

一般座標系での任意曲面に沿う開水路流れの 平面2次元モデルとその応用について

Depth Averaged Model of Open Channel Flows over an Arbitrary 3-D Surface
in a Generalized Curvilinear Coordinate System

細田 尚*
Takashi HOSODA

*正会員 工博 京都大学大学院助教授 工学研究科土木工学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

Derivation processes of a depth averaged model of open channel flows over an arbitrary 3-D surface were shown in a generalized curvilinear coordinate system in detail. It is necessary to develop the model to design hydraulic facilities such as a water slider, a manmade-cascade, etc. The ξ - η axes are set on an surface of objectives as the body fitted coordinates and the ζ axis is determined to be at right angles to an surface. The depth averaged continuity and momentum equations are derived by integrating the equations in the body fitted coordinates from the body surface to water surface. The analysis of flow over a circle cylinder is shown as the simple application of model.

Key Words : water surface profile, open channel flows, 3-D surface

1. はじめに

本研究は、一般座標系での任意曲面に沿う開水路流れの平面2次元モデルを導くとともに、単純な流れ場を対象にその適用例を示したものである。

ウォーター・スライダーなどレジャー施設で利用されている流れ、景観創出のための人工滝や溪流、地下水路系での洪水の鉛直落下施設、便器の流れなどは、複雑な曲面上の開水路流れの例であり、基準平面を設定する従来の平面2次元モデルでは解析が容易でないと考えられる。そこで本研究では、対象とする任意曲面上に一般曲線座標系を設定し、その座標系に直交する方向に3次元の連続式と運動方程式を積分することにより、任意曲面上の開水路流れの平面2次元モデルを導く。

さらに、導かれた基礎式系の簡単な応用例として、円柱表面上の流れを取り上げ、定式化と解析の手順を示した。

本研究では基礎式の誘導過程を詳細に示すとともに簡単な応用例を説明することを目的とし、より複雑な実用上の流れへの適用については、今後の課題としたい。

2. 基礎式の誘導

2. 1 座標系の設定と基本的関係式

図-1に示すように任意の曲面上に ξ, η 座標系を

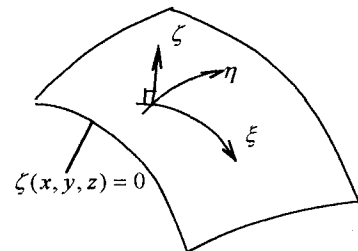


図-1 曲面上に設定される座標系

設定する。(ξ, η 座標は一般曲線座標となる。) また、曲面に直交するように ζ 座標をとる。 ζ 座標は直線とする。

すなわち、 $\zeta(x, y, z) = 0$ 上が任意曲面であり、その上に ξ, η 軸が置かれている。 ξ, η 軸と ζ 軸の直交条件は次式で表される。

$$\zeta_x \xi_x + \zeta_y \xi_y + \zeta_z \xi_z = 0 \quad (1)$$

$$\zeta_x \eta_x + \zeta_y \eta_y + \zeta_z \eta_z = 0 \quad (2)$$

ここに、 ζ_x, ξ_x などは偏微分 $\partial\zeta/\partial x, \partial\xi/\partial x$ を表す。

x_ξ, x_η, x_ζ などは ξ_x, ξ_y, ξ_z などを用いて次のように表される¹⁾。

$$x_\xi = \frac{\eta_y \zeta_z - \eta_z \zeta_y}{J}, x_\eta = \frac{\zeta_y \xi_z - \zeta_z \xi_y}{J},$$

$$x_\zeta = \frac{\xi_y \eta_z - \xi_z \eta_y}{J}, y_\xi = \frac{\eta_z \zeta_x - \eta_x \zeta_z}{J},$$

$$\begin{aligned} y_\eta &= \frac{\zeta_z \xi_x - \zeta_x \xi_z}{J}, y_\zeta = \frac{\xi_z \eta_x - \xi_x \eta_z}{J}, \\ z_\xi &= \frac{\eta_x \zeta_y - \eta_y \zeta_x}{J}, z_\eta = \frac{\zeta_x \xi_y - \zeta_y \xi_x}{J}, \\ z_\zeta &= \frac{\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x}{J} \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、ヤコビアン J は次式で定義される。

