

常射流混在場における有限要素CIP-mスキームの構築

DEVELOPMENT OF CIP-m-FEM IN A FLOW INCLUDING BOTH RAPID AND STREAMING FLOW

中山恵介¹・森下正志²・岡田知也¹・古川恵太³・安原晃⁴・中村裕一⁵

Keisuke NAKAYAMA, Masashi MORISHITA, Tomonari OKADA,
, Keita FURUKAWA, Akira YASUHARA and Yuich NAKAMURA

¹正会員 工博 運輸省港湾技術研究所 海洋環境部 環境評価研究室 研究官 (〒239-0826 神奈川県横須賀市長瀬3-1-1)

²正会員 工修 (株)ニューマティック (〒151-0073 東京都渋谷区笹塚1-62-3アルス笹塚1F)

³正会員 工博 運輸省港湾技術研究所 海洋環境部環境評価研究室 室長 (〒239-0826 神奈川県横須賀市長瀬3-1-1)

⁴正会員 運輸省第二港湾建設局 横浜調査設計事務所 (〒221-0053 神奈川県横浜市中区北仲通5丁目57番地)

⁵正会員 (株)協和コンサルタンツ (〒151-0073 東京都渋谷区笹塚1-57-7笹塚第一ビル)

Internal waves in a bay have an effect on vertical mixing and mass transfer. To estimate sources and roles of the internal waves, we have to carry out computation with high resolution by using a three-dimensional non-hydrostatic model. As it is hard to carry out it now, a multi-layer model is considered to be one of the most suitable model. However, internal hydraulic jumps occur frequently on an interface between layers because of small density difference and great velocity (Internal Froude number > 1.0). In previous studies, a flow field including both rapid and streaming flow has been solved by CIP-m scheme in which a finite difference method is used. But it is better to use a finite difference method (FEM) because the shape of a bay are complicated and FEM can be applied to any shape. In this study our purpose is to develop CIP-m FEM. The result of an experiment was consistent with that of computation.

Key Words: CIP-m Scheme, Finite Difference Method, Shallow water flow equation, CIP method, Large Eddy Simulation, Horizontal shear

1. はじめに

閉鎖性湾内における物質の移流拡散, 外湾からの影響伝播の評価を行う方法としては, 非静水圧3次元湾内流動モデル(CIP-CSF) (Park¹⁾, 中山²⁾, マルチレイヤーモデルが現在最良の方法として挙げられる。マルチレイヤーモデルは, 非静水圧3次元湾内流動モデルと比較して, 各層間が長波近似されているという欠点はあるが, 湾外からの内部波の影響をより正確に考慮できるという利点をもつ。しかし, 湾内形状, 成層の度合いにより, 内部界面においてしばしば内部潮汐等の運動量の不連続面を形成することがあり, これが計算不安定を発生させる原因となっている。また, 一般的に閉鎖性湾の形状は複雑であり, 構造格子による計算よりも非構造格子による計算が適当である。

さらに, 河川流による物質の移流拡散, 河床変動等を検討する場合, 近年の急激な計算機の発達により, 河道縦断方向における1次元計算から, 浅水流方程式を用いた平面2次元による再現, 予測計算があたりまえの

ように行われるようになり, さらには実河川における3次元での計算も可能になりつつある。現在, 広域に河道の計算をより厳密に行うためには, 計算速度との兼ね合いから, 平面2次元での計算が適当であると思われる。

2次元計算の特徴としては, 1次元の計算では近似的に川幅の変化で再現されていた河道が, 2次元平面内での計算を行うことで, より実河川に近い形状での計算が可能となるという点が挙げられる。しかし, 実河川の形状はかなり複雑であり, 差分法による極座標表示を含めた一般座標を用いた計算は, 複雑な形状の境界条件をもつ問題へ適用する場合, プログラムの修正等が必要になる。一方, 非構造格子を用いる有限要素法は, メッシュさえ構成してしまえば流れに関するプログラムを修正する必要がない。

実際の河川は, 合流, 蛇行等複雑な形状をもつ場合が多く, 閉鎖性湾にも同様なことがあてはまる。これらのことを考慮すると, 湾内流動や河川の流れを計算するために浅水流方程式を解く際, ①常射流が混

