

開水路凹部における流れの 組織運動の二次元ウェーブレット解析

TWO-DIMENSIONAL WAVELET ANALYSIS ON ORGANIZED MOTION IN OPEN-CHANNEL FLOW OVER CONCAVE BED

宮本仁志¹・神田 徹²
Hitoshi MIYAMOTO and Tohru KANDA

¹正会員 修士(工学) 神戸大学助手 工学部建設学科 (〒657-8501 神戸市灘区六甲台町1-1)

²フェロー会員 工博 神戸大学教授 工学部建設学科 (同上)

Turbulent structures along a mixing layer in an open-channel flow over a concave bed are analyzed using wavelet transforms. Experimental data of the velocity are obtained by a particle image velocimetry (PIV). At first, we evaluate the accuracy of the PIV velocity data by employing a multiresolutional analysis (MRA). The result of MRA shows that the instantaneous Reynolds stress is an appropriate signal for the coherent structure detection. Then, the distributions of the instantaneous Reynolds stress are analyzed using a two-dimensional continuous wavelet transform (2D-CWT). The spatial scales and locations of the coherent structures are detected from the maximal values of the wavelet coefficients. The characteristics of the organized motions along the mixing layer, such as an evolution of spatial scale, advection velocity, and occurrence interval, are clearly extracted in terms of the location and the time.

Key Words : wavelet analysis, open-channel, concave bed, turbulent mixing layer, coherent structure, particle image velocimetry

1. はしがき

近年、河川環境への意識の高まりから、瀬や淵、わんど等のように自然生態系との共生を考慮した河道設計を行うことが重要となっている。このような断面急変部では一次元解析では不十分であるだけでなく、二次元・三次元的取扱いにおいても流れの非定常挙動を詳細に把握する必要がある。計測手法の発達によって種々の乱流構造が明らかにされつつあるが、その非定常特性は断面形状や水理条件によって大きく変化するので、流れの計測手法をさらに改善させると同時に、複雑な乱流構造を解明するための新たな解析方法の導入も重要である。

本研究はそのような河道局所変化部における流れの挙動解明を目標として、これまで、水路床に凹部をもつ開水路(以下、開水路凹部)の流れについてPIV(particle image velocimetry)で得られる流速場を解析し、その流況特性を調べてきた^{1)~3)}。前報^{1), 2)}では、一次元ウェーブレット理論を用いて主流-凹部境界のせん断混合層(以下、凹部混合層)における流れの組織運動を解析し、凹部形状の

違いによる組織運動の挙動変化を考究するとともに、乱流組織運動に対する同変換の有効性を確認した。

本報においては、多重解像度解析⁴⁾ および二次元連続ウェーブレット変換⁵⁾を用いることにより、凹部混合層における乱流構造の条件抽出を行い、組織運動の空間スケール、走時挙動などの流況特性を調べる。また、得られた結果より、流れの組織運動の解析に対するウェーブレット理論の適用性を検討する。

流れの組織運動の解析手法としては、四象限分類法、VITA法(variable interval time averaging)、POD(proper orthogonal decomposition)などが従来用いられている。LiandratとMoret-Bailly⁶⁾は、VITA法とウェーブレット変換の能力比較を行い、信号の多重スケール分解が可能であるウェーブレット変換の優位性を示している。また、PODは、変動成分の空間相関マトリックスの固有値を用いて主成分分析を行う統計的手法であり、直接、信号を対象とするウェーブレット解析とは本質的に異なる手法である。著者らは、このPODを用いることにより、開水路凹部流れにおける主要な流速変動成分の解析を行っている⁶⁾。

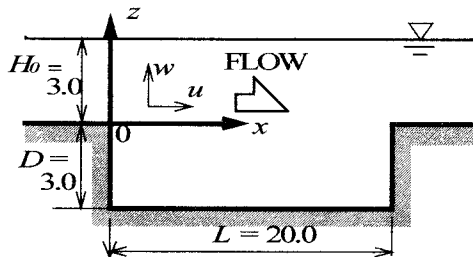


図-1 開水路凹部の模式図

表-1 実験条件

流量: Q (cm ³ /sec)	758
流入水深: H_0 (cm)	3.0
流入部での断面平均流速: U_0 (cm/sec)	12.6
Reynolds 数: $Re = U_0 H_0 / \nu$	3800
Froude 数: $Fr = U_0 / (g H_0)^{1/2}$	0.23
凹部形状比: L / D	6.7