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{vmatrix} \quad (4)$$

ζ 軸は直線なので、次式が成り立つ。

$$x_\zeta^2 + y_\zeta^2 + z_\zeta^2 = 1 \quad (5)$$

また、2軸直交条件式(1)、(2)より次式が導かれる。

$$x_\eta x_\zeta + y_\eta y_\zeta + z_\eta z_\zeta = 0 \quad (6)$$

$$x_\xi x_\zeta + y_\xi y_\zeta + z_\xi z_\zeta = 0 \quad (7)$$

さらに図-2を参照して、たとえば ζ 軸上の x_ξ を $\xi-\eta$ 曲面上の値 x_{ξ_0} で表せば次のようになる。

$$\begin{aligned} x_\xi \Big|_{\zeta=\zeta_a} &= \frac{x_Q + \zeta_{xQ} \zeta_a - x_P - \zeta_{xP} \zeta_a}{\Delta \xi} \\ &= x_{\xi_0} + \zeta_a \frac{\partial}{\partial \xi} (\zeta_x)_0 \end{aligned} \quad (8a)$$

同様にして次式が導かれる。

$$x_\eta = x_{\eta_0} + \zeta \frac{\partial}{\partial \eta} (\zeta_x)_0, \quad x_\zeta = \zeta_{x_0} \quad (8b)$$

$y_\xi \sim z_\zeta$ の関係式も同様にして導かれる。

2. 2 一般座標系での自由水面の運動学的条件

図-3を参照して、ある時刻 t および $t + \Delta t$ の自由水面の形状は次式で表される。

$$\zeta - h(\xi, \eta, t) = 0$$

$$\zeta + \Delta \zeta - h(\xi + \Delta \xi, \eta + \Delta \eta, t + \Delta t) = 0$$

これら二つの式から次式が導かれる。

$$\frac{\Delta \zeta}{\Delta t} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\Delta \xi}{\Delta t} \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{\Delta \eta}{\Delta t} \frac{\partial h}{\partial \eta}$$

一方、 $\Delta \xi / \Delta t$ などとは次のように書き表される。

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \xi}{\Delta t} &= \xi_x \frac{\Delta x}{\Delta t} + \xi_y \frac{\Delta y}{\Delta t} + \xi_z \frac{\Delta z}{\Delta t}, \\ &= u_s \xi_x + v_s \xi_y + w_s \xi_z = U_s \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta \eta}{\Delta t} = V_s, \quad \frac{\Delta \zeta}{\Delta t} = W_s$$

ここに、 (u_s, v_s, w_s) : 自由水面の流速ベクトルの直角座標成分、 (U_s, V_s, W_s) : 同流速ベクトルの反変成分で次式で定義される。

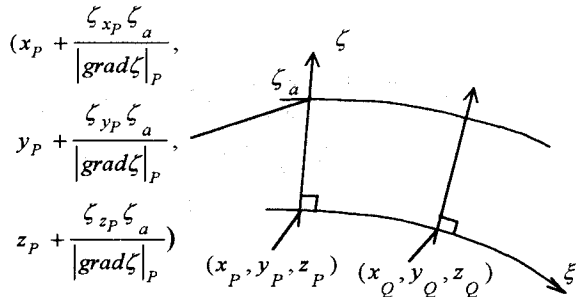


図-2 幾何学的関係式の説明図

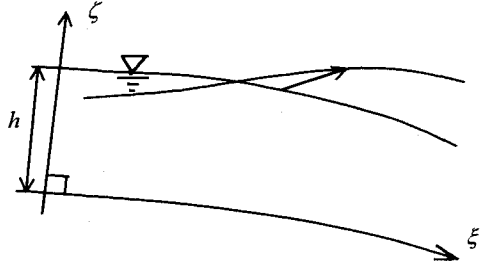


図-3 一般座標系での自由水面の運動学的条件の説明図

$$U_s = u_s \xi_x + v_s \xi_y + w_s \xi_z$$

$$V_s = u_s \eta_x + v_s \eta_y + w_s \eta_z$$

$$W_s = u_s \zeta_x + v_s \zeta_y + w_s \zeta_z$$

これらの関係式より一般座標系での自由水面の運動学的条件は流速ベクトルの反変成分を用いて次式となる。

$$W_s = \frac{\partial h}{\partial t} + U_s \frac{\partial h}{\partial \xi} + V_s \frac{\partial h}{\partial \eta} \quad (9)$$

