

有限解析法による移流分散解析

DISPERSION ANALYSIS BY FINITE ANALYTIC METHOD

戸田圭一¹・井上和也²
Keiichi TODA and Kazuya INOUE

¹正会員 Ph.D. 京都大学助教授 防災研究所 (〒 611-0011 宇治市五ヶ庄)

²正会員 工博 京都大学教授 防災研究所 (〒 611-0011 宇治市五ヶ庄)

This paper describes the applicability of Finite Analytic Method (FAM) to dispersion problems. First, the linear stability analysis is performed and the numerical test for examining the accuracy of FAM to a simple 1-D dispersion equation is conducted. The results show that FAM can give good results as the Courant number and the longitudinal grid size become smaller and the nondimensional dispersion coefficient becomes larger. FAM is applicable for dispersion except for the case that advection is dominant. Next, FAM is applied to dispersion in a natural river and compared with the conventional methods. As the results, it has been found out that FAM can become an alternative to the six-point based method. The advantage of FAM is easiness of imposition of the upstream boundary condition. The extension of FAM to a 2-D dispersion problem is also discussed.

Key Words : *Finite Analytic Method(FAM), stability analysis, dispersion, natural river*

1. 緒言

有限解析法 (Finite Analytic Method, 略して FAM) は Chen ら¹⁾によって開発された数値解析手法の一つである。計算領域を数多くの有限な計算要素に分割し、各要素で成立する基礎方程式を各要素内で直接、解析的に解き、得られた解析解をもとに計算格子上的変数を求める方法である。基礎方程式が線形で容易に解析解を得ることができればもちろんのこと、基礎方程式が非線形の場合でも、計算要素を小さくとり、非線形の方程式を線形の方程式に置き換え線形方程式の解析解を得ることにより解を求めることが可能となる。Chen ら¹⁾は非線形の Navier-Stokes の方程式を解くにあたって、渦度方程式の式形を用い、定常状態の2次元の線形方程式を基にする解法を提示し、FAMの流体力学の分野への応用の道を拓いた。また Tsai ら²⁾は、同様の手法を用いて地下水の問題も取り扱っている。このように FAM は実現象の解析の適用範囲を拡げているが、河川、湖沼、海域の拡散現象への適用の研究事例は著者らが知るかぎり報告されていない。

一方、従来からの河川の移流分散現象の解析にあたっては、移流項の精度良い差分法の開発に主眼がおかれ、濃度とともに濃度の空間微分をも従属変数と考える Holly-Preissmann 法³⁾、Holly-Preissmann 法を

改良し、従属変数に濃度のみを用いる Komatsu らの six-point 法⁴⁾、さらに SOWMAC 法⁵⁾、Implicit HORNET 法⁶⁾などが提唱されてきた。しかしながら高精度の移流計算法を移流分散の式に適用するには、移流と拡散の計算を別々に行う split-operator 法⁷⁾を用いることが必要となる。また、上述の3)4)の方法では上流端境界条件の取り扱いにおいて何らかの付加的な操作を必要とし、5)6)の方法では移流式を implicit に解く必要がある。ところが空間的に3点、時間的に2点を用いる FAM を適用すれば、Asai ら⁸⁾の方法と同様、移流と拡散の計算を同時に行うことができ、かつ上流端の境界条件も濃度のみを直接課すだけで済む。

以上の点に鑑み、ここでは、FAMの河川の移流分散現象への適用可能性を調べてみることにする。先ず、安定解析を実施し、安定な解が得られる範囲を把握した後、1次元の単純化した移流分散方程式に FAM を適用し、解析解との比較から水理パラメーターや計算格子の大きさが計算精度にいかに関与を及ぼすかを明らかにする。次に、縦断方向に断面ならびに断面平均流速が変化する実河川の移流分散問題に FAM を適用し、従来の手法により得られる結果との比較から FAM の妥当性、有効性について考察する。最後に、1次元の FAM の平面2次元の拡散問題への拡張に関して、解析手法ならびに実現象への適用性についても議論を加える。

