

DNS 及び LES のための一般座標系コロケート 格子を用いた差分法の開発と検証

DEVELOPMENT AND VERIFICATION OF FINITE DIFFERENCE METHOD
BASED ON COLLOCATED GRID IN GENERALIZED COORDINATE SYSTEM
FOR DIRECT AND LARGE EDDY SIMULATIONS

横嶋 哲¹・中山 昭彦²
Satoshi YOKOJIMA and Akihiko NAKAYAMA

¹ 学生員 神戸大学大学院自然科学研究科地球環境科学専攻 (〒657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1)

² 正会員 Ph.D. 神戸大学大学院教授 自然科学研究科地球環境科学専攻 (同上)

A finite-difference method to be used in simulations of turbulence such as direct numerical simulation (DNS) and large-eddy simulation (LES) has been developed and verified in basic benchmark flows. The method is constructed using the general curvilinear coordinate system with the collocated grid arrangement of the variables so that it can be easily applied to various engineering flows including hydraulic applications involving complex geometry. The computer code is first verified by a test calculation of steady laminar flow in a curved cavity, then the same code is used in a DNS of fully-developed turbulent flow in a two-dimensional open channel. It is further used to conduct a LES simulation of the same flow. All the results indicate that the method is sound with sufficient accuracy for the intended applications.

Key Words : DNS, LES, generalized coordinate system, collocated grid, finite difference method

1. 結論

二十世紀後半におけるコンピュータの飛躍的な発達と共に、流体力学に関わる諸分野における数値流体力学 (CFD) の果たす役割はますます大きくなる傾向にある。特に、乱流モデルを含まない直接数値シミュレーション (DNS) は、Kim et al. (1987)¹⁾によるチャネル流シミュレーション以後“数値実験”として乱流の基礎的研究に欠かせないものとなった。DNS の実行には当初はスーパーコンピュータが必須であったが、最近では計算機の高速・大容量化によりワークステーションレベルでも実行可能な段階に到達しつつあり、離散化手法についても、汎用性に乏しいスペクトル法だけでなく、複雑境界流れ場への応用も可能な有限差分法に基づく DNS に関する研究^{2,5)}も盛んに行われている。また DNS の適用が不可能な、Reynolds 数の高い工学上の問題に応用可能な非定常数値シミュレーション法としては、大規模運動は直接解像し、格子幅以下のスケールの運動をモデル化する LES (Large Eddy Simulation) への期待が近年特に高まっており、SGS (subgrid scale) モデルや離散化手法の提案、建築や機械関連分野における応用例が報告されている⁶⁾。しかしながら特に DNS については、これまでは基本

的流れ場での結果の蓄積に追われ、応用例も大半は直交座標で表現できる流れ場に限定されている^{7,8)}。柔軟性の高い差分法の長所を存分に活かせる一般座標系への拡張は、このような状況を打開し、水理・水工学上問題となる複雑境界形状を有する流れ場への非定常シミュレーションを進めるにあたって必要不可欠なものである。

差分法に基づく離散化にはスタガード格子がよく利用される。スタガード格子はレギュラー格子で問題となる圧力解の振動が抑えられる等、その利点は多い。しかしながらこれを一般座標系に拡張した場合、運動量保存則の離散化の際のコントロールボリュームが成分毎に異なるため、特に三次元計算の際には計算コードの複雑化、メモリー負荷の増大等の問題を誘発するため、一般座標系においてはスタガード格子の使用は主流とはいえず、むしろ非スタガード格子上での離散化が望まれることが多い。レギュラー格子を用いる場合は如何にして圧力解の振動を抑えるかが焦点となるが、林ら(1999, 2000)^{4), 5)}は適切な不等間隔格子を用いることでこの問題を回避している。しかしながら不等間隔格子の“適切性”については現時点では明らかでなく、今後この点の解明が期待される。格子系に関するもうひとつの選択肢として、これら両者の長所を持ち併せるコロケート格子が挙げられる。コロケート格子系に基づいた数値計算法に関する研

究は近年精力的に行われており、その有用性が指摘されている⁹⁾¹²⁾。

本研究は複雑流れ場への非定常数値シミュレーションの適用を目標とするもので、ここではその第一歩としてコロケート格子に基づく一般座標系 DNS 及び LES コードの開発を行い、基本的流れ場において計算コードの確認及び予測精度に関する検証を行う。