2. 実験の概要

(1) 開水路凹部および実験条件

図-1に、本研究で用いた実験水路の模式図を示す。実験水路は、全長500cm、幅20cmの亚克力製水路であり、上流水槽より330cmの位置に凹部を設けている。PIV計測では、比重1.02、粒径0.075～0.15mmの高分子ポリマー粒子をトレーサーとして流水中に投入し、スリット状にしたヘリウム・ネオンレーザー光を照射することによって可視化断面を作成した。得られた可視化画像を濃淡画像相関法(PIV[®])によって解析し、断面内の流速分布を得た。なお、流速ベクトル算出の際には、粒子のサブピクセル内移動に対する補間および異常流速ベクトルの検出・補間の処理を行っている。PIVの計測断面は凹部の鉛直中央である。画像のサンプリング周波数(時間分解能)は60Hz、可視化画像の空間分解能(1pixel)は約0.42mmであり、約33秒間(2000画像)の面的な流速ベクトルを解析対象とする。表-1に実験条件を示す。

(2) 時間平均流速

図-2に、時間平均流速ベクトルを示す。対象とする流れ場は、レイノルズ数 $Re = 3800$ 、フルード数 $Fr = 0.23$ で、水面変動が無視できる流れである。主流-凹部境界で流速せん断が大きく、流下方向にせん断混合層が発達する。凹部内では、 $x = 4 \sim 15$ cmにおいて、水平スケールが約8cm、鉛直スケールがほぼ凹部深さ D に等しい循環流が存在しており、その下流側の隅角部に規模の小さい循環流が、上流側には微小流速の死水域が形成されている。本研究では、この凹部混合層内での流れの組織的構造に焦点をあてる。

3. ウェーブレット変換の概要

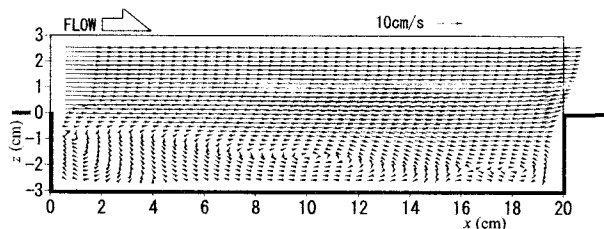


図-2 時間平均流速ベクトル

本研究においては、多重解像度解析では流速時系列を、二次元連続ウェーブレット変換では瞬間レイノルズ応力の空間分布(後述)を解析対象とするので、それぞれ時間 t 、位置ベクトル $x = (x, z)$ を独立変数として説明を行う。

(1) 多重解像度解析

多重解像度解析は、離散ウェーブレット変換に用いる正規直交ウェーブレットとそれに対応するスケーリング関数を用いて、解析対象とする関数 $f(t)$ をそれら基底関数で構成される空間に展開する。

$f(t)$ の離散ウェーブレット変換は次式で定義される。

$$\tilde{f}_{ji} = \langle \psi_{ji} | f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{ji} dt \quad (1)$$

ここに、

$$\psi_{ji} = 2^{j/2} \psi(2^j t - i) \quad (2)$$

$$\langle \psi(t) | \psi(t-n) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \psi(t-n) dt = \delta_{n,0} \quad (3)$$

ψ_{ji} : 正規直交ウェーブレット, $\tilde{f}_{ji}$: 離散変換によって得られるウェーブレット係数, δ : クロネッカーデルタ, i, j, n : 任意の整数である。式(2), (3)より, ψ_{ji} は t 軸上の離散移動 $2^{-j}i$ に対して直交する関数となる。

多重解像度解析は次式で示される。

$$f(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \langle \phi_{mi} | f \rangle \phi_{mi}(t) + \sum_{j=m}^{-1} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \langle \psi_{ji} | f \rangle \psi_{ji}(t) \quad (4)$$

ここに、

$$\phi_{ji}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - i), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 1 \quad (5)$$

$$\langle \phi(t) | \phi(t-n) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \phi(t-n) dt = \delta_{n,0} \quad (6)$$

$$\langle \phi(t) | \psi(t-n) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \psi(t-n) dt = 0 \quad (7)$$