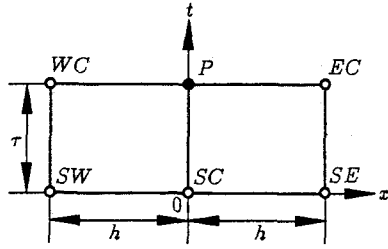


図-1 FAM の計算要素

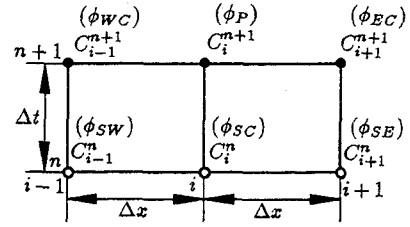


図-2 変数の対応関係

2. 有限解析法

ここでは、1次元の線形拡散方程式の解析解を基にした FAM の移流分散方程式への適用方法について述べる。まず、以下に記す ϕ を変数、 T, U を定数 ($T \neq 0, U > 0$) とする 1次元の線形拡散方程式を考える。

$$U \frac{\partial \phi}{\partial t} + 2T \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (1)$$

$-h \leq x \leq h, 0 \leq t \leq \tau$ の領域を考え、図-1 の白丸で示す 5 点 (WC, EC, SW, SC, SE) で ϕ の値が既知であるとする。

初期条件、境界条件の関数形は幾つか考えられるが、ここでは初期条件 $\phi(x, 0)$ として指数関数と 1 次関数の結合形

$$\phi(x, 0) = a_S \{ \exp(2Tx) - 1 \} + b_S x + c_S \quad (2)$$

を用い、また境界条件 $\phi(-h, t), \phi(h, t)$ を 1 次関数

$$\phi(-h, t) = a_W + b_W t \quad (3)$$

$$\phi(h, t) = a_E + b_E t \quad (4)$$

で表現し、既知の 5 点を用いて (2) ~ (4) 式の各々の係数を定めると以下ようになる。

$$a_S = \frac{\phi_{SE} + \phi_{SW} - 2\phi_{SC}}{4 \sinh^2 Th}$$

$$b_S = \frac{\phi_{SE} - \phi_{SW} - \coth Th (\phi_{SE} + \phi_{SW} - 2\phi_{SC})}{2h}$$

$$c_S = \phi_{SC}$$

$$a_W = \phi_{SW}, \quad b_W = \frac{\phi_{WC} - \phi_{SW}}{\tau}$$

$$a_E = \phi_{SE}, \quad b_E = \frac{\phi_{EC} - \phi_{SE}}{\tau}$$

(2) ~ (4) 式の初期条件、境界条件の下に (1) 式を解けば、解析解として $\phi_P = \phi(0, \tau)$ は以下のようなになる⁹⁾。

$$\begin{aligned} \phi_P = \phi(0, \tau) &= G_{WC} \cdot \phi_{WC} + G_{EC} \cdot \phi_{EC} \\ &+ G_{SW} \cdot \phi_{SW} + G_{SC} \cdot \phi_{SC} + G_{SE} \cdot \phi_{SE} \end{aligned} \quad (5)$$

ここに、

$$G_{WC} = \exp(Th) \left\{ \beta_1 + \frac{Uh^2}{\tau} (\alpha - \beta_2) \right\}$$

$$G_{EC} = \exp(-2Th) G_{WC}$$

$$G_{SW} = \exp(Th) \left\{ \frac{Uh^2}{\tau} (\beta_2 - \alpha) - 2Th \coth Th \cdot \alpha \right\}$$

$$G_{SC} = 4Th \cosh Th \coth Th \cdot \alpha$$

$$G_{SE} = \exp(-2Th) G_{SW}$$

$$\alpha = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-(-1)^m \lambda_m h \exp(-F_m \tau)}{\{(Th)^2 + (\lambda_m h)^2\}^2},$$

$$\lambda_m = \frac{(2m-1)\pi}{2h}, \quad F_m = \frac{T^2 + \lambda_m^2}{U}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{\exp(Th) + \exp(-Th)}$$

$$\beta_2 = \frac{\exp(Th) - \exp(-Th)}{2Th \{ \exp(Th) + \exp(-Th) \}^2}$$

である。

一方、一樣断面で断面平均流速 u および移流分散係数 (縦分散係数) D が一定の移流分散方程式は、

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (6)$$

と表現される。ここに $C = C(x, t)$ は断面平均濃度、 t は時間、 x は流下方向の距離である。

対象区間を $0 \leq x \leq x_L$ とし、 x を一樣な計算区間 Δx に分割し、計算時間間隔を Δt とする。図-2 に示すような x の計算格子点 $i-1, i, i+1$ 、 t の計算格子点 $n, n+1$ から構成される計算要素を考える。FAM における ϕ を C におきかえ、 τ, h をそれぞれ $\Delta t, \Delta x$ とみなし、また $T = u/(2D)$ 、 $U = 1/D$ とおいたときの G の値を G^* で表すと、 C_i^{n+1} は、