2. 数値計算法

(1) 支配方程式

密度 ρ 、動粘性係数 ν の非圧縮性 Newton 流体を対象とすると、DNS 及び SGS 応力モデルに Smagorinsky モデルを用いた場合の LES に対する質量及び運動量保存則は、一般座標系表示（強保存型）でそれぞれ次のように表される。

・ DNS 支配方程式

$$\frac{\partial U_m^*}{\partial \xi_m} = 0 \quad (1)$$

$$J^{-1} \frac{\partial u_i^*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left\{ U_m^* u_i^* + J^{-1} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} p^* - \nu J^{-1} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \frac{\partial u_i^*}{\partial \xi_n} \right\} = 0 \quad (2)$$

・ LES 支配方程式

$$\frac{\partial \langle U_m \rangle^*}{\partial \xi_m} = 0 \quad (3)$$

$$J^{-1} \frac{\partial \langle u_i \rangle^*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left\{ \langle U_m \rangle^* \langle u_i \rangle^* + J^{-1} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \left(\langle p \rangle^* - \frac{2}{3} k_{SGS} \right) - (\nu + \nu_{SGS}) J^{-1} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \frac{\partial \langle u_i \rangle^*}{\partial \xi_n} + \frac{\partial \xi_n}{\partial x_i} \frac{\partial \langle u_j \rangle^*}{\partial \xi_n} \right) \right\} = 0 \quad (4)$$

ここで、 x_i は物理空間での座標（デカルト座標系）、 ξ_i は計算空間での座標（一般座標系）、 u_i は速度のデカルト座標成分、 p は圧力を密度で除したもの（以下、圧力）である。添え字（*）は瞬時量を指し、 f^* （ f は任意の物理量）は Reynolds 平均に基づいて平均値 f とそれからの変動 f' に分割される。また、

$$J^{-1} = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right) \quad (5)$$

$$U_m = J^{-1} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} u_j \quad (6)$$

で、 J^{-1} は座標変換の Jacobian、 U_m は体積フラックスである。 $\langle \cdot \rangle$ は空間フィルターで粗視化された物理量を表し、 k_{SGS} 及び ν_{SGS} はそれぞれ SGS 運動エネルギー、SGS 渦粘性係数を指す。Smagorinsky モデルについての詳細は専門書（例えば文献 13）を参考されたい。

(2) 離散化手法

差分法に基づく離散化の際には、圧力をセル中心に、速度成分をセル界面に配置するスタガード格子が一般に良く用いられる。スタガード格子は、全ての変数をセル

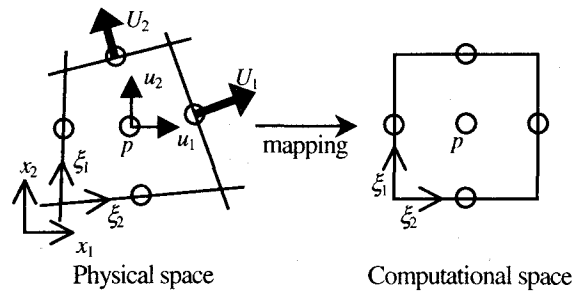


図-1 一般座標系コロケート格子の変数配置

節点に配置するレギュラー格子で問題となる圧力解の振動が抑えられ、離散スキームも成熟している^{3), 13), 14)}など利点が多い。しかしながらこれを一般座標系に拡張した場合、運動量保存則離散化の際のコントロールボリュームが成分毎に異なるため、特に三次元計算の際には計算コードの複雑化、記憶しなければならないメトリックの増加を招き、境界条件の設定も容易ではないなど問題点も多い。このような問題を避けるため林ら^{4), 5)}は対流項を高次精度風上差分で近似した、レギュラー格子に基づく DNS コードを開発し、平行平板間流れや開水路等流において良好な結果を得ている。彼らは圧力解の振動を適切な不等間隔格子を用いることで抑えているが、森西 (1996)¹⁵⁾はレギュラー格子系において圧力の Poisson 方程式を四次精度で離散化した場合、低 Reynolds 数流れ場では圧力振動を回避し得る可能性があることを指摘しており、彼らの場合にも四次精度の離散化が成功の理由のひとつと考えられる。しかしながらこれまでの検証例は非常に Reynolds 数の低い流れに限られており、Reynolds 数が高まった場合に振動解を回避できるかどうかは定かではなく、不等間隔格子の“適切性”についても現状では未解明である。

