

粒径分布を考慮した $k - \varepsilon$ 乱流モデルによる吹雪の流動解析

ANALYSIS OF SNOW DRIFT WITH REGARD OF NON-UNIFORM PARTICLES USING NON-BOUSSINESQ $k - \varepsilon$ TURBULENCE MODEL

福嶋祐介¹・鈴木健史²・小杉健二³・佐藤威³

Yusuke FUKUSHIMA, Takefumi SUZUKI, Kenji KOSUGI and Takeshi SATO

¹正会員 工博 長岡技術科学大学教授 工学部環境・建設系 (〒940-2188 長岡市上富岡町1603-1)

²工修 第一建設工業(株) (〒950-0909 新潟市八千代1丁目4-34)

³理博 科技庁防災科研新庄雪氷防災研究支所 (〒996-0091 新庄市十日町高壇1400)

Abstract: The numerical analysis of snow drift using the non-Boussinesq $k - \varepsilon$ turbulence model is carried out. The model takes into account the size distribution of snow particles. The numerical results are compared with the results of the experiment for snow drift using the low temperature wind tunnel in Shinjo Branch of Snow and Ice Studies, NIED. The profiles of snow particle flux and the profiles of air velocity are measured. The velocity profiles are almost the same in the travel direction. On the contrary, the profiles of snow particle flux shows that snow flux increases in the travel direction. Thus, the snow drift is not fully developed. The numerical results show that the profiles of velocity and snow particle flux are well simulated by the present model.

Key Words : $k - \varepsilon$ turbulence model, snow drift, snow particles flux, size distribution

1. はじめに

自然界では固気混相流はいたるところで観察される。雪崩や吹雪などはそのうちの代表例である。著者らは固気混相流などのように、固体粒子の密度が周囲流体の密度に比べてはるかに大きい場合には密度流の解析でよく用いられるブーシネスク近似が成立しないことを指摘した。ブーシネスク近似とは固体粒子浮遊流などの重力流において、圧力項と重力項でのみ場の密度分布を考慮し、他の加速度項、拡散項においては密度を一定とする近似である。ここではブーシネスク近似が成立しない混相流体を非ブーシネスク流体と呼ぶ。

固気混相流は流体の乱れによって固体粒子が浮遊維持される機構であり、乱流構造を考慮した解析を行うことが必要である。著者ら^{1),2)}は非ブーシネスク流体に適用できる $k - \varepsilon$ 乱流モデル (Non Boussinesq $k - \varepsilon$ turbulence model, NBKEモデルと略称) を提案し、開水路における土砂浮遊流、吹雪に応用した。その結果、開水路の浮遊砂流に対しては満足 of いく結果が得られた。一方、吹雪に適用した結果、風速分布が精度よくシミュレートできるが、飛雪流量 (吹雪量とも呼ばれる) の分布の計算結果は底面付近で精度に問題があることがわかった。また、1998年度の実験では、流下方向に吹雪が十分に発達した条件で実験を行ったため、これより一般的な発達過程、減速過程にある非平衡状態にある吹雪の特性を知るには至らなかった。

一般の混相流のうち固液混相流では、比較的多くの検討がなされている。そのうち本研究のように乱流モデルを用いた代表的な研究を以下に挙げる。DeVantier and Larock³⁾は開水路の浮遊砂流を対象として、有限要素法を用いて $k - \varepsilon$ 乱流モデルの数値計算を行っている。福嶋⁴⁾、福嶋と福田⁵⁾、藤崎と高崎⁶⁾は同じく浮遊砂流を対象として $k - \varepsilon$ 乱流モデルの解を数値的に解いている。

吹雪については開水路の浮遊砂流ほどの研究は多くないが、小林^{6),7)}による現地観測、Uematsu et al.⁸⁾による数値計算例がある。Uematsu et al.の解析ではブーシネスク近似が採用されているので、その結果は濃度の小さい場合に適用が限定されることが考えられる。福嶋ほか²⁾は雪粒子の粒径が均一であると仮定しNBKEモデルの数値解を求め低温風洞装置での実験結果と比較した。その結果飛雪流量の分布に関して数値解の精度が風速分布の精度に比べて若干劣ることがわかった。

