

落下水膜の振動特性および不安定メカニズムに関する研究

Incipient oscillations of a falling water sheet and their instability mechanisms

京藤 敏達¹・中村 亮²・P. J. バルア³
Harumichi KYOTOH, Ryo NAKAMURA and Baruah PRANAB

¹正会員 工博 筑波大学助教授 機能工学系 (〒305-8573 茨城県つくば市天王台1-1-1)

²工修 第三設計工業株式会社 (〒502-0014 岐阜市雄総緑町4-9)

³学生員 工修 筑波大学工学研究科 (〒305-8573 茨城県つくば市天王台1-1-1)

Stability of a falling water sheet is studied by measuring the displacements of water surface at the various heights of the sheet. Effects of geometry at the backward space of the sheet and disturbance generated at the upstream water surface are investigated from the power spectrum of the data. Experiment without a vertical wall at the backward of the sheet reveals that the oscillation occurs due to the shear instability of air flow. This oscillation with frequency about 10 Hz at the upstream and 20 Hz at the downstream seems to be caused by a resonance of the system, because these frequencies are amplified along the sheet as elucidated from the forced oscillation experiment.

The modulation of the oscillations observed by the vertical wall experiment, which is known as the nappe oscillation, is examined and predicted by a model derived from present study. In addition, the shear wave appearing on the sheet and leading to the sheet break-up is discussed by a linear stability analyses of the Navier-Stokes equation.

Key Words : falling water sheet, forced experiment, nappe oscillation, shear wave, linear stability analyses

1. 序論

越流水膜の自励振動はダムや堰などにおける水流落下時の低周波音の発生に関与し、水膜破碎後の水滴の生成は熱交換および運動量交換を促進するため工学の様々な分野において注目されている。同時にホテルや公園における水空間の設計にとって破碎位置の予測および水膜振動の制御は重要な課題である¹⁾。また、落下水膜の破碎現象は人工滝を含む水空間の設計上重要であるが、破碎位置の予測およびその制御は未だなされていない。

水膜振動はナップの脈動現象に関連して過去に研究された^{2), 3), 4)}。ナップの振動の発生原因としては、ゲートと水膜背面の空気の連成振動および水膜上に発生する不安定波が考えられ、実際の現象はこれらが重合した形で起きている。また、水膜厚さが流れ方向に変化する流れの安定問題はフィルムのコーティングの際の液膜の安定性と関連して研究されている⁵⁾。これら水膜の全体的な運動に対して、Taylorは水の表面張力が支配的となる空間スケールにおける水膜上の波・水膜の破れ・水滴生成

について実験および理論から探求した^{6), 7)}。この方面の研究は液体の微粒化と併せてさらなる研究が進められている。とくに、液膜流の安定問題は、液体の噴霧化(燃料の混合)に関連して、実験的⁸⁾および理論的⁹⁾に研究されている。ただし、この現象では空気流によるせん断応力が支配的であるため、重力の効果は無視されている。一方、自由落下水膜は重力により厚さが変化し、本実験において水膜ばらけ位置における水膜厚さは数ミリ、落下速度は6m/sであり、空気の影響を大きく受けている。

本論文で扱う落下水膜の破碎現象は、上記の既往の研究と関連するばかりではなく、水域と大気の相互作用を理解する上での基礎的課題である。本研究の目的は、まず実験的に水膜振動の発生原因を探索し、ついでこの現象を説明するモデルを導出することである。とくに、落下水膜の外乱応答性を実験的に調べることによって水膜破碎に関わる水膜振動の発生メカニズムを検討する。さらに、その結果をもとに水膜振動のモデル化および水膜破碎位置の予測を行う。本研究の特色は次の2点である。(1) 上記の非一様な流れ場を水膜上流から下流に向かって計測し、水膜破碎に到る不安定メカニズムを実験