本報で採用するコロケート格子系の変数配置を図-1に示す。コロケート格子系はスタガード及びレギュラー格子系の長所を持ち併せており、基本変数である速度のデカルト座標成分 u_i 及び圧力 p はセル中心に、セル界面に補助変数である体積フラックス U_i が配置される。運動量保存則については同一点で定義される u_i 及び p が変数となるため、レギュラー格子と同様にプログラミングの簡素化、メモリ容量の節約が可能であり、一方連続式の評価はセル界面に配置された U_i に基づくため、ポアソン方程式の離散化がスタガード格子と同様になり、圧力解の振動が抑えられる。これらの長所から、近年コロケート格子系に基づく数値計算法に関する研究は盛んであり、差分アルゴリズムや離散化スキームの提案、その有用性評価が行われている⁹⁾¹²⁾。本報では Zang et al. (1994)⁹⁾により提案された手法を参考に、時間積分法として、粘性項の対角成分に二次精度 Crank-Nicolson 法を、対流項及び粘性項の非対角成分に二次精度 Adams-Bashforth 法を用いる。また支配方程式の離散化の際には、対流項の表現法（勾配型、発散型等）に解が依存しない、非圧縮性流体の数値計算では陽に現れない運動エネルギーが保存さ

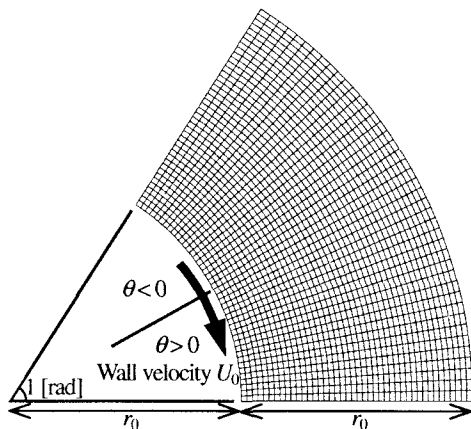


図-2 扇形キャビティー流の概要及び計算格子

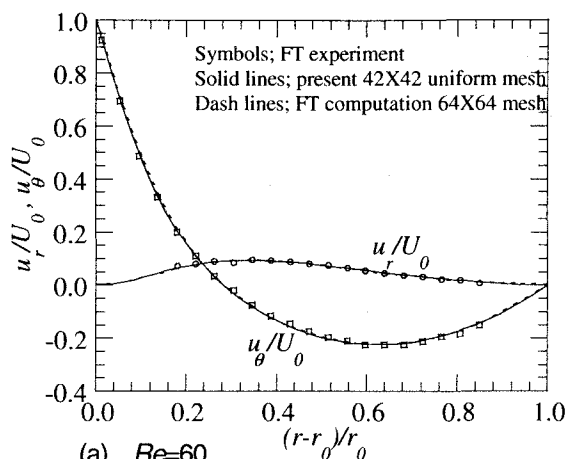
れるといった、元の微分方程式がもつ性質を保持するスキームを用いることの重要性が指摘されており^{3), 10), 12)-15)}, ここでは梶島ら(1998)¹⁰⁾の提唱する二次精度スキームにより、対流項の互換性及びエネルギー保存性を満たす。ただし、一般にコロケート格子はスタガード格子よりも解像度の影響を受けやすいことがこれまでに指摘されているので¹⁰⁾⁻¹²⁾, ここでは稲垣・安倍(1998)¹¹⁾が提案した修正法によって、このような性質の改善を図った。各スキームの詳細はそれぞれの参考文献を参照されたい。これらにより離散化された支配方程式を fractional step 法により時間発展することで DNS 及び LES を実行する。