在する場合でも計算が可能であること、②汎用性を高めるため非構造格子を用いることが、有効な手法として考えられる。

これまで、有限要素法による浅水流方程式の計算例としては、ohba³⁾によるものが挙げられる。一方、常射流が混在した場での浅水流方程式の解法としては、中山^{4),5),6)}によるCIP法(yabe⁷⁾)を改良した、3次スプライン補間を運動方程式にのみ用いて連続の式の保存性を高めたスキーム(これ以降、CIP-mスキームと呼ぶ)が挙げられる。

有限要素法にCIP法を適用した試みとしては、棚橋ら^{8),9)}が存在する。しかしこの手法は、ガラーキン法で用いられる線型の補間を3次スプラインでの補間として扱ったものであり、本来セミラグランジュ的な手法であるCIP法の使用方法とは異なる。

そこで本論文では、中山により開発されたCIP-mスキームをもとに、非構造格子を用いることができる有限要素法とCIP法を融合した計算手法を開発し、過去に著者により行われた射流場に置かれた円柱の実験結果を用いて、数値計算、検討を行うことを目的とする。

2. 基礎方程式とスキーム

基礎方程式は、中山ら(2000b)によるlarge eddy simulation (LESモデル)に基づく乱流の項、樹林の効果を考慮したもの(式(1)から式(7))を用いる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \{h(1-c)\} + \frac{\partial}{\partial x_k} \{h(1-c)u_k\} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \{h(1-c)u_i\} + \frac{\partial}{\partial x_k} \{h(1-c)u_i u_k\} = & -\frac{\partial}{\partial x_k} \{h(1-c)\overline{u'_i u'_k}\} \\ & -gh(1-c)\frac{\partial h}{\partial x_i} - gh(1-c)\frac{\partial Z}{\partial x_i} - (1-c)f|U|u_i \\ & -\frac{C_D}{2} \frac{B_i}{l_i} |U|u_i + hv\Delta u_i \end{aligned} \quad (2)$$

$$\overline{u'_i u'_k} = -v_T \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \delta_{ik} E \quad (3)$$

$$E = \frac{v_T^2}{(C_K \Delta)^2} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{v_T}{(C_S l)^2} = & -\frac{|u|}{h} \left(\frac{C_S}{C_K} \right)^2 \left(f + \frac{C_D}{2} \frac{B_i}{(1-c)l_i} \right) \\ & + \left[\left(\frac{|u|}{h} \left(\frac{C_S}{C_K} \right)^2 \left(f + \frac{C_D}{2} \frac{B_i}{(1-c)l_i} \right) \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (5)$$

$$C_S = 0.307 \quad (6)$$

$$C_K = 0.296 \quad (7)$$

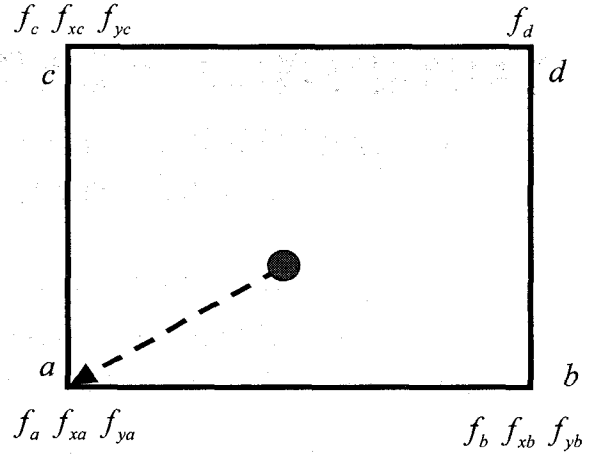


図-1 従来のCIP法の適用例

ここで、 u, h : resolved fieldにおける流速、水深、 c : 樹林の単位面積当たりの混入率、 E : SGS乱流エネルギー、 C_D : 樹林による抵抗係数、 l_i : i 方向に直交する面に投影されたメッシュのスケール、 B_i : i 方向に直交する面に投影された樹林群の総スケール、 v_T : 渦粘性係数、 C_S, C_K : LES定数(中山²⁾)、 Δ : メッシュの代表スケール(あるノード周辺のメッシュスケールの平均値)である。

式(1)が連続式、式(2)が運動方程式を示し、樹林の効果が抵抗として考慮されており、これによりせん断等乱れが生じる。本モデルは、そのようにして発生したメッシュスケール以下の乱流エネルギーが、樹林により減少させられるという効果を取り入れているという特徴をもつ。