$$\begin{aligned} C_i^{n+1} &= G_{WC}^* C_{i-1}^{n+1} + G_{EC}^* C_{i+1}^{n+1} + G_{SW}^* C_{i-1}^n \\ &+ G_{SC}^* C_i^n + G_{SE}^* C_{i+1}^n \end{aligned} \quad (7)$$

と表され、(7) 式を変形すると $i=2$ から $I-1$ について以下の関係式を得る。

$$P_i \cdot C_{i-1}^{n+1} + Q_i \cdot C_i^{n+1} + R_i \cdot C_{i+1}^{n+1} = S_i \quad (8)$$

ここに

$$P_i = -G_{WC}^*, \quad Q_i = 1, \quad R_i = -G_{EC}^*,$$

$$S_i = G_{SW}^* \cdot C_{i-1}^n + G_{SC}^* \cdot C_i^n + G_{SE}^* \cdot C_{i+1}^n$$

である。ただし、 $i=1, I$ はそれぞれ、上流端 ($x=0$)、下流端 ($x=x_L$) の格子点を表す。(8) 式は $(I-2)$ 個存在し、上流端、下流端の境界条件を加えると、式の数は I 個となり、 I 個の $(n+1)$ 時間ステップの C を求

めることは、結局 I 元の連立 1 次方程式を解く問題に帰着する。

3. 安定解析

前章で示した FAM について、Von Neumann の安定解析⁵⁾を行い、安定な解が得られる条件を調べる。

(6) 式の解をフーリエ級数で表せば次式のように表現される。

$$C(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \exp\{-j\sigma_m t\} \exp\{jk_m x\} \quad (9)$$

ここに A_m, σ_m, k_m はそれぞれ、 m 番目の波の振幅、角周波数、波数であり、 j は虚数単位である。(6) 式が線形であることより、任意の波の成分

$$C(x, t) = A \exp\{-j\sigma t\} \exp\{jkx\} \quad (10)$$

を (7) 式に代入して整理すると、増幅係数 γ 、 $\gamma = |\exp(-j\sigma\Delta t)|$ は次式で表現される。

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{B_1 B_3 + B_2 B_4}{B_1^2 + B_2^2}\right)^2 + \left(\frac{B_1 B_4 - B_2 B_3}{B_1^2 + B_2^2}\right)^2} \quad (11)$$

ここに、

$$B_1 = -G_{WC}^* \cos k\Delta x + 1 - G_{EC}^* \cos k\Delta x$$

$$B_2 = G_{WC}^* \sin k\Delta x - G_{EC}^* \sin k\Delta x$$

$$B_3 = G_{SW}^* \cos k\Delta x + G_{SC}^* + G_{SE}^* \cos k\Delta x$$

$$B_4 = -G_{SW}^* \sin k\Delta x + G_{SE}^* \sin k\Delta x$$

である。波長 L ($L = 2\pi/k$) に対して、 $L/\Delta x$ を広範に変化させても γ が常に 1 以下のときには安定な解が得られる。図-3 はクーラン数 ($Cr = |u| \Delta t / \Delta x$) が 2 以下のときの安定・不安定の領域区分をクーラン数と無次元分散係数 ($D_* = D\Delta t / (\Delta x)^2$) との関係で表したものである。 $D_* \leq 0.031$ の領域では、 Cr により解が不安定になる場合が生じる。

4. 単純化した移流分散場への適用

(6) 式で表される移流分散方程式に FAM を適用し、解析解との比較を行った。テストケースは図-4 に示すように初期条件としてガウス分布を与えるものであり、その初期条件および解析解は以下の式で表される。

$$C(x, t) = \frac{M}{\sqrt{2\sqrt{D\pi}(t+t_0)}} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-ut-x_0)^2}{4D(t+t_0)}\right\} \quad (12)$$