上式の ϕ はスケーリング関数である。式(5)の ϕ_{ji} は、式(6), (7)に示すように ϕ_{ji} および ψ_{ji} の離散移動 $2^{-j}i$ に対して直交する関数である。 ψ_{ji} , ϕ_{ji} を周波数帯域分割フィルターと考えれば、前者は周波数帯を二分割するハイパスフィルター、後者はローパスフィルターとなる。したがって、式(4)は、それらのフィルターを用いて $f(t)$ を各周波数帯の階層構造に展開したものと考えてよい。また、正規直交関数を用いて関数 $f(t)$ を展開しているため、 $f(t)$ は、得られた各周波数帯での関数と対応するウェーブレット係数を用いて再合成できる。な

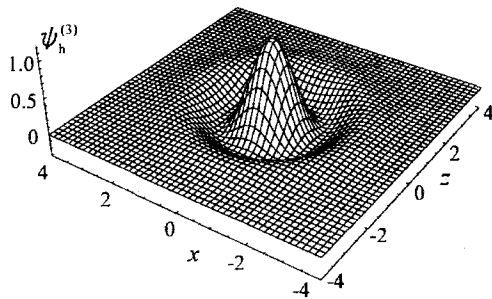
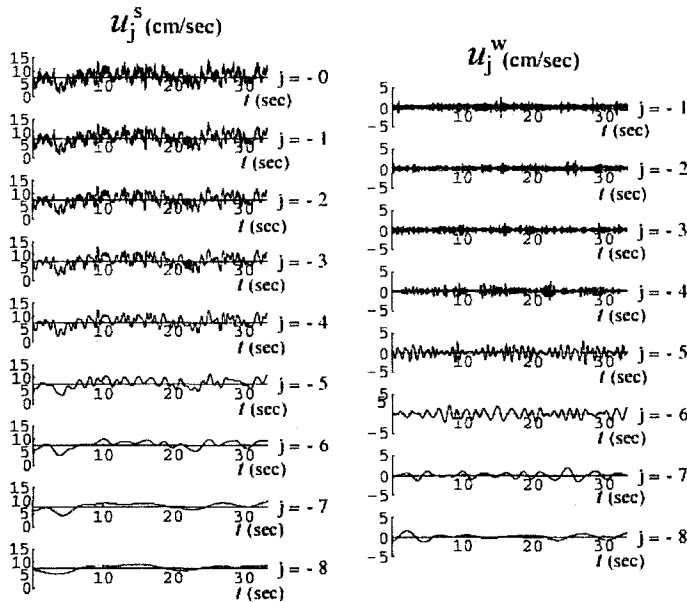


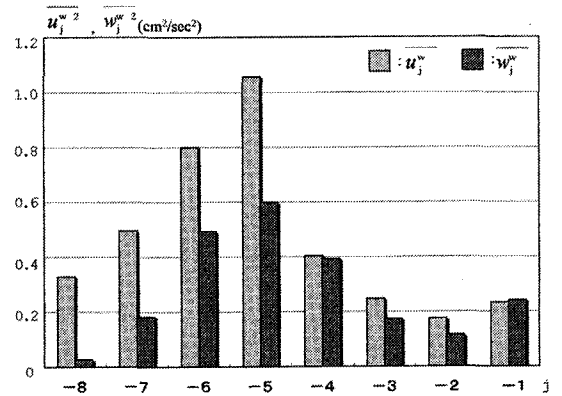
図-3 マザーウェーブレット（二次元）
（ガウス分布の高次オーダーラプラシアン（ $n=3$ ））

表-2 レベル j の周波数帯

レベル j	近似流速成分 u_j^s, w_j^s	変動流速成分 u_j^w, w_j^w
0	30Hz以下	
-1	15Hz以下	15～30Hz
-2	7.5Hz以下	7.5～15Hz
-3	3.8Hz以下	3.8～7.5Hz
-4	1.9Hz以下	1.9～3.8Hz
-5	0.9Hz以下	0.9～1.9Hz
-6	0.5Hz以下	0.5～0.9Hz
-7	0.2Hz以下	0.2～0.5Hz
-8	0.1Hz以下	0.1～0.2Hz



(a) x -方向流速 u の多重解像度解析



(b) 各レベルにおける流速成分の変動強度

図-4 多重解像度解析の結果 ($x = 10.36\text{cm}$, $z = -0.01\text{cm}$)

