周囲水からの温度偏差 T の空間分布について、実験値と理論値の比較例を示す。

(3) 流速の自己相似分布

式(20), (21)に基づいて、全実験ケース、全計測点からPTVによって得られた流速 (u, w)を自己相似関数形

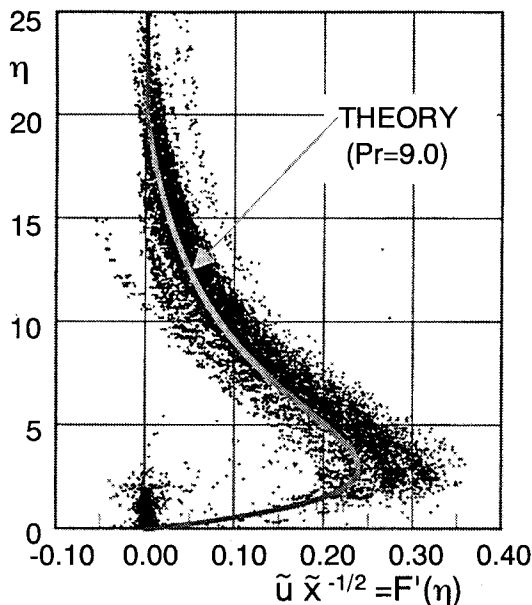


図-7 水平方向流速 u の自己相似分布

(いずれもプロットは全実験ケース、全検出粒子から得られた実験値)

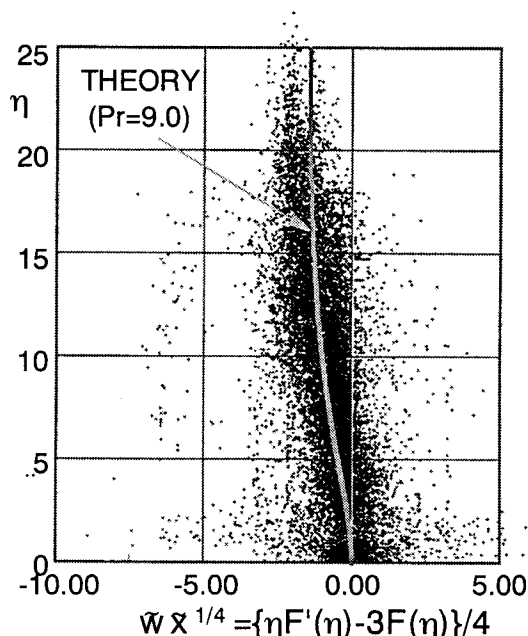


図-8 鉛直方向流速 w の自己相似分布

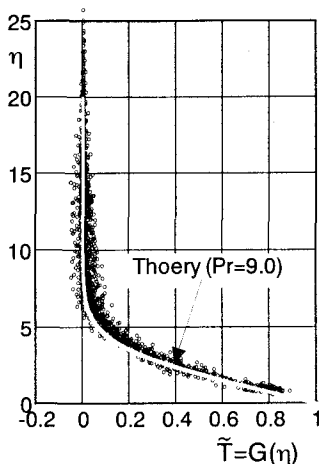


図-9 温度（浮力） T の自己相似分布（プロットは全実験ケース，全計測点で得られた実験値）

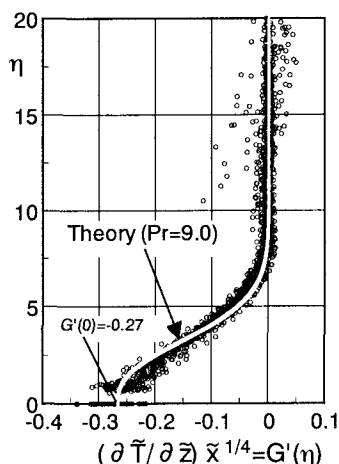


図-10 温度勾配 $(\partial T / \partial z)$ の自己相似分布（同上）

$$\tilde{u} \cdot \tilde{x}^{-1/2} = (u / U_0)(x / L_0)^{-1/2} \quad (27)$$

$$\tilde{w} \cdot \tilde{x}^{1/4} = (w / U_0)(x / L_0)^{1/4} \quad (28)$$

に規準化し，それぞれの自己相似解

$$F'(\eta), \{ \eta F'(\eta) - 3F(\eta) \} / 4 \quad (29)$$

と比較したものを図-7, 8に示す。流れの自己相似性，PTVの計測精度，理論解析の妥当性が検証された。

(3) 浮力の自己相似分布

本実験のように温度浮力系のプルームに対しては，式(22)や(23)における記号を $C \rightarrow T$ と書き換えるだけで本理論解がそのまま適用される。すなわち，温度浮力の自己相似分布は