ここに $M=661.75\text{m}$ 、 $x_0=3000\text{m}$ 、 t_0 は $\sqrt{2Dt_0}=264\text{m}$ とした。上流端 ($x=0$) および下流端 ($x=x_L$) の境界条件は、 $C(0, t)=C(x_L, t)=0$ である。 x_L は $x_L=16000\text{m}$ に設定した。計算にあたっては、FAM の計算要素に

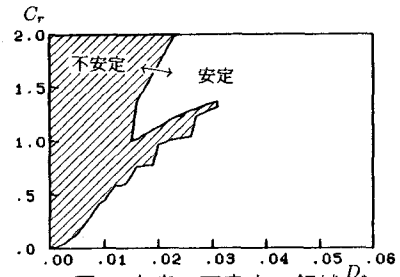


図-3 安定・不安定の領域

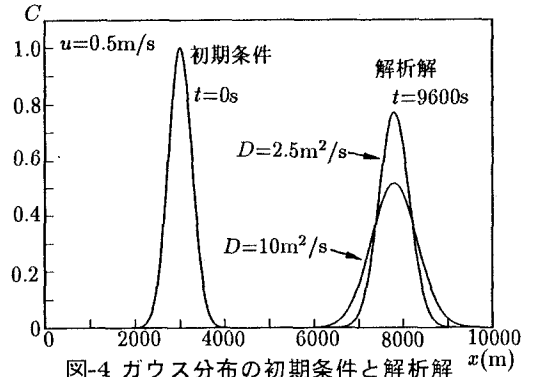


図-4 ガウス分布の初期条件と解析解

において、初期条件、境界条件がともに 0 になる場合を避けるため、微小値 ϵ ($\epsilon = 10^{-5}$) を導入し、 ϵ を下回る $C(x, t)$ に対しては $C(x, t) = \epsilon$ として取り扱った。

$u, D, \Delta t, \Delta x$ の組み合わせを種々変化させて計算を実施し、得られた数値解と解析解の比較を行った。その一例が図-5 である。FAM では移流に比べて拡散の度合いが小さい場合は、 Δx が解の精度に影響を及ぼす。また移流に比べて拡散の度合いが大きくなるほど Δx の影響は小さくなり、解の精度も良好となる。

図-6 は、 $ut_s=4800\text{m}$ の条件下の時刻 t_s における数値解の精度を $\Delta x, Cr, D_*$ の関係で整理したものである。図の縦軸は数値解の精度を表す指標 η で、

$$\eta = \frac{\int_0^\infty |C_c(x, t_s) - C_a(x, t_s)| dx}{\int_0^\infty C_a(x, t_s) dx} \quad (13)$$

である。 C_c, C_a はそれぞれ数値解、解析解を表す。数値解と解析解の比較より $\eta \leq 0.05$ の範囲では数値解は十分な精度を有する。図中には参考値として、高精度の解が得られることで実績のある、移流式に Komatsu ら⁴⁾ の six-point 法を、拡散式に完全 implicit の Crank-Nicholson 法 (CN 法) をそれぞれ適用した split-operator 法による結果 ($\Delta x=100\text{m}$) もあわせて示している。図より FAM では、 $Cr, \Delta x$ が小さく、また D_* が大きくなるにつれて解の精度が向上し、とくに $Cr \leq 0.25$ の場合には、 D_* が大きくなれば six-point 法に基づく結果と遜色ない精度に近づいてくる。また図-6 に示したすべてのケースの時刻 t_s での物質保存の誤差は 0.1% 以内に収まっている。よって移流が卓越する場合を除けば、安定解析の範囲とあわせて適切に $\Delta x, \Delta t$ を選定すれば FAM は移流分散の解析に適用可能であると判断されよう。