スキームは、CIP-mに従い、式(8)から式(11)で示されるものを用いる。

$$\frac{\hat{u}_i - u_i^n}{\Delta t} = -g \frac{\partial h^n}{\partial x_i} + \frac{1}{h(1-c)} \text{func}(\text{right term of Eq.(2)})^n \quad (8)$$

$$\frac{\tilde{u}_i - \hat{u}_i}{\Delta t} = -g \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \quad h^{n+1} = h^n + \phi \quad (9)$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left\{ \phi(1-c) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_k} \{ h^{n+1} (1-c) \tilde{u}_k \} = 0 \quad (10)$$

$$u_i^{n+1} = \text{CIP}(\tilde{u}_i) \quad (11)$$

ϕ : Δt 秒間における水深の変化量である。

CIP法本来の手法を用いずに、連続の式は保存系の差分で計算を行っている点が、CIP-mスキームの特徴である。

3. 非構造格子におけるCIP法の適用

有限要素法で計算する場合、メッシュ構築の容易さ、境界への適合具合から、2次元計算では3角形メッシュ、3次元計算では6面体が多く用いられている。本

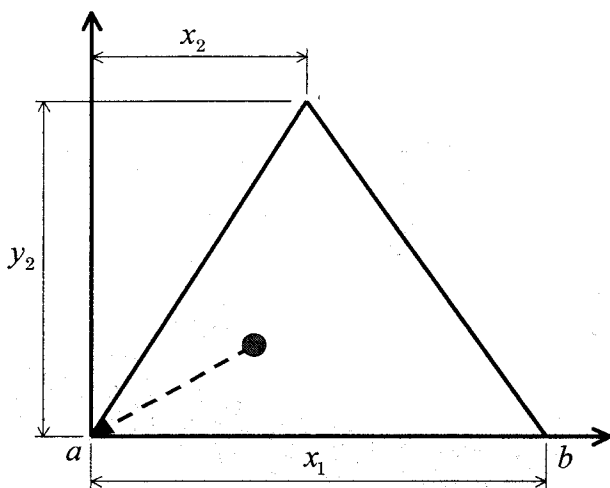


図-2 本論文で用いている3角形メッシュへのCIP-sの適用

論文では、平面2次元における浅水方程式の解法の開発を目的にしていることから、3角形メッシュを用いることとした。従来、CIP法において用いられている3次スプラインは、4角形メッシュを基準としたものであり、3角形メッシュにセミラグランジュ的な特徴を生かしたCIP法を適用するためには、新たな近似関数を定義する必要がある。

例えば、平面2次元で用いられる従来のCIP法であると、図-1に示されるように a , b , d の3点の変数の値と勾配(f_a , f_{xa} , f_{ya} , f_b , f_{xb} , f_{yb} , f_d , f_{xd} , f_{yd}), c の変数の値(f_c)の合計10個を用いて3次スプライン関数が作られる。しかし、3角形メッシュの場合(図-2)には f_d の値が存在しないため、これまでのCIP法で用いられていた3次スプラインを直接用いることが出来ない。そこで、3次スプラインを構成している係数のうち、1つ省略する必要がある、本論文では今後この手法を、準CIP法(CIP-s)と呼ぶことにする。

本論文では、3角形メッシュを移動、回転させて、 a を座標(0,0), c を座標(x_1 , 0), c を座標(x_2 , y_2)として、CIP-sを適用することとする。CIP-sでは、式(12)で示される準3次スプライン関数を用いることとする。

$$f(x', y') = a_1 x'^2 y' + a_2 x'^3 + a_3 x'^2 y'^2 + a_4 x' y' + a_5 y'^3 + a_6 y'^2 + f_{x0} + f_{y0} + f_0 \quad (12)$$

$$f_x(x', y') = 2a_1 x' y' + 3a_2 x'^2 + 2a_3 x' + a_4 y' \quad (13)$$

$$f(x', y') = a_1 x'^2 + a_4 x' + 3a_5 y'^2 + 2a_6 y' \quad (14)$$

$$f_{0-2} = f|_{Po \text{ int } a-c}, \quad f_{x0-2} = \frac{\partial f}{\partial x'} \Big|_{Po \text{ int } a-c}, \quad f_{y0-2} = \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{Po \text{ int } a-c} \quad (15)$$