本研究の目的は雪粒子の粒径分布を考慮した非ブーシネスク $k - \varepsilon$ 乱流モデルを用いて新たな吹雪の流動シミュレーションモデルを開発することである。このモデルを検証するため、科学技術庁防災科学技術研究所新庄雪氷防災研究支所の低温風洞を用い吹雪実験を行い、風速分布と飛雪流量分布を測定した。これらの実験結果に対して、粒径を考慮した場合と一様粒径とした場合のNBKEモデルによる数値解析を行い、比較を行う。今回の実験は後述するように、飛雪流量が流下

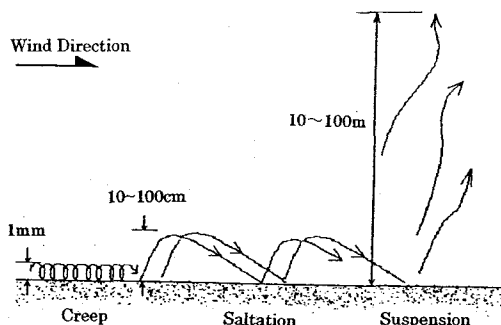


図 1: 吹雪の概念図

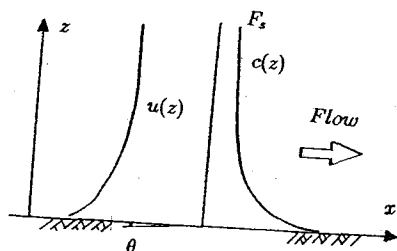


図 2: 座標系と記号

方向に増加する非平衡状態にある。一方、数値モデルは平衡状態を仮定している。これは風速分布の測定から流れ場はほぼ平衡状態にあること、飛雪量(吹雪量)が小さく風速分布に与える影響が小さいこと、非平衡流の解析を行う前段階として、平衡流解析を行うことで今回の非平衡の度合いを確認することにも意義があると考えたためである。

2. 雪粒子を用いたNBKEモデル

(1) 基礎方程式

図1に吹雪の流動の概要を示す。開水路における浮遊土砂や飛砂と同様、風速が小さい場合には雪粒子は底面上を転動しながら運動する。風速が大きくなるに従って跳躍として流動し、さらに風速が大きくなるに伴い浮遊状態に移行する。本研究が対象とするのは浮遊状態にある雪粒子の流動である。

図2に示すように、雪粒子と空気との固気二相流が傾斜角 θ の斜面上を流下する場合を考える。斜面に沿った座標系を (x, y, z) とする。ここで、 x を斜面方向の座標、 y を水平方向、 z を斜面と直交方向上向きにとる。これらに対応する流速成分を u, v, w とする。流れの場に作用する外力は重力であり、重力加速度を g とする。空気の密度を ρ_a 、雪粒子の密度を ρ_s 、混相流体の密度を ρ 、底面付近での ρ を ρ_b とする。以下では流れが十分に発達している「等流」の条件で流れの解析を行う。以下に基礎方程式を示すが式の誘導などについては福嶋ほか¹⁾を参考されたい。

雪粒子の粒径分布を考慮して、新たなシミュレーションモデルを提案する。今回の解析では降雪が零である場合を考える。まず、粒径を n 通りに分け、 k 番目の粒径

表 1: $k-\epsilon$ 乱流モデルの係数

C_μ	σ_k	σ_ϵ	$C_{1\epsilon}$	$C_{2\epsilon}$	$C_{3\epsilon}$	σ_t
0.09	1.0	1.3	1.44	1.92	0.8	1.0

を D_{sk} 、体積濃度を c_k と置く。濃度の総和を c とすると

$$c = \sum_{k=1}^n c_k \quad (1)$$

で表される。このとき、 k 番目の粒径に対する濃度の輸送方程式は次のようになる。

$$\frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{dc_k}{dz} = -w_{sk} \cos \theta c_k \quad (2)$$

ここで、 w_{sk} は D_{sk} の粒径の雪粒子の静止空気中での沈降速度 (terminal velocity) である。この式を導くに当たって、雪粒子の平均濃度 c が1に比べて十分小さい場合を考えている。粒子濃度が小さいことは、必ずしもブーシネスク近似と同じ仮定ではない。すなわち、固体粒子の密度が流体の密度に比べてかなり大きな場合 $c \ll 1$ であるが、相対密度差 $\Delta\rho/\rho_a \gg 1$ となる場合があるからである。ここで、 $\Delta\rho = \rho - \rho_a$ である。