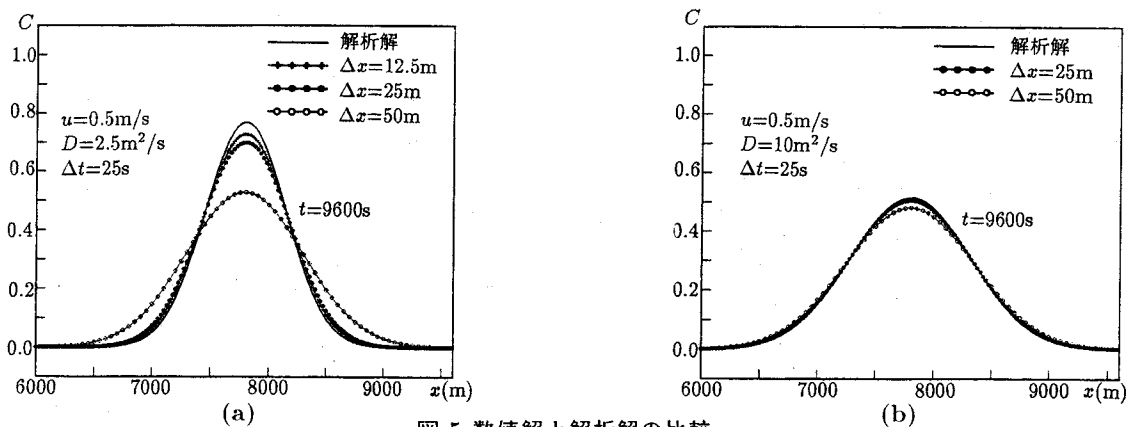


図-5 数値解と解析解の比較

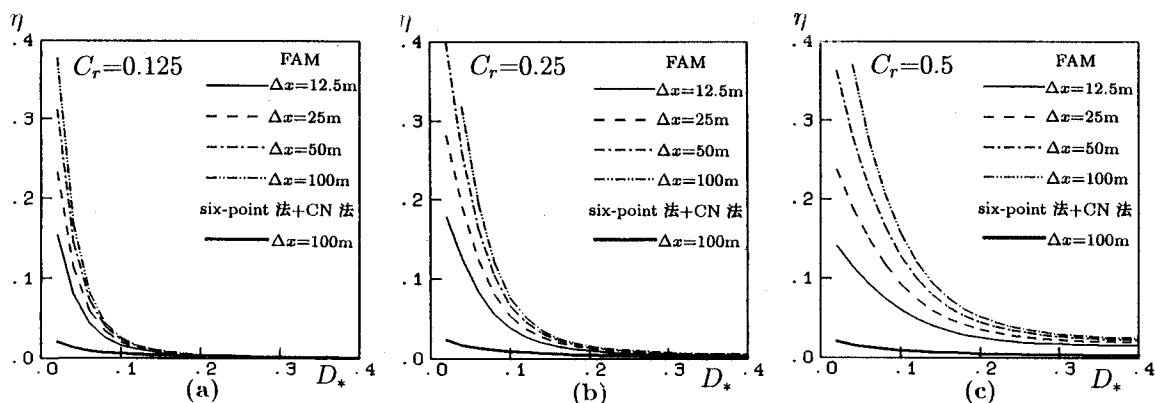


図-6 数値解の精度

5. 実河川の移流分散場への適用

実河川の移流分散場へFAMを適用してみる。実河川においては流下方向に断面積が変化し、それに伴い断面平均流速、移流分散係数も変化する。よって(6)式に代わって基礎式は、

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u(x) \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{A(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ A(x) D(x) \frac{\partial C}{\partial x} \right\} \quad (14)$$

となる。ここに $A(x)$ は河川の断面積である。上式を変形して整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + u_1(x) \frac{\partial C}{\partial x} &= D(x) \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \\ u_1(x) &= u(x) - \frac{1}{A(x)} \frac{\partial}{\partial x} \{ A(x) D(x) \} \end{aligned} \quad (15)$$

となる。すなわちFAMを適用するにあたっては(15)式を用いるが、各計算要素区間ごとに $u_1(x)$ 、 $D(x)$ が異なるため、(7)(8)式中の G_* が断面毎に変化する。

ここで対象とした河川は、新潟県下越地方を流れる阿賀野川水系折居川であり、大通川合流点から7.7km上流までを計算区間とした(図-7参照)。便宜上、上流端を $x=0$ km、合流点の下流端を7.7kmと設定した。計算区間の河床こう配は1/200～1/1000の範囲である。実河川では移流分散係数も流下に伴い変化するが、ここでは河川断面が一樣でなくてもFAMが適用