お、本研究では、Daubechiesの正規直交ウェーブレット $N\psi$ およびスケーリング関数 $N\phi$ ($N = 10$) ⁷⁾ を基底関数として用いた。

(2) 二次元連続ウェーブレット変換

関数 $f(\mathbf{x}) = f(x, z)$ の二次元連続ウェーブレット変換は次式で定義される。

$$W[f] = \tilde{f}(l, \mathbf{x}') = \langle \psi_{l, \theta, \mathbf{x}'} | f \rangle \\ = l^{-2} \int \overline{\psi(l^{-1} r_{-\theta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'))} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (8)$$

ここに、 $\tilde{f}(l, \mathbf{x}')$: ウェーブレット係数、 $l, \mathbf{x}', r_{-\theta}$: それぞれウェーブレットの幅、位置、および方向に対応するスケールパラメータ、移動パラメータ、回転マトリックス、 $\overline{\psi}$: 関数 ψ の複素共役である。なお、式(8)の l^{-2} は、ウェーブレット係数を規準化するための係数であり、ここでは、関数 $f(\mathbf{x})$ のスケールを抽出するので l^1 ノルムで規準化している。各パラメータを変化させることによりマザーウェーブレット ψ を拡大・縮小、移動および回転させ、 $\psi_{l, \theta, \mathbf{x}'}$ と f との内積により関数

の局所的な変動特性を抽出する。本研究では、次式で表される、ガウス分布の高次オーダーラプラシアン ($n = 3$) をマザーウェーブレットとして用いた。

$$\psi_h^{(n)}(\mathbf{x}) = (-\Delta)^n \exp(-|\mathbf{x}|^2/2) \quad (9)$$

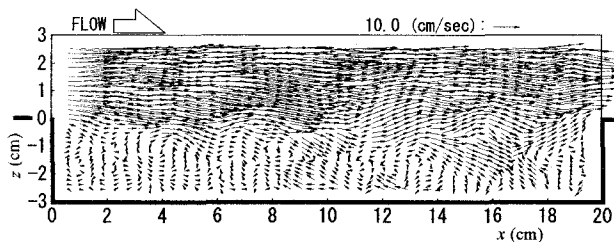
図-3に、マザーウェーブレット $\psi_h^{(3)}(x, z)$ を示す。なお、本研究で用いたウェーブレットは等方性ウェーブレットであるため、式(8)における回転マトリックス $r_{-\theta}$ はパラメータから除かれる。

4. 解析結果と考察

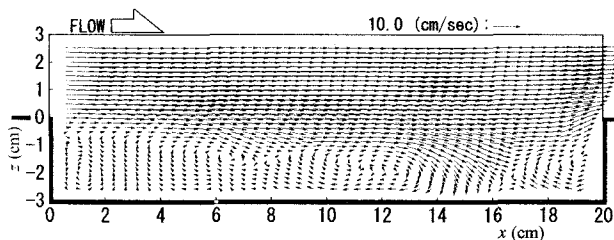
(1) 多重解像度解析による変動流速成分の抽出

PIV計測で得られた各点 (x, z) の流速時系列 $\mathbf{v}(x, z, t) = (u(x, z, t), w(x, z, t))$ に多重解像度解析¹⁾を適用することにより、流れの組織運動を構成する周波数帯成分を抽出する。

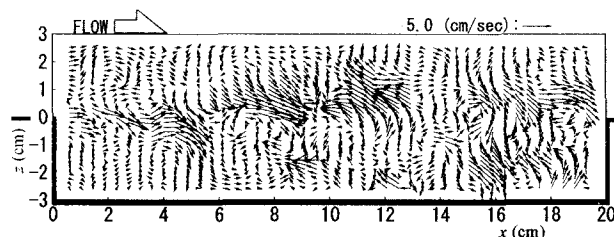
図-4(a)は、凹部中央($x = 10.36\text{cm}$, $z = -0.01\text{cm}$)における x -方向流速時系列 $u(x, z, t)$ に多重解像度解析を適用



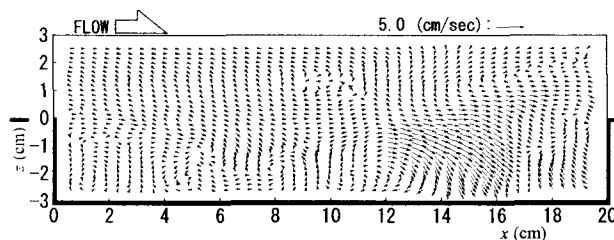
(a) 瞬間流速 V



(b) 近似流速成分 $\bar{V}$



(c) 変動流速成分 V'