流下方向のレイノルズ方程式、乱れ運動エネルギー k の方程式、分子粘性逸散率 ϵ の方程式はこの順で次のようになる¹⁾。

$$\frac{d}{dz} \left(\rho \nu_t \frac{du}{dz} \right) + \rho_a R \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{dc}{dz} \frac{du}{dz} + \rho_a g I_p = 0 \quad (3)$$

$$\frac{d}{dz} \left(\rho \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{dk}{dz} \right) + P + G - \rho \epsilon = 0 \quad (4)$$

$$\frac{d}{dz} \left(\rho \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{d\epsilon}{dz} \right) + c_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} \{ P + (1 - c_{3\epsilon}) G \} - c_{2\epsilon} \rho \frac{\epsilon^2}{k} = 0 \quad (5)$$

ここで、渦動粘性係数 ν_t は次式で与えられる。

$$\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (6)$$

ここで、 I_p は次式で表される圧力勾配である。

$$I_p = - \frac{1}{\rho_a g \cos \theta} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (7)$$

また、乱れの生成項 P 、乱れの負の生成項 G は次のように表される。

$$P = \rho \nu_t \left(\frac{du}{dz} \right)^2 - k \rho_a R \frac{d}{dz} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{dc}{dz} \right) \quad (8)$$

$$G = g \cos \theta \rho_a R \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{dc}{dz} \quad (9)$$

非ブーシネスク流体としたことの効果は、拡散項の中で密度が考慮されていること及び、式(3)の第二項、式(8)の第二項により表される。

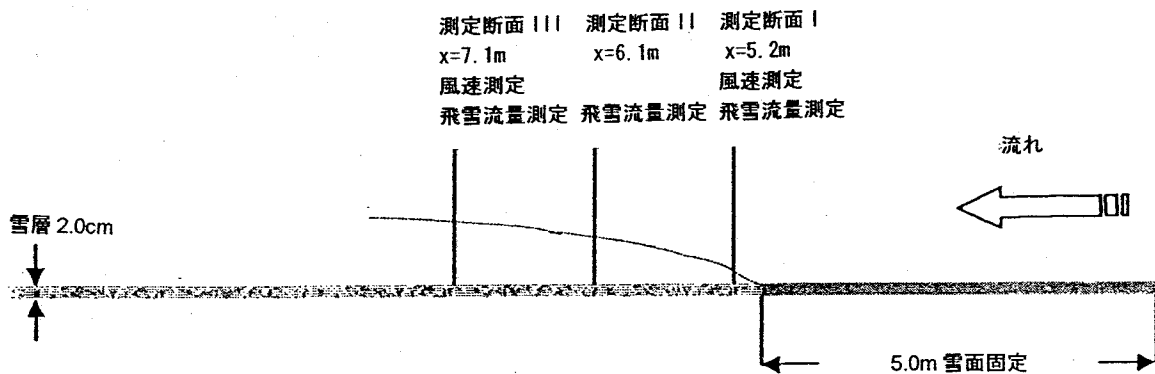


図 3: 風速, 飛雪流量測定位置

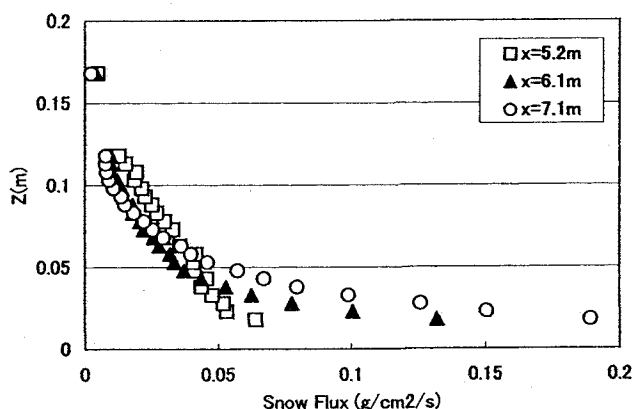


図 4: 各測定位置における飛雪流量分布

非ブーシネスク $k-\varepsilon$ 乱流モデル中には幾つかのモデル定数が含まれる。ここではこれらがブーシネスク $k-\varepsilon$ 乱流モデルの標準値と等しいと考えた。また、壁面密度噴流についての福嶋の研究⁹⁾を参考にして、 $c_{3\varepsilon}$, σ_t の値を求めた。これを表 1 にまとめて示す^{1), 2)}。