$$a_1 = (-f_{x0} + f_{x2}) / (y_2^2) + (f_{y0} - f_{y1}) / (x_1 y_2) + 2(3f_0 - 3f_1 + 2f_{x0} x_1 + f_{x1} x_1) x_2 / (x_1^2 y_2^2)$$

$$+ 3(-2f_0 + 2f_1 - f_{x0} x_1 + f_{x1} x_1) / (x_1^3 y_2^2) \quad (16)$$

$$a_2 = -(-2f_0 + 2f_1 - f_{x0} x_1 - f_{x1} x_1) / (x_1^3) \quad (17)$$

$$a_3 = -(3f_0 - 3f_1 + 2f_{x0} x_1 + f_{x1} x_1) x_2 / (x_1^2) \quad (18)$$

$$a_4 = -(f_{y0} - f_{y1}) / (x_1) \quad (19)$$

$$a_5 = -(-2f_0 x_1^3 + 2f_2 x_1^3 - 2f_{x0} x_1^3 + 6f_0 x_1 x_2^2 - 6f_1 x_1 x_2^2 - 4f_0 x_2^3 + 4f_1 x_2^3 - 2f_{x0} x_1 x_2^3 - 2f_{x1} x_1 x_2^3 + 2f_{x1} x_1^2 x_2^2 - f_{y0} x_1^3 y_2 - f_{y2} x_1^3 y_2 + f_{y0} x_1^2 x_2 y_2 - f_{y1} x_1^2 x_2 y_2) / (x_1^3 y_2^3) \quad (20)$$

$$a_6 = -(3f_0 x_1^2 - 3f_2 x_1^2 + 2f_{x0} x_1^2 x_2 + f_{x2} x_1^2 x_2 - 3f_0 x_2^2 + 3f_1 x_2^2 - 2f_{x0} x_1 x_2^2 + 2f_{y0} x_1^2 y_2 + f_{y2} x_1^2 y_2 - f_{x1} x_1 x_2^2 - f_{y0} x_1 x_2 y_2 - f_{y1} x_1 x_2 y_2) / (x_1^2 y_2^2) \quad (21)$$

4. 有限要素法の適用

CIP-mスキームによって時間方向に離散化された方程式に対し、有限要素法の適用を行う。式(8)から(10)に対し、Galerkin法に基づく重み付き残差法を適用すると、式(22)から(24)に示すような弱形式が得られる。

$$\int_{\Omega} u_i^* \hat{u}_i d\Omega = \int_{\Omega} u_i^* u_i^* d\Omega - \Delta t g \int_{\Omega} u_i^* \frac{\partial h^n}{\partial x_i} d\Omega + \Delta t \int_{\Omega} u_i^* \{ \text{func(right term of Eq.(2))}^n \} d\Omega + \Delta t \int_{\Omega} u_i^* \hat{f}_i dS \quad (22)$$

$$\int_{\Omega} u_i^* \tilde{u}_i d\Omega = \int_{\Omega} u_i^* \hat{u}_i d\Omega - \Delta t g \int_{\Omega} u_i^* \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d\Omega \quad (23)$$

$$\int_{\Omega} \phi^* \frac{1}{\Delta t} \{ \phi(1-c) \} d\Omega + \int_{\Omega} \phi^* \frac{\partial}{\partial x_k} \{ h^{n+1} (1-c) \tilde{u}_k \} d\Omega = 0 \quad (24)$$

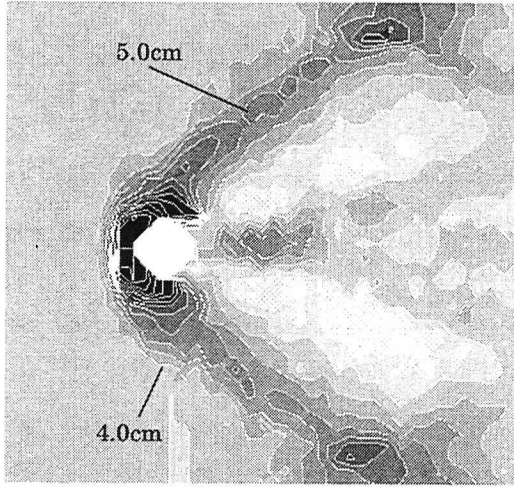
ここで、 Ω : 解析領域, u_i^* : 流速に対する重み関数, ϕ^* : 水深変動量に対する重み関数である。なお、式(22)の最後の項は、粘性の項を部分積分することによって生じる境界積分項であるが、自然境界条件として処理することができる。