(d) 時間平均流速と近似流速成分の残差 $\bar{V}-V'$

図-5 各周波数帯に分解された流速ベクトル

することにより各周波数帯(レベル j)での近似流速成分 $u_j^s(t)$ と変動流速成分 $u_j^w(t)$ に分解した各時系列であり、図-4(b)は、同一点におけるレベル j の変動強度 $\overline{u_j^{w2}}$ 、 $\overline{w_j^{w2}}$ の分布である。表-2に各レベル j の周波数帯を示す。図-4(a)より、レベル j が小さくなるとともに高周波数の変動流速成分 $u_{j-1}^w(t)$ が近似流速成分 $u_j^s(t)$ から分離され、時系列の変動が段階的に除去されていくのがわかる。図-4(b)に示す $\overline{u_j^{w2}}$ 、 $\overline{w_j^{w2}}$ は、レベル $j=-5$ (0.9~1.9Hz) でどちらも最大となる。また、 $\overline{u_j^{w2}}$ はそれより低周波数域で比較的大きな値をとり、 $\overline{w_j^{w2}}$ はレベル $j=-5$ を頂点としてほぼ左右対称な分布となる。このことより、変動エネルギーは低周波数域で主流から $\overline{u_j^{w2}}$ 成分に供給され高周波数になるに伴って $\overline{w_j^{w2}}$ に伝播されていくことが推測でき、組織運動の最も卓越する周波数帯は0.9~

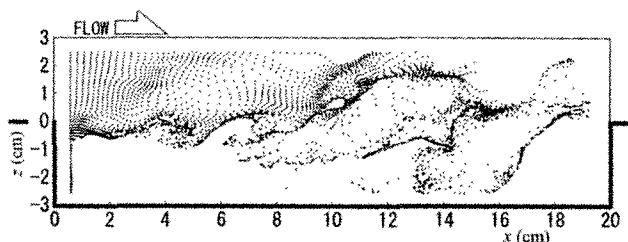


図-6 擬似粒子による流脈図(図-5の時刻に対応)

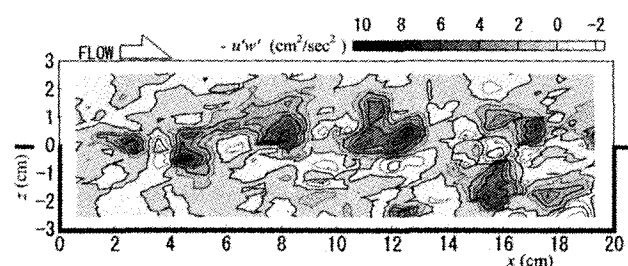


図-7 瞬間レイノルズ応力の分布(図-5の時刻に対応)

1.9Hzであると考えられる。また、レベル $j=-1$ での変動強度が大きい値をとるのは、PIVの計測誤差(ノイズ)によるものと考えられる。以上より、本研究では、 $\overline{w_j^{w2}}$ が小さい $j=-8$ 、ノイズを含む $j=-1$ およびその一つ上のレベル $j=-2$ を除き、残りの周波数 $f=0.2\sim 7.5$ Hz の成分を組織運動に関わる変動流速成分 V' として解析を行うことにした。

(2) 解析対象の信号となる瞬間レイノルズ応力の分布

二次元連続ウェーブレット変換を適用する前に、抽出した変動流速成分 $V'(x, z, t) = (u'(x, z, t), w'(x, z, t))$ について検討を行う。図-5に、ある時刻の瞬間流速ベクトル V 、低周波数域の近似流速成分 $\bar{V}$ (周波数 $f=0\sim 0.2$ Hz)、変動流速成分 V' ($f=0.2\sim 7.5$ Hz)、および $\bar{V}$ と図-2の時間平均流速 $\bar{V}(x, z, t) = (U(x, z, t), W(x, z, t))$ の残差: $\bar{V}-V'$ の空間分布を示す。図-5(d)に示す残差の流速ベクトルは、主に凹部水深 D 程度のスケールをもつ低周波数の変動成分(近似流速のトレンド)である。図-5(c)に示す変動流速成分 V' の分布では、ベクトルの絶対値が大きい部分(変動流速卓越部)が、ほぼ一定間隔で存在しているのがわかる。各部の変動流速ベクトルはほぼ同一方向を示しており、そのほとんどが、高速流体($u'>0$)の凹部内への潜り込み($w'<0$)、もしくは、低速流体($u'<0$)の巻き上がり($w'>0$)である。