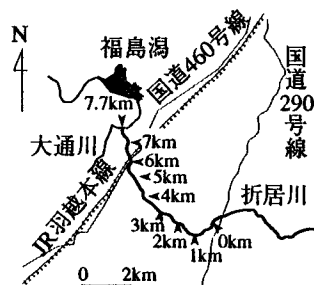


図-7 折居川平面図

可能かどうかを確かめることを主な目的としていることから $D(x)$ は一定値として扱った。 $Q=10\text{m}^3/\text{s}$ 流下時を考え、計算断面を50m間隔に設定し、粗度係数 $n=0.028$ を用いた不等流計算により各断面の水深 d 、 u 、摩擦速度 u_* 、水面幅 B を算出した。対象区間の各断面値の単純平均値は、 $\bar{d}=0.61\text{m}$ 、 $\bar{u}=0.87\text{m/s}$ 、 $\bar{u}_*=0.09\text{m/s}$ 、 $\bar{B}=24.8\text{m}$ である。これらの値から Liu¹⁰⁾ の式

$$D/\bar{d}\bar{u}_* = 0.18(\bar{B}/\bar{d})^2(\bar{u}/\bar{u}_*)^{0.5} \quad (16)$$

を用いて $D=50.8\text{m}^2/\text{s}$ を得た。実河川では、 $D/\bar{d}\bar{u}_*$ は一般に $10^2 \sim 10^3$ のオーダーであり、 D の値は $10 \sim 10^2$ のオーダーとなる。次に、 A 、 u 、 u_1 の縦断分布を示したものが図-8である。流下に伴う A 、 u の変化が現れ、 u_1 と u との間の相違も見られる。

FAMで得られる結果との比較のため、移流式に1次の風上差分法およびsix-point法を、拡散式に完全implicitのCrank-Nicholson法を用いたsplit-operator

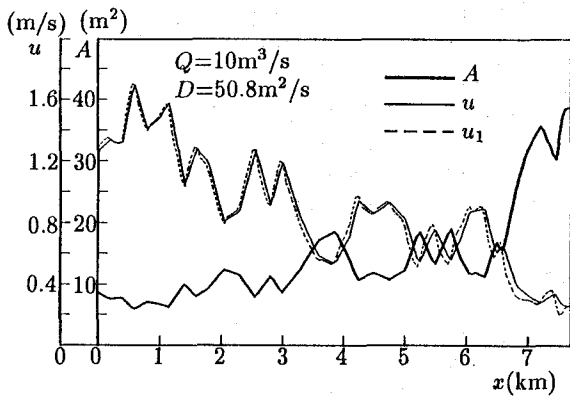


図-8 A, u, u₁の縦断分布

法による計算結果を参考結果として用いた. split-operator 法では (14) 式を基に移流式と拡散式に分割した.

最初のテスト (CASE I) では, 上流端の境界条件が $C(0, t)=0$ で, 初期条件として (12) 式で表されるガウス分布 ($t=0s$, $M=661.75m$, $x_0=1600m$, $D=50.8m^2/s$) を与えた. 次のテスト (CASE II) では, 初期条件 $C(x, 0)=0$ で, 上流端の境界条件を,

$$C(0, t) = \exp\left\{-\frac{a_0^2(t-t_0)^2}{2\sigma_0^2}\right\} \quad (17)$$

で与えた. ただし, $a_0=1.25m/s$, $t_0=1000s$, $\sigma_0=264m$ と設定した. 下流端 ($x_L=7.7km$) での境界条件は両ケースとも $C(x_L, t)=0$ である. $\Delta t=12.5s$, $\Delta x=50m$ の計算結果を図-9, 図-10 に示す. 計算区間では $Cr \leq 0.43$, $D_* = 0.25$ である. CASE II の six-point 法では上流端に近い C_2, C_3 の濃度を求めるにあたり, 小松ら⁷⁾の方法を用いた. FAM の結果は, six-point 法を用いた split-operator 法の結果とよい一致を示している. これに対して風上差分法を用いた split-operator 法では, これらのテストケースが, 拡散が移流と同様に分散に強く影響を及ぼし, 移流計算の際に生じる数値拡散が顕在化しにくい場合であるにもかかわらず, ピー

ク値の減衰と波形の平坦化がみられる.

これらのテストケースでは解析解が存在しないものの, 従来の知見から精度が高いと言われている, 移流式を six-point 法で評価する split-operator 法に極めて近い結果が FAM から得られた. よって FAM は, D が (16) 式で表現されるような通常の実河川の移流分散解析には十分適用可能であると考えられよう.