2. 3 連続式の水深積分

3次元空間でのレイノルズ平均された連続式は流速ベクトルの反変成分で表示すれば次式となる²⁾。

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{U}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{W}{J} \right) = 0 \quad (10)$$

上式を ζ 方向に積分し、自由水面の運動学的条件式(9)を用いると式(11)が得られる。このとき、簡単のためヤコビアン J を $\zeta = 0$ での値 J_0 で近似するとともに、 U, V が ζ 方向に一定と仮定した。 J の ζ 方向の変化については、式(8)式を用いてより詳細な評価が可能である。しかし、同時に U, V の ζ 方向の変化も考慮する必要がある、非常に複雑になるため上記のように仮定した。(たとえば、反変成分を一様とするのではなく物理成分を一様とすると反変成分は ζ 方向に変化することになる。)

$$\frac{1}{J_0} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \hat{M}}{\partial \xi J_0} + \frac{\partial \hat{N}}{\partial \eta J_0} = 0 \quad (11)$$

2. 4 運動方程式の水深積分

3次元空間でのレイノルズ平均された運動方程式ベクトルの ξ 方向成分は次式で表される²⁾.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{U}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{U^2}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{VU}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{WU}{J} \right) \\ & + \frac{1}{J} \left(U^2 \Gamma_{\xi\xi}^\xi + UV \Gamma_{\xi\eta}^\xi + UW \Gamma_{\xi\zeta}^\xi + VU \Gamma_{\eta\xi}^\xi + V^2 \Gamma_{\eta\eta}^\xi \right. \\ & \quad \left. + VW \Gamma_{\eta\zeta}^\xi + WU \Gamma_{\zeta\xi}^\xi + WV \Gamma_{\zeta\eta}^\xi + W^2 \Gamma_{\zeta\zeta}^\xi \right) \\ & = \frac{1}{J} G^\xi - (\text{圧力項}) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\tau^{\xi\xi}}{\rho J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\tau^{\xi\eta}}{\rho J} \right) \quad (12) \end{aligned}$$

ここに、 G^ξ :重力加速度ベクトルの反変成分、 τ^{ij} :レイノルズ応力テンソルの反変成分、 Γ_{jk}^i :リーマン・クリストッフエル・シンボルであり、計量テンソル $\mathbf{g}$ の反変成分 g^{ij} および共変成分 g_{ij} を用いて次式で定義される。ただし、総和の規約を用いるとともに、

$$\xi^1 = \xi, \xi^2 = \eta, \xi^3 = \zeta, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z \text{ としている.}$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{is} \left(\frac{\partial g_{js}}{\partial \xi^k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial \xi^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial \xi^s} \right) \quad (13)$$

$$= - \frac{\partial x^m}{\partial \xi^j} \frac{\partial}{\partial \xi^k} \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^m} \right) = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^m} \frac{\partial}{\partial \xi^k} \left(\frac{\partial x^m}{\partial \xi^j} \right)$$

$$g^{ij} \equiv \frac{\partial \xi^i}{\partial x^m} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^m} \cdot g_{ij} \equiv \frac{\partial x^m}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^j}$$

圧力項は、条件式(1)、(2)および式(14)の関係式を用いると式(15)のように簡単化される。

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi_m}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta_m}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\zeta_m}{J} \right) = 0, (m = x, y, z) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} [\text{圧力項}] &= \frac{1}{J} (\xi_x \xi_x + \xi_y \xi_y + \xi_z \xi_z) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{p}{\rho} \right) \\ &+ \frac{1}{J} (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y + \xi_z \eta_z) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{p}{\rho} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{J} (\xi_x \zeta_x + \xi_y \zeta_y + \xi_z \zeta_z) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{p}{\rho} \right) \\ & + \xi_x \frac{p}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi_x}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta_x}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\zeta_x}{J} \right) \right\} \\ & + \xi_y \frac{p}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi_y}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta_y}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\zeta_y}{J} \right) \right\} \\ & + \xi_z \frac{p}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi_z}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta_z}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\zeta_z}{J} \right) \right\} \\ & = \frac{1}{J} (\xi_x \xi_x + \xi_y \xi_y + \xi_z \xi_z) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{p}{\rho} \right) \\ & + \frac{1}{J} (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y + \xi_z \eta_z) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{p}{\rho} \right) \quad (15) \end{aligned}$$