(2) 境界条件

壁面における境界条件は $k-\varepsilon$ 乱流モデルで通常用いられている壁法則を用いる。この際用いられる壁面での摩擦速度は次のように求められる。

$$u_* = \sqrt{\frac{\rho_a}{\rho_b} \left\{ \int_0^d \left(R \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{dc}{dz} \frac{du}{dz} + g I_p \right) dz \right\}} \quad (10)$$

実際の数値計算では、諸量を摩擦速度 $u_{*0} = \sqrt{g I_p d}$ 、境界層厚さ d 、底面濃度 $p_k c_b$ で無次元化し、計算領域を一定とした。無次元数に $\tilde{}$ をつける。諸量は次のように無次元化される。

$$\begin{aligned} u &= \tilde{u} u_{*0} & w &= \tilde{w} u_{*0} & c &= \tilde{c} p_k c_b \\ k &= \tilde{k} u_{*0}^2 & \varepsilon &= \tilde{\varepsilon} \frac{u_{*0}^3}{d} & z &= \tilde{z} d \\ \nu_t &= \tilde{\nu}_t u_{*0} d & \rho &= \tilde{\rho} \rho_a \end{aligned} \quad (11)$$

計算では圧力勾配 I_p が含まれており、この値を変えると境界層外縁での流速が変化する。従って後で示す吹

雪の計算結果は、「圧力勾配が同じ」とした場合の流速の値を示している。

境界条件は次のように表す。

$z = z_0$ で

$$u = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z_0}{k_s} + A_r \quad (12)$$

$$c_k = p_k c_b; \quad k = \frac{u_*^2}{\sqrt{c_\mu}}; \quad \varepsilon = \frac{u_*^3}{\kappa z_0} \quad (13)$$

境界層の外縁で u が一様流速に接続すると考えた。すなわち、 $z = d$ で

$$\frac{du}{dz} = \frac{dk}{dz} = \frac{d\varepsilon}{dz} = 0. \quad (14)$$

(3) 粒径と沈降速度の評価

計算では、雪粒子の静止空気中での沈降速度 w_{sk} を見積もる必要がある。ここでは、雪粒子が見かけの密度 $\rho_s = 0.5 \times \rho$ をもつ球形であるものと仮定する。球に関する抵抗係数 c_D の式として、Schiller の式 (Graef¹⁰⁾)。

$$c_D = \frac{24}{Re} (1 + 0.150 Re^{0.687}) \quad (15)$$

を用いた。ここで、 Re は球の半径 a_k を用いて、次式で定義されるレイノルズ数である。

$$Re = \frac{2a_k w_s}{\nu} \quad (16)$$

静止空気中での雪粒子に作用する力の釣り合い方程式により、次式による反復計算を行って沈降速度 w_{sk} を計算した。

$$c_D a_k^2 \rho \frac{1}{2} w_{sk}^2 = \frac{4a_k^2 \pi}{3} (\rho_s - \rho_a) g \quad (17)$$