有限要素分割においては、任意形状への適合性に優れており、取り扱いが簡単である3角形1次要素を用い、流速と水深、水深変動量など各変数には同次の補間関数を用いることとする。よって未知量の流速、水深、水深変動量は式(25), (26), (27)を用いて内挿補間することとなる。

$$u_i = N u_i = N_1 u_{i1} + N_2 u_{i2} + N_3 u_{i3} \quad (25)$$

実験結果

平面図：



鳥瞰図：

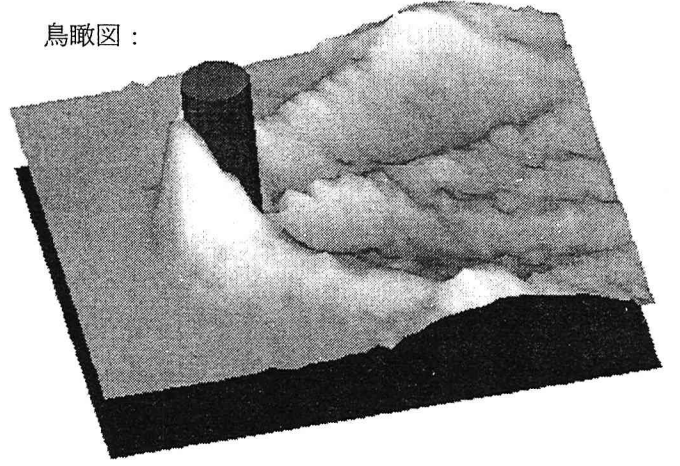


図-3 実験による水深の平面図および鳥瞰図(コンタラインは0.5cm間隔)

$$h = Nh = N_1 h_1 + N_2 h_2 + N_3 h_3 \quad (26)$$

$$\phi = N\phi = N_1 \phi_1 + N_2 \phi_2 + N_3 \phi_3 \quad (27)$$

$$N_\alpha = a_\alpha + b_\alpha x + c_\alpha y \quad (28)$$

ここで、 N_α ($\alpha=1, 2, 3$) は形状関数を示しており、 a, b, c は要素形状によって決まる定数である。また、重み関数についても同様の補間関数を用いて内挿補間を行う。

$$u_i^* = Nu_i^* = N_1 u_{i1}^* + N_2 u_{i2}^* + N_3 u_{i3}^* \quad (29)$$

$$\phi_i^* = N\phi^* = N_1 \phi_1^* + N_2 \phi_2^* + N_3 \phi_3^* \quad (30)$$

式(25)から(30)を式(22)から(24)に代入し、重み関数を任意の定数とし処理できることを考慮して式を整理すると、式(31)から(33)に示すような空間方向に離散化された有限要素方程式が得られる。

$$M\dot{u}_i = Mu_i^n - \Delta t(H_i(h+Z) - S_{LES} + F_i u_i + C_i u_i + D_i) \quad (31)$$

$$M\dot{u}_i = M\dot{u}_i - \Delta t H\phi \quad (32)$$

$$\frac{1}{\Delta t} M' \phi + S_N = 0 \quad (33)$$

ここで、 M ：質量マトリックス、 H ：圧力に関するマトリックス、 S_{LES} ：LESモデルに基づく乱流の項に関するマトリックス、 F ：摩擦に関するマトリックス、 C ：樹林群による抵抗に関するマトリックス、 D ：粘性に関するマトリックスである。なお、各係数マトリックスは次のように表される。

$$M = \int_{\Omega} N^T N d\Omega, \quad H = g \int_{\Omega} N^T \frac{\partial N}{\partial x_i} d\Omega$$

$$S_{LES} = \int_{\Omega} N^T N_k \left(v_T \left(\frac{\partial Nu_i}{\partial x_k} + \frac{\partial Nu_k}{\partial x_i} \right) + \delta_{ik} E \right) d\Omega$$

$$F = \frac{f}{h} |U| \int_{\Omega} N^T N d\Omega, \quad C = \frac{C_D}{2h(1-c)} \frac{B_i}{l_i} |U| \int_{\Omega} N^T N d\Omega$$

$$M' = \int_{\Omega} N^T N (1-c) N d\Omega$$

$$S_N = \int_{\Omega} N^T \frac{\partial (Nh^{n+1} \cdot N(1-c) \cdot Nu^{n+1})}{\partial x_i} d\Omega$$