式(14)は式(3)の逆関係を代入することにより確かめることができる。

運動方程式を ζ 方向に積分すれば次のようになる。ただし、連続式の場合と同様にヤコビアン J を $\zeta=0$ での値 J_0 で近似するとともに、 U, V が ζ 方向に一定と仮定した。また、リーマン・クリストッフエル・シンボルも $\zeta=0$ での値で近似する。さらに、遠心力項において、流速ベクトルの ζ 方向成分を含む項を小さいとして無視した。応力項も簡単のため曲面に作用する応力ベクトルのみ考慮する。

W の効果や乱れによる運動量輸送項を考慮した高次理論については、今後検討する必要があると考えられる。

曲面上の応力ベクトルの ξ 方向成分、 τ_b^ξ は本研究での幾何学的条件のもとで、次式で表される。

$$\begin{aligned} \tau_b^\xi &= \tau^{\xi\xi} n_\xi + \tau^{\xi\eta} n_\eta + \tau^{\xi\zeta} n_\zeta \\ &= \frac{\tau^{\xi\xi}}{\sqrt{\zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2}} = \tau^{\xi\xi} \quad (16) \end{aligned}$$

ここに、 (n_ξ, n_η, n_ζ) は曲面に立てた単位法線ベクトルの共変成分であり、本研究の条件のもとで次式で表される。ただし、 ζ が距離座標である条件式

$$\zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2 = 1$$

を用いている。

$$n_\xi = n^x x_\xi + n^y y_\xi + n^z z_\xi = 0$$

$$n_\eta = n^x x_\eta + n^y y_\eta + n^z z_\eta = 0$$

$$n_\zeta = \frac{1}{\sqrt{\zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2}} = 1$$

上記の関係式および仮定を用いると、運動方程式の水深積分は次式で表される。

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\hat{M}}{J_0} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{U\hat{M}}{J_0} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V\hat{M}}{J_0} \right) \\
& + \frac{1}{J_0 h} \left(\hat{M}^2 \Gamma_{0\xi\xi}^\xi + \hat{M}\hat{N}\Gamma_{0\xi\eta}^\xi + \hat{N}\hat{M}\Gamma_{0\eta\xi}^\xi + \hat{N}^2 \Gamma_{0\eta\eta}^\xi \right) \\
& = \frac{h}{J_0} G^\xi - \frac{1}{J_0} (\xi_{x_0}^2 + \xi_{y_0}^2 + \xi_{z_0}^2) \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^h \frac{p}{\rho} d\zeta \quad (17) \\
& - \frac{1}{J_0} (\xi_{x_0} \eta_{x_0} + \xi_{y_0} \eta_{y_0} + \xi_{z_0} \eta_{z_0}) \frac{\partial}{\partial \eta} \int_0^h \frac{p}{\rho} d\zeta - \frac{\tau_b^\xi}{\rho J_0}
\end{aligned}$$

同様に、 η 方向の運動方程式は次式となる。

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\hat{N}}{J_0} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{U\hat{N}}{J_0} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V\hat{N}}{J_0} \right) \\
& + \frac{1}{J_0 h} \left(\hat{M}^2 \Gamma_{0\xi\xi}^\eta + \hat{M}\hat{N}\Gamma_{0\xi\eta}^\eta + \hat{N}\hat{M}\Gamma_{0\eta\xi}^\eta + \hat{N}^2 \Gamma_{0\eta\eta}^\eta \right) \\
& = \frac{hG^\eta}{J_0} - \frac{1}{J_0} (\eta_{x_0} \xi_{x_0} + \eta_{y_0} \xi_{y_0} + \eta_{z_0} \xi_{z_0}) \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^h \frac{p}{\rho} d\zeta \\
& - \frac{1}{J_0} (\eta_{x_0}^2 + \eta_{y_0}^2 + \eta_{z_0}^2) \frac{\partial}{\partial \eta} \int_0^h \frac{p}{\rho} d\zeta - \frac{\tau_b^\eta}{\rho J_0} \quad (18)
\end{aligned}$$