$$\tilde{T} \equiv T / T_0 = G(\eta) \quad (30)$$

である。全ケース，全計測点から得られた温度を基準化し，自己相似解と比較したものを図-9に示す。また，浮力勾配についても自己相似関数形が

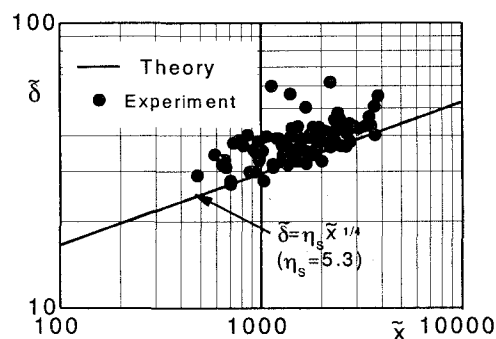


図-11 プルーム層厚 δ の流程方向変化

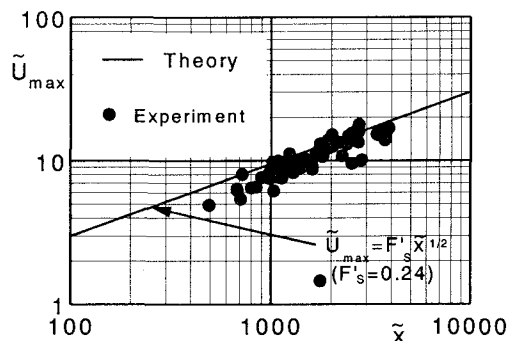


図-12 最大流速 $U_{\max}$ の流程方向変化

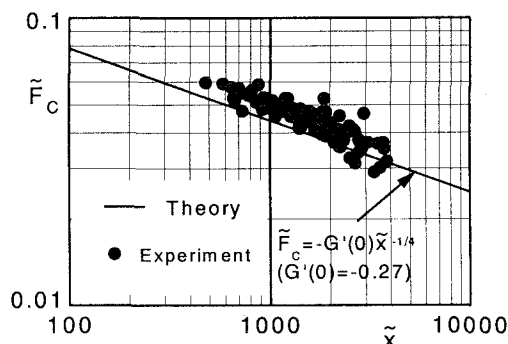


図-13 壁面浮力フラックス F_c の流程方向変化

$$\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} \right) \tilde{x}^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \left(\frac{L_0}{T_0} \right) \left(\frac{x}{L_0} \right)^{\frac{1}{4}} = G'(\eta) \quad (31)$$

のように得られ，図-10に実験値と理論値との比較を示す。浮力の自己相似性も図-9, 10より確認される。なお，図-10の $G'(0)=-0.27$ は底面から供給される無次元浮力フラックスの理論解を与える（式(23), (26)参照）。

5. プルームの特性量

(1) プルームの流程方向の発達

プルームの層厚 δ ，最大流速 $U_{\max}$ ，底面からの浮力フラックス F_c の流程方向変化について，実験値と理論解(24)～(26)との比較を図-11～13に示す。層厚と底面浮力

表-1 プルームの特性におよぼす傾斜角 θ ,
壁面温度 T_0 の影響

(「+」は正の相関, 「-」負の相関をあらわす)

特性量 支配因子	層厚 δ	流速 U_{max}	壁面浮力フラックス F_C
傾斜角度 θ	-	+	+
壁面温度 T_0	-	+	+

フラックスについては、理論値がやや過大であり、最大流速についてはやや過少傾向にあるが、理論から予測されるべき乗則は流程方向へのプルームの発達特性を良好に再現している。

(2) 傾斜角 θ , 壁面温度 $T_0(=T_b)$ の影響

壁面の傾斜角 θ と壁面温度 T_0 がプルームの特性量(δ , U_{max} , F_C)に及ぼす影響を図-14~16に示す。ここで、縦軸は基準ケース ($\theta=45^\circ$, $T_0=9.7^\circ\text{C}$) の物理量 (下付添え字“s”) で規準化している。理論値 (図中の曲線) は実験値 (図中の記号) とよく一致している。また、諸量と (θ , T_0) との相関関係は、表-1のように要約される。

7. まとめ

貧酸素化した池底で発生する溶出プルームは、栄養塩や溶解物質を流送し、有機汚濁の進行に重要な役割を果たす。本論ではある濃度の底泥から物質が溶出して湖底傾斜面上に発生するプルームを解析した。流れ・浮力(濃度)とともに流れの自己相似性を有し、理論値と良好に一致した。実際の水域における流れは、非常に薄く微弱であると予想されるので、池内全体を対象とする水質予測モデルのメッシュサイズや時間ステップでは、これを記述することはできない。ここで得られた知見をサブモデル化して、水質モデルに組み込む必要がある。