3. 低温風洞装置による吹雪実験

実験に用いたのは新庄支所の低温風洞装置である。風洞は幅 1m、高さ 1m の正方形断面を有し、全長 14m である。上面と側面は透明なプラスチック板でできてお

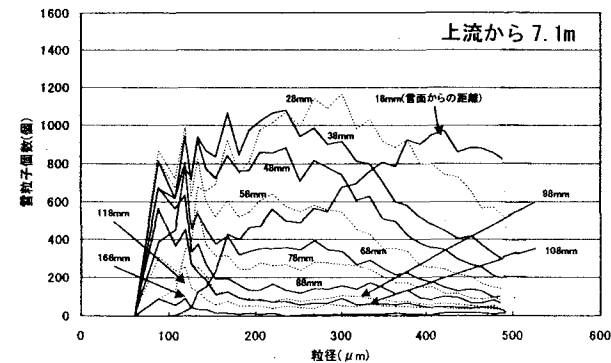
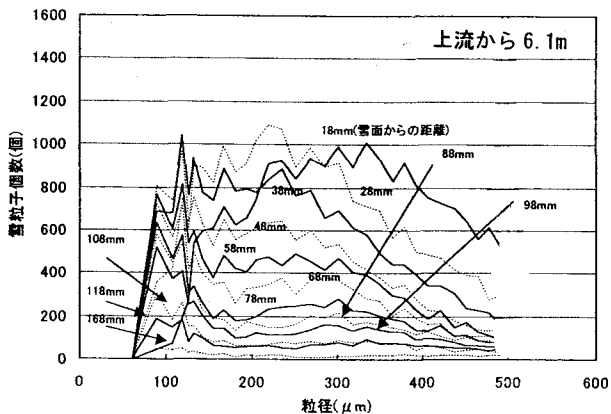
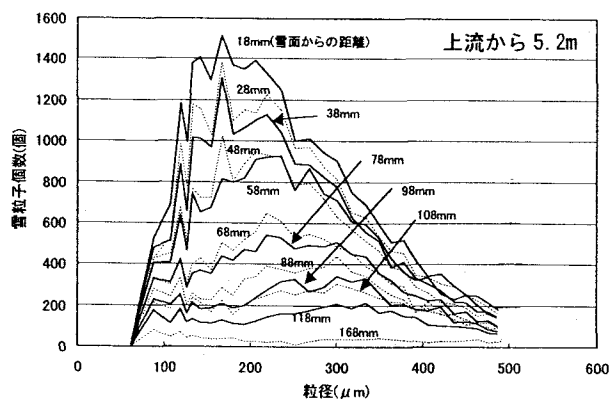


図 5: 粒径分布の高さ方向の変化

り、容易に観測ができる。実験室は室温-15.0℃、湿度25～50%であった。底面に厚さ2cmで雪を敷き詰め、設定風速10m/sで実験を行った。飛雪流量が流下方向に増加する非平衡な吹雪流の特性を調べるため、上流から5.0mの区間は水を噴霧し雪面を固定した。測定位置は図3に示すように上流から5.2m, 6.1m, 7.1mの3断面であり、風速は5.2m, 7.1m, 飛雪流量は3断面で測定した。

実験では風洞上流から、雪の供給を行って吹雪を発生し、SPC(Snow Particle Counter)を用いて底面から10cmほどの範囲で飛雪流量分布を測定した。また、熱膜式流速計を用いて底面から30cmの範囲で風速分布を測定した。吹雪量の測定時には底面に2cmの厚さで雪を敷き詰め、さらに上流端で62.5cm³/sで雪を供給した。風速の測定時には積雪層に水を噴霧し凍結させ固

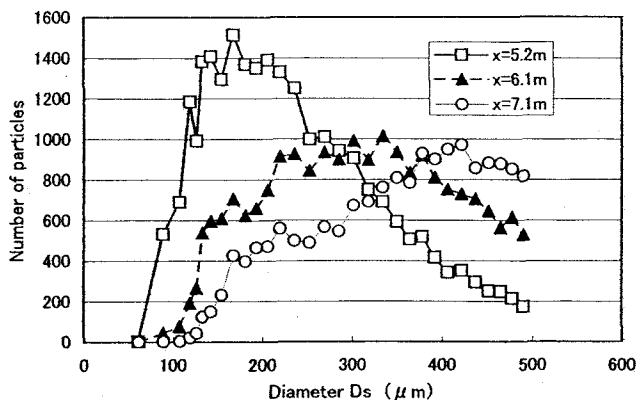


図 6: 底面近傍の粒径分布の流下方向の変化

定床とした。これは吹雪時には熱膜流速計のプロープに雪が付き測定が不可能だったためである。雪の敷き詰め密度は0.46g/cm³、平均粒径は0.24mmであった。

各測定位置における飛雪流量分布の測定結果を図4に示す。分布は各位置で大きく異なる。x=5.2mでは直線状の分布であるが流下距離が大きくなるにしたがって、底面付近の飛雪流量が急激に増加している。

図5はSPCで測定した粒径分布の高さ方向の変化を見たものである。測定位置によって分布の特徴が異なっている。底面付近では大きな粒径の粒子もあるが、測定位置が高くなるにしたがって細かな粒子だけになっていることがわかる。

図6は底面からの高さz=18mmでの粒径分布を3断面で比較したものである。これより、底面付近の粒径分布は3断面の測定位置で大きく異なっていることがわかる。すなわち、x=5.2m, x=6.1m, x=7.1mとなるにしたがって、細かい粒径の雪粒子が減少し、大きな粒径の雪粒子の割合が大きくなっている。