図-6は、凹部上流断面($x=0.6$ cmの鉛直線上)において時間間隔1/60 secで投入した擬似粒子の流脈図である(図-5の時刻に対応)。ここで、擬似粒子の位置は、 $\bar{V}(x, z, t) + V'(x, z, t)$ を用いて算出している。凹部混合層の縁(主流域との境および下層の微流速域との境)がよく可視化されている。図-5(c)で見ることができると変動流速卓越部は、その縁に沿って存在している。

図-7は、変動流速成分 V' (図-5(c)) から算出した瞬間

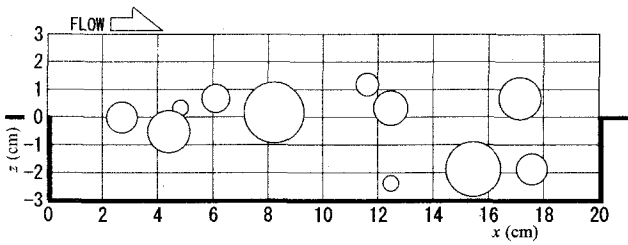


図-8 ウェーブレット係数極大値の位置とスケールの空間分布(図-7に対応)

レイノルズ応力 $-u'w'(x, z, t)$ の分布である。瞬間レイノルズ応力の卓越する部分(瞬間レイノルズ応力卓越部)は、変動流速卓越部とよく一致し、凹部混合層の縁に沿って存在している。

以上のことより、凹部混合層における流れの組織運動を抽出する際に指標となる物理量として、瞬間レイノルズ応力 $-u'w'(x, z, t)$ を選び、その空間分布に対して二次元連続ウェーブレット変換を適用することとする。

(3) 二次元ウェーブレット変換による瞬間レイノルズ応力の空間スケールの抽出

式(8)ではスケールパラメータ l と移動パラメータ $x'=(x, z')$ を二次元空間で変化させて係数を計算するため、一次元解析^{1),2)}に比べて計算負荷が膨大になる。そこで、瞬間レイノルズ応力 $-u'w'(x, z, t)$ の極大値近傍のみでパラメータ x' 、 l を変化させてウェーブレット係数の分布を求め、その極大値に対応するパラメータにより瞬間レイノルズ応力卓越部の空間スケール $l_{\max}$ およびその位置 $(x_{\max}, z_{\max})$ を抽出した。

図-8に解析結果を示す(図-7に対応)。図中における円の直径と中心位置が、それぞれ瞬間レイノルズ応力卓越部の空間スケール $l_{\max}$ と位置 $(x_{\max}, z_{\max})$ に対応する。これより、ウェーブレット係数極大値を介して、凹部に存在する組織運動(瞬間レイノルズ応力卓越部)の空間スケールを抽出できることがわかる。

(4) 瞬間レイノルズ応力と空間スケールの関係

各時刻で抽出された瞬間レイノルズ応力卓越部の位置 $(x_{\max}, z_{\max})$ と空間スケール $l_{\max}$ を用いて、その範囲内の瞬間レイノルズ応力 $-u'w'(x, z, t)$ の空間平均値 $-\overline{u'w'}$ を算出し、各空間スケール l (間隔 Δl) ごとにその統計平均 $-\overline{u'w'}$ を次式より計算した。

$$-\overline{u'w'} = \frac{1}{N_l} \sum \frac{4}{\pi l_{\max}^2} \int (-u'w') dx dz \quad (10)$$

ここに、 N_l は、空間スケール l (間隔 Δl) に含まれる事象の数であり、積分領域 c は、 $(x_{\max}, z_{\max}, l_{\max})$ で指定される領域のみの積分であることを示す。