3. 予測性能の検証及び考察

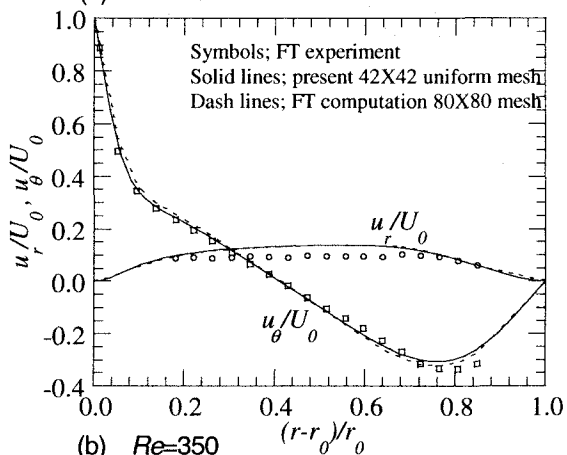
(1) 二次元層流扇形キャビティー流れ

まず一般座標系プログラムコードに対するベンチマークテストとして、二次元扇形キャビティー流を採用する。この流れについては Fuchs and Tillmark (1985, FT)¹⁶⁾がレーザ流速計を用いた計測、流れの可視化及び数値解析を行っており、Zang et al.⁹⁾でもプログラムの予測精度の検証に用いられている。図-2 に流れ場の概要及び用いた計算格子を示す。境界はいずれもすべりのない壁で構成されており、 $r=r_0$ の壁が円周方向に速度 U_0 で運動する。ここでは $Re (=U_0 r_0 / \nu) = 60, 350$ の二ケースについて FT による実験及び数値計算結果との比較検証を行うが、計算格子についてはいずれも 42×42 の等間隔格子を用いた。なお、計算は DNS 支配方程式を用いて行われた。

図-3 に $\theta=0$ の断面における、半径方向及び θ 方向の平均流速成分 u_r, u_θ の分布を示す。 $Re=60$ の場合には FT の実験及び数値計算結果とほぼ完全に一致しており、 $Re=350$ についても実験結果に対してはピーク値等が若干外れているが、FT による計算結果とはほぼ一致しており、計算総格子数は FT に対して $Re=60$ では $1/2$ 以下、 $Re=350$ では $1/3$ 以下で、かつ等間隔格子であることを考慮すれば、結果は非常に良好であろう。図-4 は平均流の流線形状を FT の計算結果と比較したものである。ここでは示さないが両者は FT の可視化実験結果とも良好に一致しており、

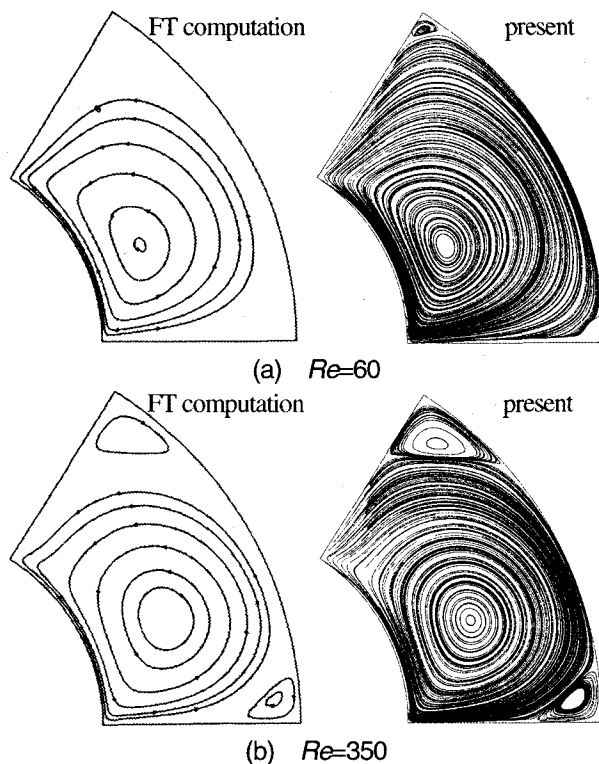


(a) $Re=60$



(b) $Re=350$

図-3 扇形キャビティー流平均流速分布 ($\theta=0^\circ$)