ここに、 $\hat{M} \equiv Uh, \hat{N} \equiv Vh$ 。

次に、圧力分布とその水深積分を計算する。 ζ 方向の運動方程式において加速度項と応力項を無視すると次のようになる。ただし、これまでと同様、計量は $\zeta=0$ の値で近似する。

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{J_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{J_0} (U\Gamma_{0\xi\xi}^\zeta + V\Gamma_{0\eta\xi}^\zeta + U\Gamma_{0\xi\eta}^\zeta + V\Gamma_{0\eta\eta}^\zeta) \\
& = \frac{G^\zeta}{J_0} \quad (19)
\end{aligned}$$

上式を積分して圧力分布を求めれば次のようになる。

$$\begin{aligned}
& \frac{p}{\rho} = (U\Gamma_{0\xi\xi}^\zeta + V\Gamma_{0\eta\xi}^\zeta + U\Gamma_{0\xi\eta}^\zeta + V\Gamma_{0\eta\eta}^\zeta)(h-\zeta) \\
& - G^\zeta(h-\zeta) \quad (20)
\end{aligned}$$

定式より、式(17)、(18)に現れる圧力的水深積分は次式となる。

$$\begin{aligned}
& \int_0^h \frac{p}{\rho} d\zeta = (U\Gamma_{0\xi\xi}^\zeta + V\Gamma_{0\eta\xi}^\zeta + U\Gamma_{0\xi\eta}^\zeta + V\Gamma_{0\eta\eta}^\zeta) \frac{h^2}{2} \\
& - G^\zeta \frac{h^2}{2} \quad (21)
\end{aligned}$$

結局上記に導かれた基礎式は、水深平均された流れの曲がりによる遠心力と、曲面の曲率に起因する遠心力による静水圧からのずれを考慮した平面2次元モデルになっている。

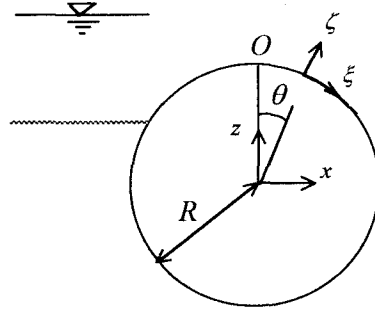


図-4 円柱曲面上の流れ解析のための座標系

3. 簡単な応用例

これまで説明してきた任意曲面上の開水路流れの水深積分モデルを用いた簡単な応用例として、定常状態での円柱曲面上の流れの水面形解析を考える。円柱曲面上の流れは直交曲線座標系で解析することができるが、一般座標系を用いた解析法の手順を説明することが目的なので、任意曲面に対しても応用可能な方法で解析を進める。

3. 1 座標系の設定

簡単のため η 方向に一樣の流れを考える。座標系の設定を図-4に示す。 ξ 座標と θ の関係を

$$\xi = R \cdot \theta$$

とすると、直角座標と一般座標の関係は次式で与えられる。

$$x = (R + \zeta) \sin\left(\frac{\xi}{R}\right), y = \eta, z = (R + \zeta) \cos\left(\frac{\xi}{R}\right) \quad (22)$$

3. 2 計量の計算

式(22)より $\zeta=0$ でのヤコビアンを計算すれば下記のようなになる。

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{J_0} = \begin{vmatrix} x_{\xi_0} & x_{\eta_0} & x_{\zeta_0} \\ y_{\xi_0} & y_{\eta_0} & y_{\zeta_0} \\ z_{\xi_0} & z_{\eta_0} & z_{\zeta_0} \end{vmatrix} \\
& = \begin{vmatrix} \cos(\xi/R) & 0 & \sin(\xi/R) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\xi/R) & 0 & \cos(\xi/R) \end{vmatrix} = 1
\end{aligned}$$

また、0でないリーマン・クリストッフェル・シンボルは次のようになる。

$$\Gamma_{0\xi\xi}^\zeta = \left(-x_\xi \frac{\partial \zeta_x}{\partial \xi} - y_\xi \frac{\partial \zeta_y}{\partial \xi} - z_\xi \frac{\partial \zeta_z}{\partial \xi} \right) \bigg|_{\zeta=0} = -\frac{1}{R}$$