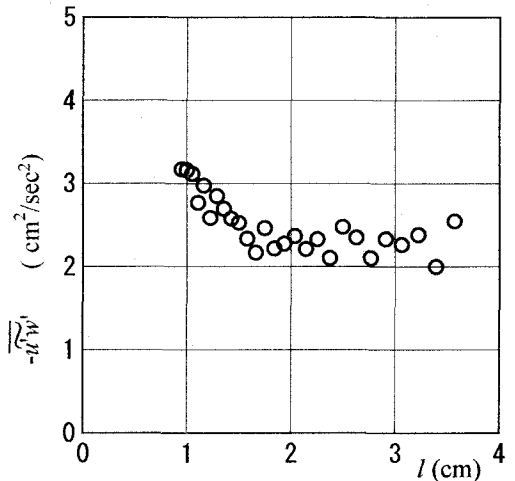


図-9 卓越領域の瞬間レイノルズ応力の平均値と空間スケールの関係

図-9に、 $-\overline{u'w'}$ と空間スケール l の関係を示す。 $l = 1.6 \sim 1.7 \text{ cm}$ を境として、小さい空間スケールの場合、瞬間レイノルズ応力の平均 $-\overline{u'w'}$ が大きい値を示し、空間スケールが大きくなるに従い、 $-\overline{u'w'}$ は減少して一定値に漸近している。

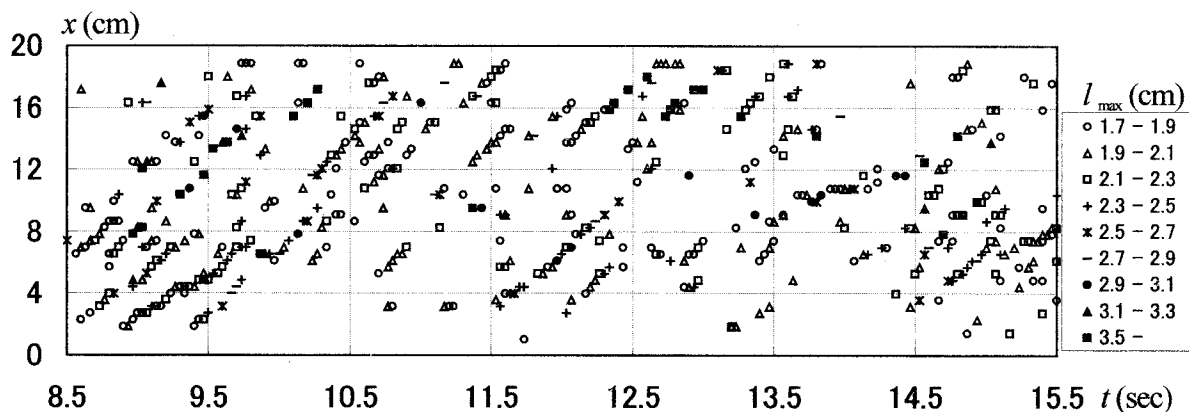
(5) 凹部混合層における組織運動の走時挙動

図-10は、ウェーブレット係数極大値の中心位置 $x_{\max}$ と対応する時刻 t の関係を、上述の閾値 ($l = 1.7 \text{ cm}$) を境にしたスケール別に示している ($-1.0 \text{ cm} < z < 1.0 \text{ cm}$)。図中のシンボルは、対応する空間スケール $l_{\max}$ を表している。図-10(a)より、大きな空間スケールをもつ瞬間レイノルズ応力卓越部は、時間の経過とともに、その空間スケールを変化させながら流下方向に移動している。 $x-t$ 平面におけるこれらの帯状に連なるプロットは、凹部混合層での組織運動の走時挙動を反映するものと考えられる。すなわち、これら帯の勾配は組織構造の移流速度を、 x 、 t 方向の帯の間隔が空間的・時間的な発生間隔をそれぞれ表している。図-10(b)の小スケールの場合、ウェーブレット係数極大値の連続性(プロットの帯状の連なり)は、図-10(a)の大スケールの場合ほど明瞭ではない。しかしながら、小スケールのプロットは大スケールの帯の近傍に散在しており、これら二つのスケール間に何らかの関連性があることを示唆している。