(b) $Re=350$

図-4 扇形キャビティー流平均流線図

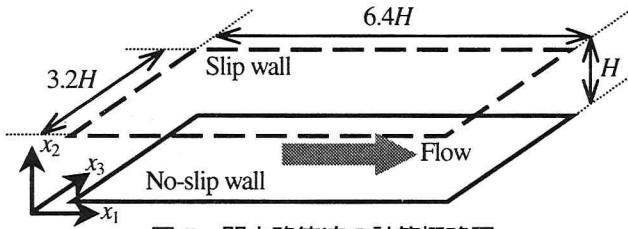
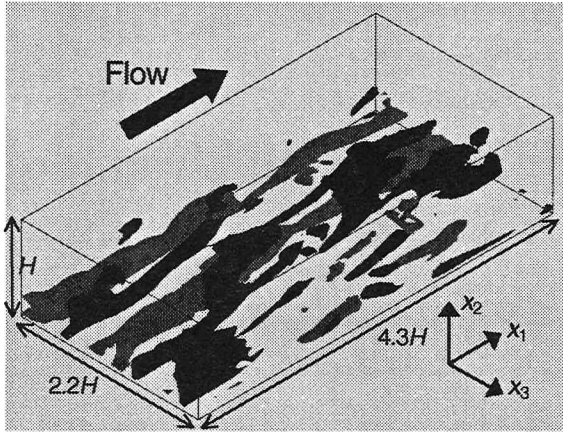


図-5 開水路等流の計算概略図



$u_1^+ < -3.0$; dark-gray, $u_1^+ > 3.0$; light-gray
図-6 壁面近傍のストリーク構造 (DNS)

流況の Reynolds 数依存性が良好に再現されている。

(2) 開水路等流の DNS

本節では、自由水面をすべり面近似した開水路等流の DNS を行い、著者ら (YN) ^{17), 18)} がスタガード格子系を用いて行った DNS 結果との比較により、予測精度の検証を行う。計算領域、座標系は図-5 のようで、境界条件は主流及びスパン方向に周期条件を、底面では粘着条件、水面ではすべり条件を課した。計算格子数、時間刻みは YN と同じく $116 \times 96 \times 128$ (空間解像度は $\Delta x_1^+ = 9.9$, $\Delta x_2^+ = 0.32-2.96$, $\Delta x_3^+ = 4.5$), $\Delta t^+ = 0.018$ とした。ただし添え字 $+$ は粘性スケールでの表示を意味する。これによりスタガード格子系とコロケート格子系の変数配置の違いが解に及ぼす影響を検討することができる。壁面近傍の瞬時構造を図-6 に示す。ただし可視化領域は計算領域の一部の領域が切り出されていることに注意されたい。チャネル流等の壁乱流で観察されるストリーク構造が今回のシミュレーションでも良好に再現されており、瞬時場の再現性に問題は見られない。以下では統計量分布を示すが、結果は全て内層表示されている。

図-7 に乱流統計諸量の比較を Kim et al. (KMM) ¹⁾ のチャネル流の結果も併せて示す。平均流速分布では、スタガード格子系を用いたものに比べて対数則域で値が若干低い。全せん断応力分布は与えた圧力勾配と精度良く釣り合っており、統計量算出のためのサンプル数は十分確保されていることが確認される。また、Reynolds せん断応力に関しても格子系による違いは見られない。しかしながら乱れ強度に関しては、 u_{1rms} の値がやや小さく評価されて