その他、必要となる $\zeta=0$ での共変基底ベクトルは次のようになる。

$$\mathbf{e}_\xi = x_\xi \mathbf{i} + y_\xi \mathbf{j} + z_\xi \mathbf{k} = \cos\left(\frac{\xi}{R}\right) \mathbf{i} - \sin\left(\frac{\xi}{R}\right) \mathbf{k}$$

$$\mathbf{e}_\eta = x_\eta \mathbf{i} + y_\eta \mathbf{j} + z_\eta \mathbf{k} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{e}_\zeta = x_\zeta \mathbf{i} + y_\zeta \mathbf{j} + z_\zeta \mathbf{k} = \sin\left(\frac{\xi}{R}\right) \mathbf{i} + \cos\left(\frac{\xi}{R}\right) \mathbf{k}$$

3. 3 流れの基礎式

上述の関係式を連続式(11), 運動方程式(17)に代入する.

$V=0, \partial/\partial\eta=0$ より連続式は次のようになる.

$$\frac{\hat{M}}{J_0} = \hat{M} = \hat{M}_0 = \text{一定} \quad (23)$$

運動方程式を示す前に, 重力項と底面せん断応力項の表示を考える.

式(17)中の G^ξ は重力加速度ベクトル $\mathbf{G}$ の反変成分として次のように導かれる.

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= -g\mathbf{k} = G^\xi \mathbf{e}_\xi + G^\eta \mathbf{e}_\eta + G^\zeta \mathbf{e}_\zeta \\ &= (G^\xi \cos(\xi/R) + G^\zeta \sin(\xi/R)) \mathbf{i} + G^\eta \mathbf{j} \\ &\quad (-G^\xi \sin(\xi/R) + G^\zeta \cos(\xi/R)) \mathbf{k} \end{aligned}$$

上式より

$$\begin{aligned} G^\xi \cos(\xi/R) + G^\zeta \sin(\xi/R) &= 0 \\ -G^\xi \sin(\xi/R) + G^\zeta \cos(\xi/R) &= -g \end{aligned}$$

であるから, 次式が得られる. 上式の展開中, 先に導いた共変基底ベクトルの表示式を用いている.

$$G^\zeta = -g \cos(\xi/R), G^\xi = g \sin(\xi/R) \quad (24)$$

一方, 底面せん断応力ベクトル τ_b は水深平均流速ベクトル $\mathbf{U}$ と摩擦係数 f を用いて次式で評価される.

$$\frac{\tau_b}{\rho} = f|\mathbf{U}|\mathbf{U}$$

水深平均流速ベクトル $\mathbf{U}$ の大きさは, $V=0$ のとき共変基底ベクトルの表示式を用いて次のようになる.

$$|\mathbf{U}|^2 = U^2 \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_\xi + U V \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_\eta + V^2 \mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_\eta = U^2$$

よって, 底面せん断応力ベクトルの反変成分は次式で表される.

$$\frac{\tau_b^\xi}{\rho} = f|\mathbf{U}|\mathbf{U} \quad (25)$$

以上の結果を式(17)に代入すると式(26)が導かれる.

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{U \hat{M}}{J_0} = \frac{gh}{J_0} \sin\left(\frac{\xi}{R}\right) - \frac{1}{J_0} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(g \cos\left(\frac{\xi}{R}\right) \frac{h^2}{2} - \frac{\hat{M}^2}{2R} \right)$$

$$- \frac{1}{J_0} f |\mathbf{U}| \mathbf{U} \quad (26)$$

3. 4 水面形解析

(1) 水面形方程式

式(26)を式(23)を用いて水面形方程式に書き換えれば次式となる.

$$\frac{dh}{d\xi} = \frac{gh \sin\left(\frac{\xi}{R}\right) \left(1 + \frac{h}{2R}\right) - f \frac{\hat{M}_0^2}{h^2}}{gh \cos\left(\frac{\xi}{R}\right) - \frac{\hat{M}_0^2}{h^2}} \quad (27)$$