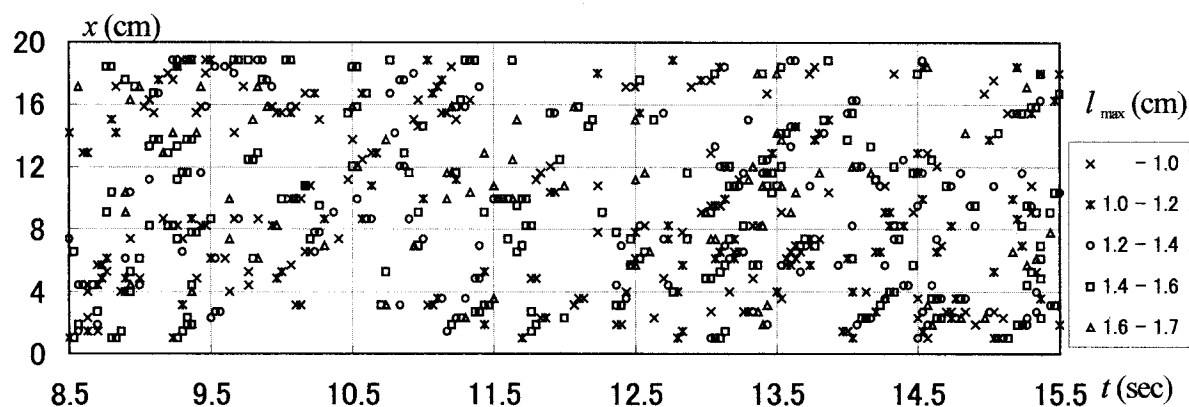
5. 結 論

本研究で得られた結果を以下にまとめて記す。

- 1) 開水路凹部流れのPIV流速値に対して多重解像度解析を行い、低周波数帯でのトレンドと高周波数帯でのノ



(a) 大スケール成分



(b) 小スケール成分

図-10 時空間平面上的ウェーブレット係数極大値の分布

イズを除去し、流れの組織運動を構成する変動流速成分を抽出した。多重解像度解析は、このように、対象となるスケール(周波数)の変動成分のみを解析するのに有効な手法である。

- 2) 凹部内において変動流速が卓越する部分は凹部混合層の縁に沿って存在し、瞬間レイノルズ応力の卓越部分と殆ど一致する。このことより、瞬間レイノルズ応力の空間分布を、凹部混合層における流れの組織運動を抽出するための水理指標とした。
- 3) 二次元連続ウェーブレット変換を瞬間レイノルズ応力の空間分布に適用してウェーブレット係数を算出し、その極大値を介して瞬間レイノルズ応力卓越部の空間スケールおよび位置を求めた。
- 4) 瞬間レイノルズ応力の卓越部は、その空間スケールによって凹部内での挙動が異なり、大きなスケールの卓越部はその空間スケールを変化させながら流下方向に移流する。このことより、時間-空間平面における大スケールの卓越部の分布は、凹部混合層の組織運動の走時挙動を反映していると考えられる。

参考文献

- 1) 神田 徹, 宮本仁志, 榎野 渉: 開水路凹部のせん断混合層における乱流構造のウェーブレット解析, 土木学会論文集, No.656/II-52, pp.121-133, 2000.
- 2) 神田 徹, 宮本仁志: ウェーブレット変換を用いた開水路凹部流れの組織運動の解析, 水工学論文集, 第44巻, pp.515-520, 2000.
- 3) 宮本仁志, 神田 徹, 藤田一郎, 池上 迅: PIVによる開水路凹部流れの計測および数値解析, 水工学論文集, 第41巻, pp.1049-1054, 1997.
- 4) 例えば, Antoine, J. -P.: The 2-D wavelet transform, physical applications and generalizations, *Wavelets in physics*, ed. J. C. van den Berg, pp.23-75. Cambridge University Press, 1999.
- 5) Liandrat, J. and Moret-Bailly, F.: The wavelet transform - some applications to fluid dynamics and turbulence, *Eur. J. Mech., B/Fluids*, Vol. 9, No. 1, pp. 1-19, 1990.
- 6) 宮本仁志, 神田 徹, 兵頭伸幸: 開水路凹部流れにおける乱れの主成分分析, 水工学論文集, 第45巻 (発表予定), 2001.
- 7) Daubechies, I.: *Ten lectures on wavelets*, CBMS Lecture Notes Series, SIAM, 1991.

(2000. 10. 2受付)

謝辞: 本研究は、文部省科学研究費補助金、奨励研究(A) (課題番号: 11750458, 研究代表者: 宮本仁志) の補助を受けた。ここに記して謝意を表します。