6. 平面 2 次元の場の拡散問題への拡張

水深方向に平均化された平面 2 次元の流れ場を考える. u, v, K_x, K_y をそれぞれ x, y 方向の流速, 拡散係数, C を水深方向に平均化された濃度とすると, 拡散の式は以下のとおりである.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = K_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (18)$$

FAM を適用するにあたっては, (18) 式を以下のように x, y 方向に分割する.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = K_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial C}{\partial t} + v \frac{\partial C}{\partial y} = K_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$$

そして, 各々の式に順次 FAM を適用すればよい. テストケースは $u = v = 0.25m/s$, $K_x = K_y = K = 2.5m^2/s$ の一様流れ場に初期条件としてガウス分布を与えたものであり, その初期条件および解析解は以下の式で表される.

$$C(x, t) = M_* \cdot \exp\left\{-\frac{(x-ut-x_0)^2}{4K(t+t_0)} - \frac{(y-vt-y_0)^2}{4K(t+t_0)}\right\}$$

$$M_* = M^2 / \{4K\pi(t+t_0)\} \quad (19)$$

ここに M, t_0 の値は前記 (12) 式の値と同様であり, $x_0 = y_0 = 1200m$ と設定した. 計算区間は一辺 8000m の正方形で, 境界での C の値は 0 としている. $\Delta t=25s$, $\Delta x = \Delta y = 25m$ の条件下での FAM の解と解析解を $x = y$ の

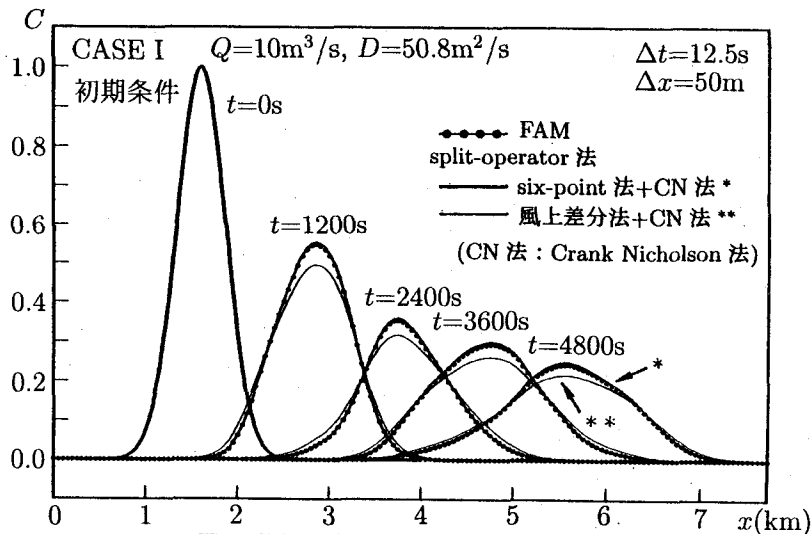


図-9 数値計算結果の比較 (CASE I)

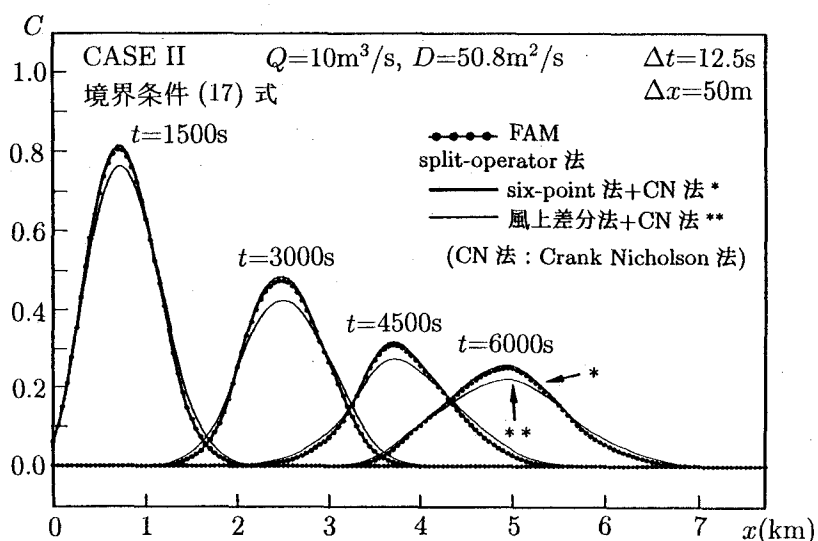


図-10 数値計算結果の比較 (CASE II)