(2) 特異点の位置と水深

特異点の位置 ξ_s と水深 h_s は式(27)中の分母=0で与えられる限界水深と, 分子=0で定義される擬似等流水深の交点として与えられる.

$$g^2 h_s^6 = \hat{M}_0^4 \left\{ \frac{f^2}{(1 + h_s/2R)^2} + 1 \right\} \quad (28)$$

$$\tan\left(\frac{\xi_s}{R}\right) = \frac{f}{1 + h_s/(2R)} \quad (29)$$

(3) 特異点の分類と水面勾配

式(27)を特異点周りで展開し線形化すると次のようになる.

$$h = h_s + h', \xi = \xi_s + \xi'$$

$$\frac{dh'}{d\xi'} = \frac{a(h'/h_s) + b(\xi'/h_s)}{c(h'/h_s) + d(\xi'/h_s)} \quad (30)$$

$$a = f \frac{3 + 2(h_s/R)}{1 + (h_s/2R)}, b = \frac{h_s}{R},$$

$$c = 3, d = -f \frac{h_s/R}{1 + (h_s/2R)}$$

特性方程式

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$$

の判別式

$$D = (a-d)^2 + 4bc > 0$$

および $ad - bc < 0$ より特異点は鞍形点に分類される.

また, 特異点での水面勾配は次式で与えられ, 複合中の一の勾配の水面形が実現する³⁾.

$$\left. \frac{dh'}{d\xi'} \right|_{\xi'=0} = \frac{-(d-a) \pm \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}}{2c} \quad (31)$$

(4) 水面形解析結果

$f = 0.005, R = 1(m), \hat{M}_0 = 0.3(m^2/s)$ とした水面

形解析結果を図-5に示した. 図中には擬似等流水深と限界水深も示してある.

円柱のほとんど頂点で特異点が現れ, 特異点を過ぎた後円柱に沿って水深が減少し, 次に擬似等流水深と交差した後増加していく.

円柱の最下点を通過しても流れは円柱に沿って流れつづけるが, どの位置で円柱から離れるかを予測するのは本研究のモデルの範囲では困難である. すなわち, 流れが円柱から離れて自由落下する条件として, 流速分布形が変化し曲面上の流速が局所的に0になる(逆流する直前の状態)ことが考えられるが, 本研究では非回転条件などを考慮した流速分布形の変化過程を考慮していない. そのさい, 流れと水面形の急激な変化が生じるため, ζ 方向の加速度項を考慮する必要性も生じよう. 今後, このような高次理論の展開や水理実験による検討など詳細な考察が必要と考えられる.

4. おわりに

本研究では, 一般座標系での任意曲面に沿う開水路流れの平面2次元モデルの導出を詳細に示すとともに, 単純な流れ場を対象にその適用例を示した. 今後, 様々な曲面上の流れについて考察するとともに, より複雑な実用上の問題への適用を計りたい.

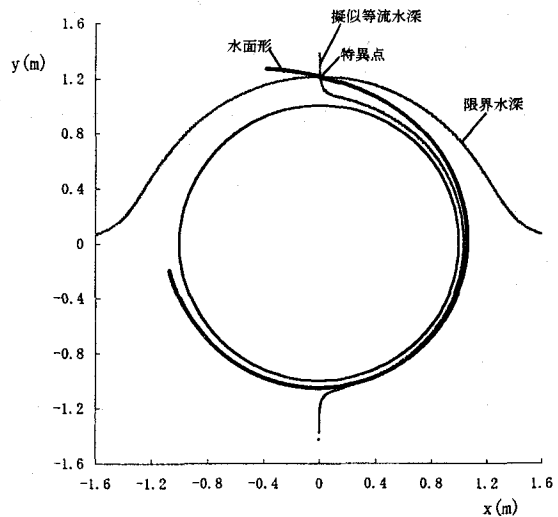


図-5 水面形解析結果

参考文献

- 1) 藤井孝蔵：流体力学の数値計算法，東京大学出版会，1994.
- 2) セドフ, L.I.: 連続体力学 I (大橋義夫訳)，森北出版，1979.
- 3) 細田 尚：開水路流れにおける特異点近傍の水面形の時間的安定性，土木学会論文集No.607/II-45, pp.79-83, 1998.

(2000. 10. 2受付)