以上により、解くべき離散化方程式は(9)の右側の式、(11)、(31)、(32)、(33)の5つとなる。この内式(31)、(32)また式(33)における計算処理を次に示す。

運動方程式である式(31)、(32)の計算を行うための処理として、マルチパス法¹⁰⁾を適用する。この手法は、従来の質量マトリックスを集中化して混合係数を用いる陽的解法に代わる質量行列の処理法であり、この手法によって位相の誤差を低減させることができる。今、解くべき方程式を以下のように表す。

$$Mx = F \quad (34)$$

ここで、 M ：質量マトリックス、 F ：既知のベクトル、 x ：未知のベクトルである。この式(34)を式(35)のように変形して繰り返し計算によって解を求める。

$$\bar{M}x^{r+1} = (\bar{M} - M)x^r + F \quad (35)$$

なお、 $\bar{M}$ ：集中化された質量マトリックス、 r ：繰り返し回数を示しており、本論文では、 $r=3$ を用いている。

また、連続式である式(33)に関しては、まず陰解法により解を求め、求めた解をさらに式(33)の既知項部分に代入し、再び陰解法により解を求める。この処理を解が収束するまで繰り返し行う。

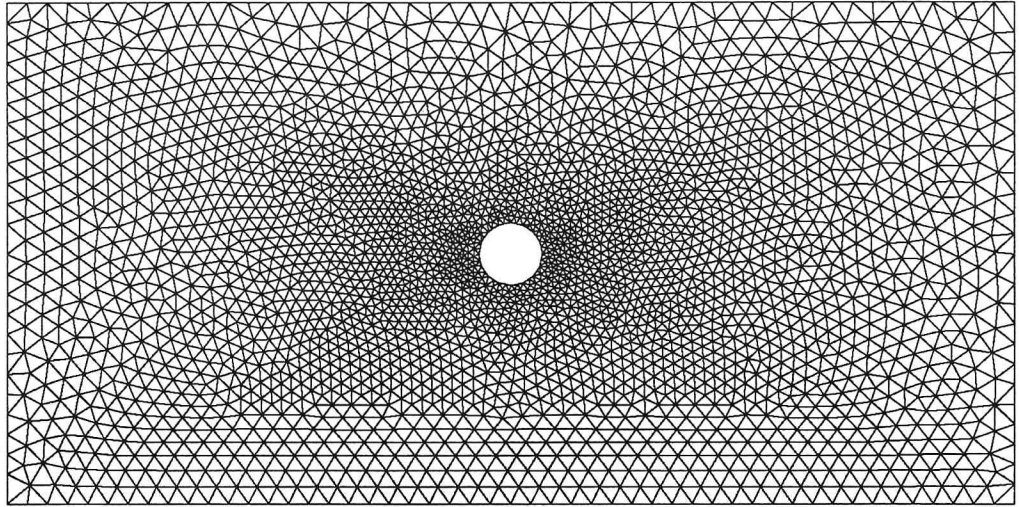


図-4 円柱周辺の有限要素メッシュ

5. 計算結果と実験結果の比較

本論文では、CIP-m-FEMによる計算結果の検討を行うために、中山(1999)により行われた実験結果を利用する。実験は、幅0.8m、全長15.0mの開水路を用いて行われた。円柱は直径0.10mのものを、上流端から10.0m、水路幅中央に設置された。計算条件は、フルード数2.06、円柱前方1.0m地点で水深0.0353m、流速1.21m/s、河床勾配1/82であった。

図-3に、実験結果の平面図及び鳥瞰図を示す。円柱前面で水深が大きくなり、それにともない円柱横の両側から斜め波が発生している。この斜め波の発生源の水深の一番大きな部分では、表面渦が発生しており、跳水の発生が確認できた。斜め波が壁に反射している部分では、反射によって発生した斜め波との間で共鳴現象が発生し、水深が増大していた。

円柱後方では、円柱を回りこんだ流れが収束し、水深が大きくなっている3次元性の強い流れ場が存在していた。さらにその後方では、円柱により発生した斜め波により大きく水深が低下したために発生した斜め波の存在が確認できた。