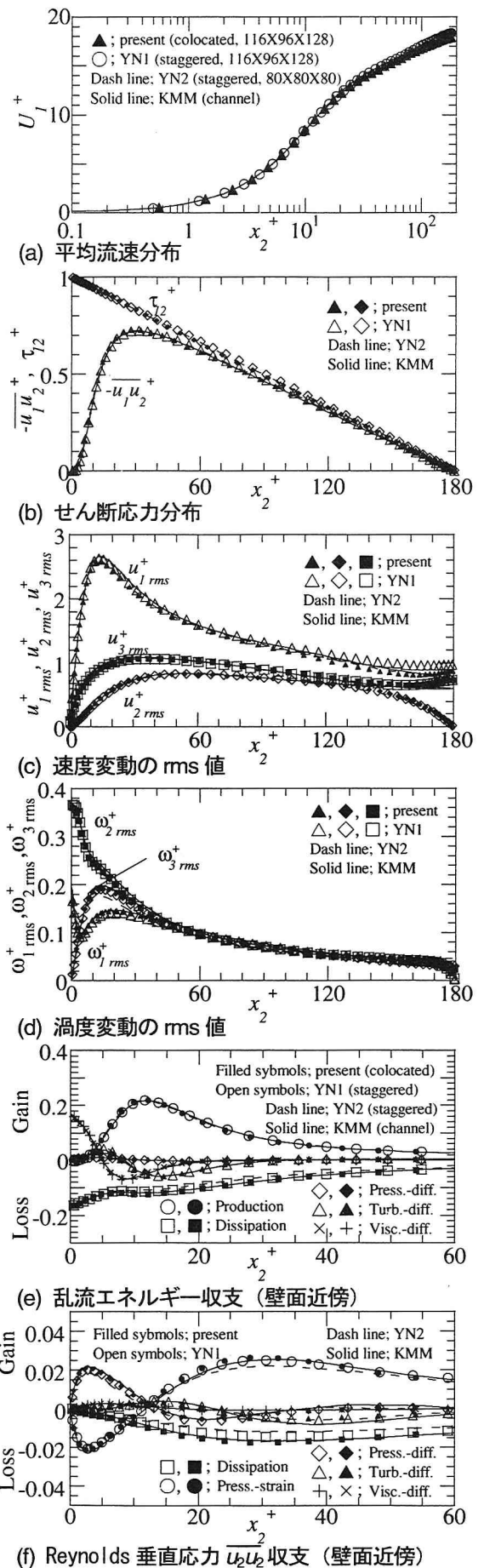
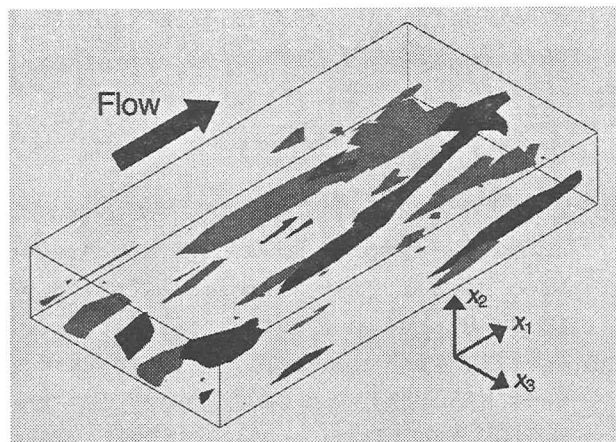
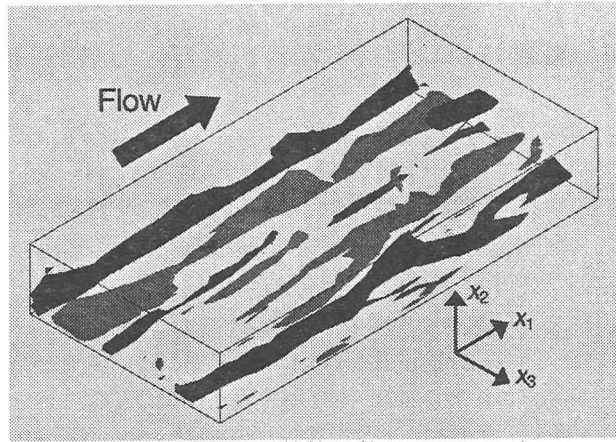


図-7 乱流統計諸量の評価 (DNS)



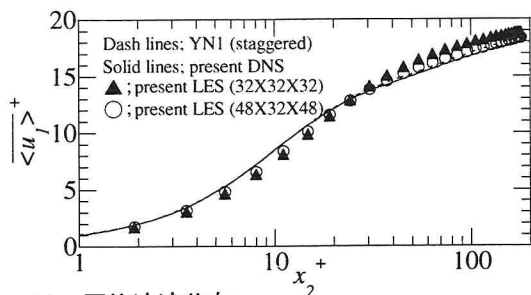
(a) Case 1 (計算格子数 $32 \times 32 \times 32$)