実際には、①対象とする水質項目の底泥濃度 C_b , 拡散係数 K_C , 密度への換算係数 β など物性定数を同定すること, ②水域の湖盆地形に基づき溶出プルームの流向を算定すること, ③底泥の堆積分布, 溶存酸素の分布より, 溶出範囲とプルームの発生原点(解析の $x=0$)を押さえること, ④以上の条件に基づいて溶出プルームの流速・濃度の池内分布を算定し, プルームによる水質輸送を算定すること, などの作業を要する。このようにして溶出プルームによる汚濁物質の流送過程を考慮すれば, 水質環境をより適切に評価できる。

謝辞: 本研究は平成12年度文部省科学研究費補助金, 基盤研究(B)(2) (代表: 道奥康治, 課題番号: 12555148) の援助のもとに実施された。ここに記して謝意を表する。

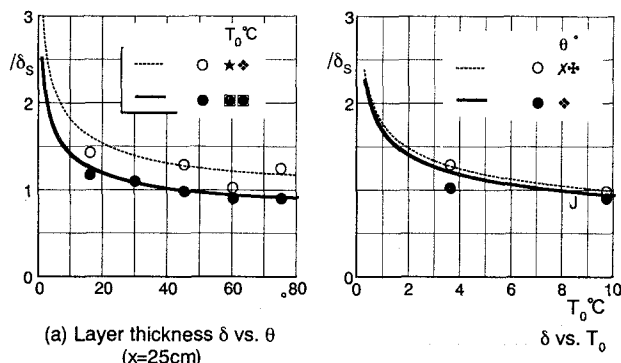


図-14 プルーム層厚 δ の(θ , T_0)への依存性

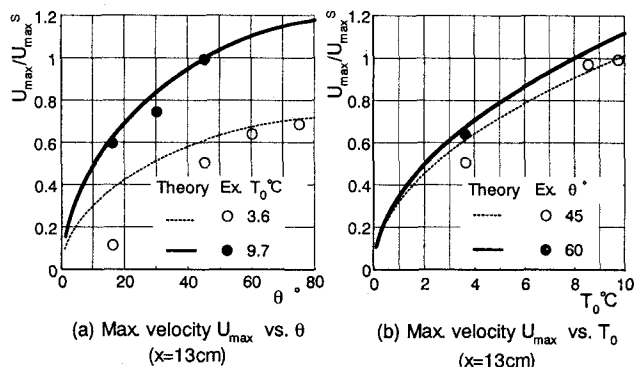


図-15 最大流速 U_{max} の(θ , T_0)への依存性

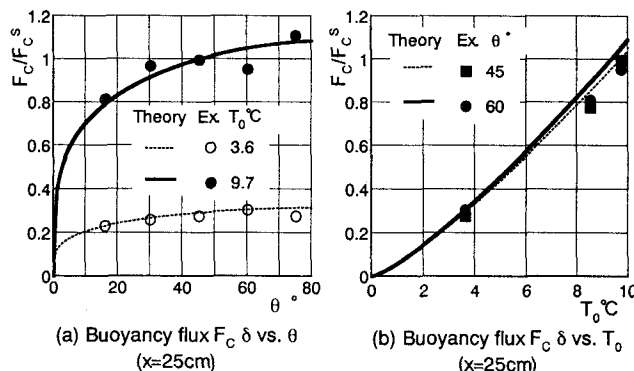


図-16 壁面浮力フラックス F_C の(θ , T_0)への依存性

参考文献

- 1) 道奥康治・神田徹・中村篤史: 異常水温成層を呈する富栄養貯水池の熱塩循環, 第4回環境流体シンポジウム, pp.439-440, 1999.
- 2) 道奥康治・松下研一・高橋俊之: 底面からの浮力溶出によって傾斜面上に発生するプルームの実験と解析, 土木学会論文集, No.649/II-51, pp.49-60, 2000.
- 3) Schlichting, H.: *Boundary-Layer Theory*, 6th Ed., McGraw-Hill, pp.253-310, 1968.
- 4) 福嶋祐介: 乱流モデルによる傾斜壁面密度噴流の解析, 土木学会論文集, 第399号/II-10, pp.65-74, 1988.
- 5) 道奥康治・藤田一郎・高橋俊之・藪本圭一郎: 壁面上の様々な浮力フラックスによって発生する傾斜プルームのPTV計測, 可視化情報, Vol.20, Suppl. No.1, pp.91-94, 2000.

(2000.10.2受付)