図-4に、再現計算に用いた円柱周りの有限要素メッシュを示す。水深の変化が大きくなる地点、特に水深が大きい地点である円柱周辺では、メッシュの解像度を上げるようにした。節点総数は2912、要素総数は5644であり、円柱周辺ではおよそ要素の空間スケールは1.0cm、離れるに従い3.5cmに近づくように決定した。計算は $dt=0.004\text{sec}$ 、10000step、40秒後まで行われた。壁面は固定壁、上流境界は水深、流速それぞれの値を一定、勾配をゼロ、下流境界は水深、流速それぞれの勾配をゼロと与えた。

図-5に、図-3と同様な範囲における、計算により得られた水深のコンタ図を示す。主流方向から考えた斜

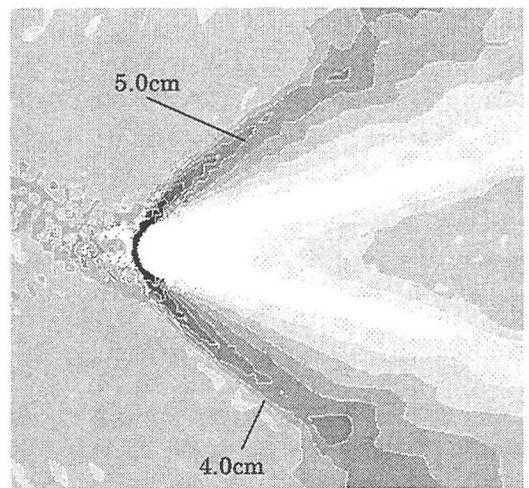


図-5 CIP-m-FEMによる水深の平面分布図

め波の角度(マッハ角)は、実験では $0.194\pi \sim 0.195\pi$ 、計算結果では $0.191\pi \sim 0.192\pi$ とほぼ一致していた。側壁に反射した斜め波の共鳴による水深の増大も、同様に再現することが出来ていたが、若干数値計算のほうが側壁から離れた上流側に位置していた。実験結果の考察でも明かなように、円柱後方においては、水深の増大を再現できなかったが、その後方において発生した斜め波は再現することが出来ていた。しかし、円柱後方で水深の増大を再現することができなかったため、数値計算の方が実験に比べ、斜め波のマッハ角が若干小さくなっていた。

図-6に、CIP-m-FEMによるフルード数の平面分布図を示す。常流となっている領域は、円柱前面と円柱後方であることが分かる。斜め波はフルード数1.0以上を維持して存在していることがわかり、これは中山(1999)による実験結果の解析結果とも一致するものであった。円柱後方の常流の発生領域のすぐ両側ではフルード数3.0以上の領域が存在しており、常射流が混

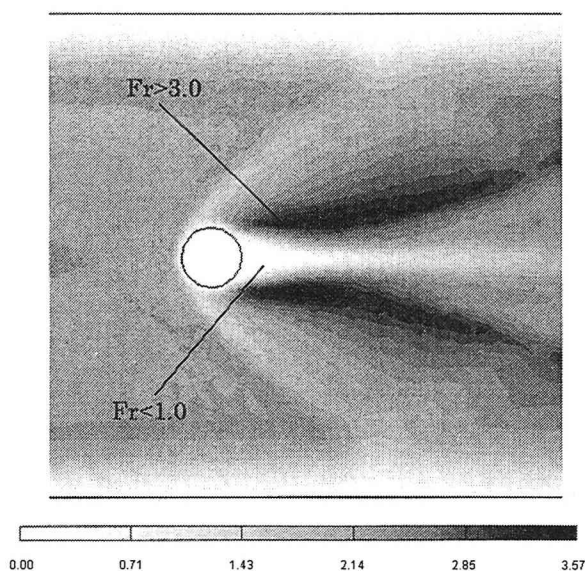


図-6 CIP-m-FEMによるフルード数の平面分布図

在しながらも数値計算が行われていたことが分かる。

図-7に、CIP-m-FEMによる渦粘性係数の分布図を示す。壁面付近では、せん断層の発達により渦粘性係数が $0.0005\text{m}^2/\text{s}$ を超える領域が発生していた。円柱周辺に注目すると、円柱から発生する斜め波の前縁、円柱後方における常射流の境界部分、そして円柱後方における斜め波の前縁において、渦粘性係数 $0.0003\text{m}^2/\text{s}$ が存在していることがわかる。メッシュスケールがおよそ一定の領域での比較であるので、これは、グリッドスケールの速度により非常に大きなせん断が発生し、サブグリッドスケールの乱流エネルギーが増大した領域を示すものであるといえる。