以上に述べたように、図7に示す風速分布を見る限り、十分に発達した境界層流れとなっているが、飛雪流量の分布、粒径分布を見ると、境界層は発達過程にあると言える。つまり、今回の実験の範囲では飛雪流量が小さいため、雪粒子の浮遊による風速分布への影響は小さいと考えられる。

4. 吹雪の流動解析

計算では、雪粒子の直径 $D_{sk}(=2a_k)$ を与え、式(15) - (17)により沈降速度を計算した。一様粒径の場合の計算条件を表2に、粒径分布を考慮した場合の計算条件を表3にまとめて示す。ここで、雪粒子の粒径 D_s あるいは D_{sk} 、およびその割合 p_k は底面付近($z=1.8$ cm)においてSPCで測定した粒度分布により求めた。風洞は水平なので、斜面の傾斜角は $\theta=0$ であるとする。

次に、数値解と実験結果を比較する。

計算では圧力勾配 I_p 、底面粗度 k_s を変化させ風速分布の実験値と計算値が最も一致するように調節した。また吹雪量が実験値と一致するように底面濃度 c_b を設定した。これらはいずれも流れの状態により定められるべきものである。したがって、解析を閉じた系とする

表 3: 粒径分布を考慮した計算条件

position x (m)	6.1			7.1		
near bed c (%)	0.06			0.06		
diameter D_{sk} (mm)	0.158	0.246	0.287	0.170	0.209	0.294
ratio p_k	0.17	0.43	0.40	0.07	0.66	0.27
Pressure slope I_p (-)	0.176			0.176		
roughness k_s (cm)	0.87			0.85		
height d (m)	0.3			0.3		

表 2: 単一粒径の計算条件

position x (m)	6.1	7.1
near bed c (%)	0.06	0.06
D_s (mm)	0.240	0.234
pressure slope I_p (-)	0.176	0.176
roughness k_s (cm)	0.87	0.85
Height d (m)	0.3	0.3

ために、これらの値をも予測する必要があるが、それについては今後の課題である。

図7に $x = 5.2\text{m}$ と $x = 7.1\text{m}$ の位置での風速分布の計算結果を実験結果と比較する。これより風速分布の計算値は全般的に壁付近の流速分布の特徴をよく表していることがわかる。また、 $x = 5.2\text{m}$ と $x = 7.1\text{m}$ の分布を比較すると両者はほぼ同じ分布形をしており、風速分布を見る限り境界層が十分に発達していることがわかる。

図8に $x = 6.1\text{m}$ と $x = 7.1\text{m}$ の飛雪流量の分布を実験値と比較したものを示す。図中、細線が粒径を単一とした計算結果、太線が粒径分布を考慮した計算結果である。実験値は白丸印である。これらの図より、一様粒径とした計算結果と粒径分布を考慮した計算結果ではそれほど大きな差はないが、単一の粒子と仮定した場合に比べ、粒径分布を考慮した計算結果は底面付近で実験値とよりよく一致していることがわかる。また、底面からの距離が大きくなるにしたがって、計算値は実験値に比べて、多少大きい結果となった。これはSPCが $50\mu\text{m}$ 以下の粒径を測定できないためと推測される。

図9に $x = 6.1\text{m}$ と $x = 7.1\text{m}$ の位置に対して計算された粒径ごとの体積濃度の分布を示す。これらの図より、粒径が大きくなると底面からの距離とともに体積濃度が早く減少することがわかる。これは粒径が大きくなると、式(17)から計算される雪粒子の沈降速度 w_{sk} が大きくなるためであり、十分に妥当な結果である。これらより計算条件を適切に選ぶことにより風速と吹雪量の分布をかなりの精度で説明できることが分かった。しかし、吹雪量の予測の観点からすると、例えば底面での濃度 c_b と水理量(例えばせん断応力など)との関係を調べる必要がある。この点は今後の課題である。一方、この実験では吹雪量が小さいため非ブーシネスク流体としたことの影響は小さく、ブーシネスク計算とあまり変わらない結果である。自然の雪の場合、吹雪量が

大きくなり、粒径が広い範囲になることも予想されるので、今回提案したような粒径分布を考慮した解析法がより高精度の解析結果を与えられられる。

5. 結 論

固体粒子を含む非ブーシネスク流れに対し適用可能な $k-\epsilon$ 乱流モデルについて検討した。今回提案したモデルは雪粒子の粒径分布を考慮している。モデルは粒径ごとの雪粒子の輸送方程式、レイノルズ方程式、乱れエネルギー k の方程式、分子粘性逸散率 ϵ の方程式よりなる。また、雪粒子の粒径ごとの空気中での最終沈降速度は抗力係数に対するSchillerの式を用いて計算を行った。