断面上で比較したものが図-11である。Lは $x=y$ 上の原点からの距離を表す。FAMの解は解析解にかなり近いが、six-point法とCrank-Nicholson法によるsplit-operator法の精度までには至らない。湖沼や海域の平面2次元場でのFAM解析は、 x, y 方向で移流と拡散の計算が同時に進められ、かつ境界条件の組み込みが容易という長所を有するが、拡散係数の値が河川の縦分散係数値よりも1オーダー以上小さいため、精度の向上を図るには $\Delta x, \Delta y$ を小さくする必要が生じる。

7. 結言

FAMを1次元の河川の移流分散に適用したところ、計算精度に実績のある従来の差分法と良く一致した結果が得られた。FAMの長所は、split-operator法を介さずに解が得られることと上流端の境界条件の組み込みが容易なことである。FAMの2次元拡散問題への適用も可能であるが、計算格子の選定が難しい。

参考文献

- 1) Chen, C.J. and Chen, H.C.: Finite Analytic Numerical Method for Unsteady Two-Dimensional Navier-Stokes Equations, *J. of Computational Physics*, 53, pp. 209-226, 1984.
- 2) Tsai, W.F. and Chen, C.J.: Finite Analytic Numerical Solutions for Unsaturated Flow with Irregular Boundaries, *J. of Hydraulic Division*, ASCE, Vol.119, No.HY11, pp.1274-1298, 1993.
- 3) Holly, F.M.Jr. and Preissmann, A.: Accurate Calculation of Transport in Two Dimension, *J. of Hydraulic Division*, ASCE, Vol.103, No.HY11, pp. 1259-1277, 1977.
- 4) Komatsu, T., Holly Jr. F.M., Nakashiki, N. and Ohgushi, K.: Numerical Calculation of Pollutant Transport in One and Two Dimensions, *J. Hydraul. and Hydraul. Eng.*, JSCE, Vol.3, No.2, pp.15-30, 1985.

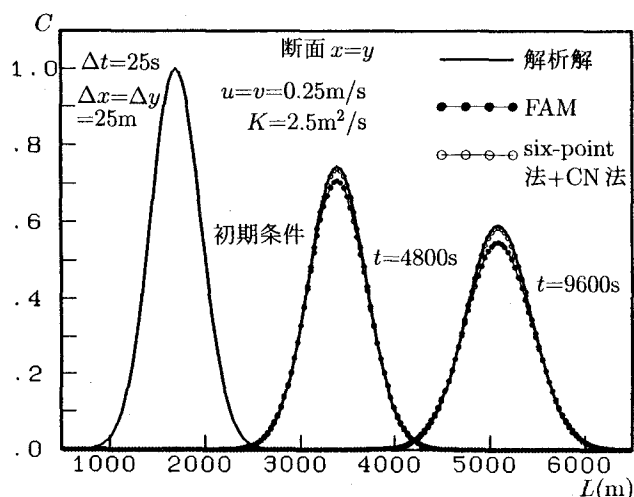


図-11 数値解と解析解の比較

- 5) 小松利光, 大串浩一郎, 朝位孝二: 拡散シミュレーションにおける移流輸送の高精度計算法の開発, 土木学会論文集, No. 456, II-21, pp. 37-46, 1992.
- 6) 朝位孝二, 小松利光, 大串浩一郎, 羽田野袈裟義: 移流拡散方程式の高精度数値計算手法に関する研究, 土木学会論文集, No. 586, II-42, pp.13-22, 1998.
- 7) 小松利光, 仲敷憲和, 大串浩一郎: 河川や沿岸部における拡散物質の輸送拡散の計算法, 第31回海岸工学講演会論文集, pp.635-639, 1984.
- 8) Asai, K., Komatsu, T., Shiomi, H. and Ohgushi, K.: Development of Simple and High Accurate Scheme for 1-D Diffusion Simulation, *Proc. of 26th IAHR Cong.*, Vol.2, pp.34-39, 1995.
- 9) Chen, C.J. and Chen, H.C.: The Finite Analytic Method, Vol.IV, IHR Report No. 232-IV, IHR, Univ. of Iowa, Iowa, U.S.A., 1982.
- 10) Liu, H.: Predicting Dispersion Coefficient of Streams, *J. of Environmental Division*, ASCE, Vol.103, No.E El, pp59-69, 1977.

(2000.10.2 受付)