6. まとめ

中山(1998)により提案された浅水方程式においてCIP法を運動方程式にのみ用いるCIP-mスキームに、有限要素法を適用することにより、CIP-m-FEMを開発し、以下の結果を得ることが出来た。

- (1) 3角形メッシュにCIP法を適用するために、従来のCIP法で用いられていた3次スプライン関数による補間を修正し、新たな補間関数を用いたCIP-s法を構築した。
- (2) 中山(1999)による実験結果を利用し、CIP-m-FEMによる計算結果をマッハ角、斜め波の共鳴現象を用いて比較した結果、良好な再現計算が行われたことが分かった。
- (3) 実験では計測することが困難であった項目、例えばフルード数や乱れといったものがCIP-m-FEMを用いることにより可能となり、円柱周辺における流れの構造をより詳しく検討することができ、斜め波前縁や常射流遷移部での乱流エネルギーの集中を

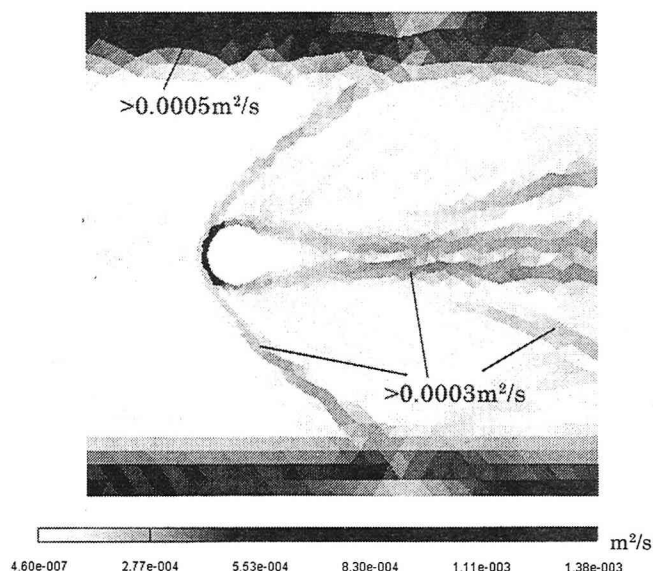


図-7 CIP-m-FEMによる渦粘性係数の平面分布図

確認することが出来た。

参考文献

- 1) Park, J. C., T. Okada, K. Furukawa, K. Nakayama and Y. Hosokawa, Numerical Study on the Flow Characteristics of Tide-Induced Jet, Report of the Port and Harbour Research Institute, Vol.39, No.2, pp.3-24, June, 2000.
- 2) 中山恵介, 堀川康志, 江島敬三: 樹林群を考慮した浅水流モデル, 水工学論文集第44巻, pp. 801-806, 2000a.
- 3) Ohba, Y., K. Kashiwayama and T. Takagi, Parallel quasi-three dimensional finite element method for shallow water flows utilizing the modesplitting technique, 10th International Conference on Parallel CFD Developments and Applications of Parallel Technology, pp.(3-1)-(3-3), 1998.
- 4) 中山恵介, 佐藤圭洋, 堀川康志: CIP法を用いた浅水流方程式の数値計算手法の開発, 水工学論文集第42巻, pp. 1159-1164, 1998.
- 5) 中山恵介, 堀川康志, 三上卓哉: 射流場におかれた円柱周辺の流れの解析, 水工学論文集第43巻, pp. 365-370, 1999.
- 6) 中山恵介, , 岡田知也, 野村宗弘, 日比野忠史, 細川恭史, 古川恵太: 大潮, 小潮期における湾外水の影響, 海岸工学論文集第47巻, 登載決定, 2000b.
- 7) Yabe, T. and T. Aoki: A Universal Solver for Hyperbolic Equations by Cubic-Polynomial Interpolation, Computer Physics Communications, Vol.66, pp.219-242, 1991.
- 8) 榎原孝文, 棚橋隆彦, 松本昌昭: CIP法の有限要素法化, 日本機化学会論文集(B編)第609号, pp. 124-131, 1997.
- 9) 榎原孝文, 棚橋隆彦: 2次元移流拡散方程式によるCIP有限要素法の検証, 日本機化学会論文集(B編)第624号, pp. 43-50, 1998.
- 10) 日本数値流体力学会: 有限要素法による流れのシミュレーション9章浅水長波流れ, pp. 191-215, 1998.

(2000. 10. 2受付)