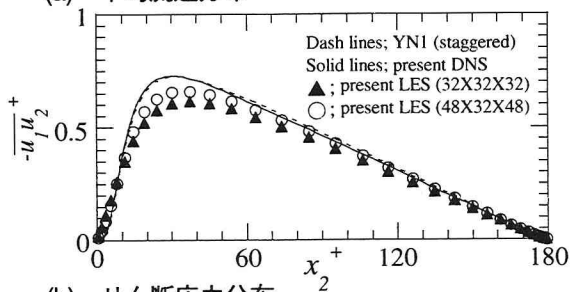
(b) Case 2 (計算格子数 $48 \times 32 \times 48$)

$u_1^+ < -3.0$; dark-gray, $u_1^+ > 3.0$; light-gray

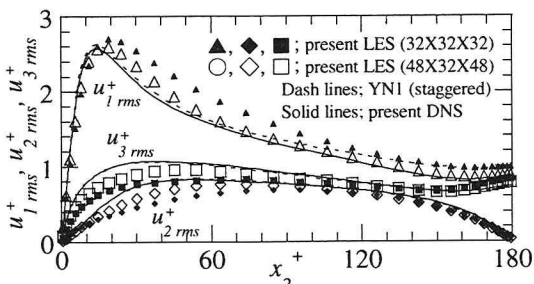
図-8 瞬時組織構造の格子依存性 (LES)



(a) 平均流速分布



(b) せん断応力分布



(c) 乱れ強度分布

図-9 乱流統計諸量の格子依存性 (LES)

おり、特に水面近傍では有意な差が見られる。一方、渦度強度分布についてはスタガード及びコロケート格子とも KMM の結果と良く一致しており、応力収支評価に関しても、乱流エネルギー収支及びそれより一桁オーダーの低い u_2u_2 収支において格子系による差はほとんど確認されず、良好な結果が得られた。

いくつかの統計量評価においてスタガード格子とコロケート格子の結果に差が見られたが、梶島ら¹⁰⁾はコロケート格子の方がスタガード格子よりも解像度の影響を受

けやすいことを指摘しており、稲垣・安倍¹¹⁾の手法により予測精度はかなり改善されているものの、本報においても格子系の差が露見した。この差は四次精度の離散化手法を用いた場合には大きく低減することから¹⁰⁾、より高精度なシミュレーションが要求される場合には格子解像度の向上あるいは離散化手法の高次精度化が必要となる。

(3) 開水路等流の LES

最後に Smagorinsky モデルに基づく LES の予測精度を検証する。対象流れ場は前節と同じく開水路等流とする。解の格子依存性を把握するため、 $32 \times 32 \times 32$ (Case 1) 及び $48 \times 32 \times 48$ (Case 2) の二種類の格子を用いた。空間解像度は鉛直方向は共に $\Delta x_2^+ = 1.18-10.8$ で、水平方向は Case 1 が $\Delta x_1^+ = 36$, $\Delta x_3^+ = 18$, Case 2 が $\Delta x_1^+ = 24$, $\Delta x_3^+ = 12$ で、時間刻みは前節の DNS と等しい。

瞬時構造の再現性を確認するため、主流方向速度変動の等値面図を図-8に示す。Case 1 ではストリーク構造の再現性が良くないが、Case 2 ではスパン方向に粘性スケールで約 100 の間隔でストリークが観察され、水平方向の格子解像度により再現性は大きく異なる。また、図-9に示す乱流統計量についても格子依存性は大きく、Case 1 は平均流速については層流的な分布形状となり、せん断応力が過小評価されている。また乱れ強度については非等方向性が強まった結果が得られた。これらは水平方向の解像度を向上させた Case 2 ではかなり改善されている。

今回用いた SGS 応力モデルは最も基本的な Smagorinsky モデルであること、空間微分の離散化が二次精度で行われていること及び格子解像度が比較的低いことから、今回得られた結果は DNS 結果からは若干外れるものの、これまで主にチャンネル流を対象に報告されている、Smagorinsky モデル、二次精度差分を用いた場合の、解の空間解像度への依存性^{10), 11)}と同様の傾向が見られ、より複雑な流れ場への適用への基礎となる、プログラムコードの妥当性が確認された。