計算結果と比較するため、新庄雪氷防災研究支所にある大型低温風洞装置を用いて、吹雪を実験的に再現した。吹雪量が流下方向に増加する非平衡状態にある流れに対して風速分布、飛雪流量分布、粒径分布などの測定を行った。その結果、流下方向の三断面で飛雪流量の積分値、すなわち吹雪量が流下方向に顕著に増加していることを示した。また、粒径分布も三断面で変化していることがわかった。

NBKEモデルによる数値計算を行い、風速分布が一致するように圧力勾配、底面の粗度高さの値を定めた。さらに単一の粒径の場合と粒径分布を考慮した計算結果との比較を行い、粒径分布を考慮した結果が実験の飛雪流量分布を精度よく説明できることを示した。

今回の解析では、流れが等流にあること、すなわち非平衡状態にあることを仮定して計算を行った。実験は非平衡の下で行われており、解析との比較では留意が必要である。数値解析の結果、底面での濃度を適切に選べば飛雪流量、濃度の分布を適切に説明することが分かった。これは、今回の実験では風速分布で分かるように非平衡性がそれほど顕著でなかったためと考えられる。非平衡状態としての解析は今後の課題である。

謝辞： 新庄支所での風洞実験にあたり、本学大学院修士2年の石黒慎太郎君、1年の高木正徳君の助力を得た。また、本研究の一部は、文部省科学研究費、基盤研究(C)(課題番号09650563 代表者 福嶋祐介)の補助を受けた。ここに記して、感謝します。

参考文献

- 1) 福嶋祐介, 鏡原聖史, 野口和義, 1999: 非ブーシネスク $k-\epsilon$ 乱流モデルによる固液、固気二相流の解析, 土木学会論文集, No. 621/II-47, pp. 41-52.

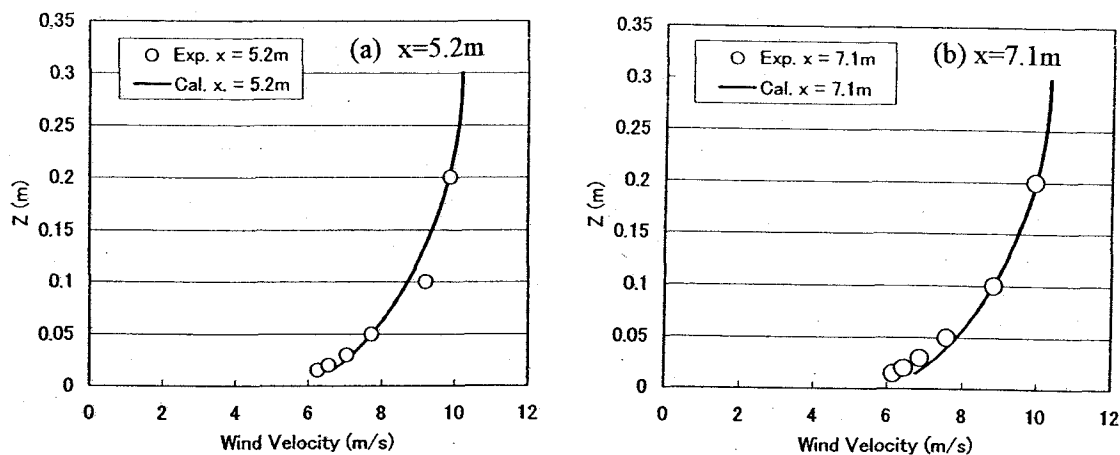


図 7: 風速分布の計算値と数値解の比較 ((a) $x=5.2\text{m}$, (b) $x=7.1\text{m}$).