4. 結論

複雑流れ場への非定常数値シミュレーションの適用を目標に、コロケート格子に基づく一般座標系 DNS 及び LES コードの開発を行った。扇形キャビティ流れにおける一般座標系コードに関する検定の後、開水路等流の DNS 及び LES を実行し、非定常数値シミュレーションに関する基本的な予測精度の検証を行った。DNS については一部の統計量評価に関して直交スタガード格子との差が確認されたものの、スペクトル法による DNS データと比較して良好な結果が得られた。また LES に関して、これまでに報告されている傾向と一致する結果が得られ、今回構築した計算コードが十分な予測精度を有することが確認された。今後は一般座標系の利点を活かし得る流れ場への応用を進め、更なる計算コードの検証、有用なデータベースの構築及び実験計測の困難な流れ場の解明を進める予定である。

参考文献

- 1) Kim, J., Moin, P. and Moser, R.: Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number, *J. Fluid Mech.* **177**, pp. 133-166, 1987.
- 2) Rai, M. M. and Moin, P.: Direct simulation of turbulent flow using finite-difference schemes, *J. Comput. Phys.* **96**, pp. 15-53, 1991.
- 3) 鈴木哲也, 河村洋: 乱流の直接数値シミュレーションにおける差分式の整合性, 日本機械学会論文集 B 編 **60**-578, pp. 3280-3286, 1994.
- 4) 林俊一郎, 大本照憲, 矢北孝一, 平川隆一: 風上差分スキームを用いた直接数値シミュレーションの基礎的研究, 応用力学論文集 **2**, pp. 599-608, 1999.
- 5) 林俊一郎, 大本照憲, 矢北孝一, 平川隆一: 一般座標系 Regular 格子による開水路乱流の DNS, 水工学論文集 **44**, pp. 593-598, 2000.
- 6) 計算流体力学講習会: LES のフロンティアー —熱・流体の最強ツールを求めて—, 2000.
- 7) Le, H., Moin, P. and Kim, J.: Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward-facing step, *J. Fluid Mech.* **330**, pp.349-374, 1997.
- 8) 瀬津家久, 山本義暢: DNS を用いた開水路キャビティ流れの生成機構とその輸送過程の解析, 水工学論文集 **43**, pp. 377-382, 1999.
- 9) Zang, Y., Street, R. T. and Koseff, J.: A non-staggered grid, fractional step method for time-dependent incompressible Navier-Stokes equations in curvilinear coordinates, *J. Comput. Phys.* **114**, pp.18-33, 1994.
- 10) 梶島岳夫, 太田貴士, 岡崎和彦, 三宅裕: コロケート格子による非圧縮性流れの高次差分解析, 日本機械学会論文集 B 編 **63**-614, pp. 3247-3254, 1997.
- 11) 稲垣昌英, 安倍賢一: コロケーション格子を用いた LES の計算精度改善に関する一考察, 日本機械学会論文集 B 編 **64**-623, pp. 1981-1988, 1998.
- 12) 森西洋平: コロケート格子系差分の運動エネルギー保存特性の改善方法, 日本機械学会論文集 B 編 **65**-630, pp. 505-512, 1999.
- 13) 梶島岳夫: 乱流の数値シミュレーション, 養賢堂, 1999.
- 14) Morinishi, Y., Lund, T. S., Vasilyev, O. V. and Moin P.: Fully conservative higher order finite difference schemes for incompressible flow, *J. Comput. Phys.* **143**, pp. 90-124, 1998.
- 15) 森西洋平: 非圧縮性流体解析における差分スキームの保存特性 (第 1 報), 日本機械学会論文集 B 編 **62**-604, pp. 4090-4097, 1996.
- 16) Fuchs, L. and Tillmark, N.: Numerical and experimental study of driven flow in a polar cavity, *Int. J. Numer. Methods Fluids* **5**, pp. 311-329, 1985.
- 17) 横嶋哲, 中山昭彦: 直接数値シミュレーションによる開水路乱流における乱流統計量及びその収支評価, 応用力学論文集 **3**, pp. 753-762, 2000.
- 18) 横嶋哲, 中山昭彦: 直接数値シミュレーションによる開水路流の統計量輸送式の収支評価, 第 11 回計算流体力学シンポジウム講演論文集, pp. 603-604, 2000.

(2000.10.2 受付)