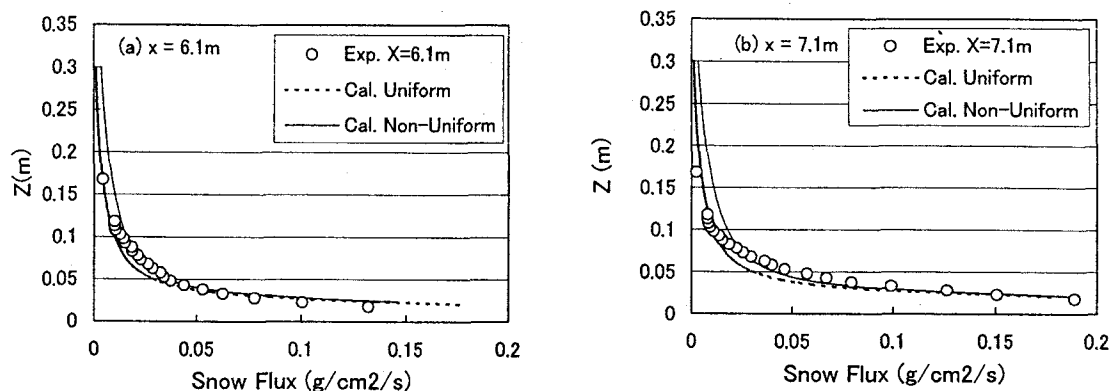


図 8: 飛雪流量分布の実験値と数値解の比較 ((a) $x=6.1\text{m}$, (b) $x=7.1\text{m}$).

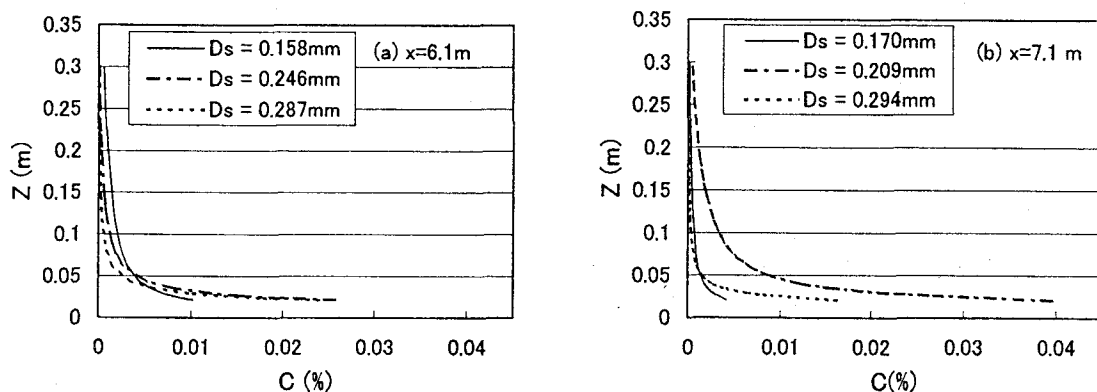


図 9: 雪粒子の体積濃度分布の数値解 ((a) $x=6.1\text{m}$, (b) $x=7.1\text{m}$).

- 2) 福嶋祐介, 藤田和成, 鈴木健史, 小杉健二, 佐藤威, 2000: 低温風洞での吹雪実験に対する非ブーシネスク $k-\epsilon$ 乱流モデルによる検討, 土木学会論文集, No.656/II-52, pp. 113-120.
- 3) DeVantier, B.A. and B.E. Larock, 1983: Sediment transport in stratified turbulent flow, *J. Hydraulic Eng., ASCE*, 109-12, 1622-1635.
- 4) 福嶋祐介, 1986: 開水路浮遊砂流の乱流構造の解析, 第30回水理講演会論文集, 30, 631-636.
- 5) 福田正晴・福嶋祐介, 1987: 浮遊砂流に対する $k-\epsilon$ 乱流モデルの適合性について, 第31回水理講演会論文集, 31, 587-591.
- 6) 藤崎一裕・高崎秀一, 1997: 浮遊砂を伴う開水路流れの解析, 水工学論文集, 41, 813-818.
- 7) 小林俊一, 1991: 吹雪時の雪粒子の移動と限界, 地学雑誌, 100(2), 240-2491.
- 8) Uematsu, T., Nakata, T., Tekeuchi, K., Arisawa, Y. and Keneda, Y., 1991: Three-dimensional numerical simulation of snowdrift, *Cold Region Science and Technology*, 20, 65-73.
- 9) 福嶋祐介, 1988: 乱流モデルによる傾斜壁面密度噴流の解析, 土木学会論文集, 399/II-10, 65-74.
- 10) Graf, W.H., 1984: *Hydraulics of Sediment Transport*, Water Resources Publications, p.42.

(2000. 10. 2受付)