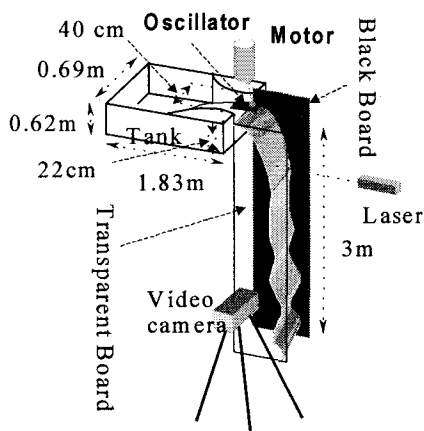


図-1 実験装置の概略

表-1 実験条件

流量(m^3/min)	0.123	0.139	0.155	0.190
越流水深(cm)	1.9	2.3	2.7	3.5
レイノルズ数 ^{*1}	3920	4430	4940	6060

*1:越流時

的に調べる。(2)水膜上流に周期的な外乱を与えたときの、水膜の応答を実験および理論により解析する。

2. 実験

実験は3mの高さから水を落下させ、各流量ごとにレーザー変位計による水膜振動の計測、高速ビデオによる写真撮影を行った。図-1に実験装置の概略を示す。幅40cmの堰から水膜が側壁に沿って自由落下するときの水膜の水平変位をレーザー変位計（超ロングレンジCCDレーザー変位センサ：（キーエンス・LK-500））により計測した。サンプリングタイムは1/500秒である。特に、水膜幅が表面張力によって減少するのを防ぐために、水膜両端に側壁を設置した。

水膜の破碎に関する振動（振動数:20~30Hz）の発生原因を明確にするために、まず“強制外乱なし自由落下実験”を行い、水膜振動を堰越流口から破碎位置まで10cm間隔で計測した。また、外乱に対する水膜応答を調べるために、“強制外乱あり自由落下実験”を行い、堰越流口上流の水面に約振幅1mmの周期的変位（振動数6, 8, 10, 15, 20, 25, 30, 35Hz）を与えた。そのパワースペクトルの増幅過程から水膜自体に共振振動数が存在するか否かを検討した。

最後に、水膜周辺の空間形状が水膜に与える影響をみるために、長さがそれぞれ40cm, 90cm, 180cmの鉛直壁を堰前面に設置し、同様の計測を行った。

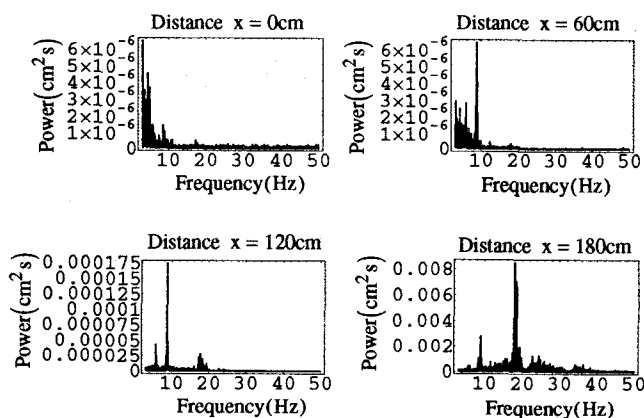


図-2 流下方向のパワースペクトルの変化
“強制外乱なし自由落下実験”

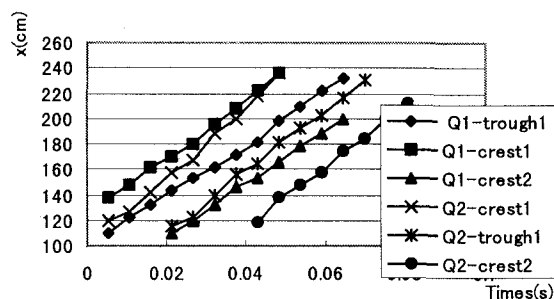


図-3 ばらけ位置における水膜の山と谷の軌跡
x軸原点は堰頂から約200cmの高さに相当する。
ただし、 $Q_1=0.190\text{cm}^3/\text{min}$, $Q_2=0.155\text{cm}^3/\text{min}$ 。

(1) 強制外乱なし自由落下

図-2は越流水深が2.3cmのときの水膜の各高さにおける時間変動のパワースペクトルをプロットしたものである。図のx軸は堰頂を原点として鉛直下方を正としたときの距離を示している。堰頂からの距離xが60cm付近で9Hzの振動が現れ、 $x=120\text{cm}$ では約倍モードの20Hzの振動が現れる。次いで、 $x=180\text{cm}$ ではこの20Hzの振動が卓越する。上流では低周波、下流ではその数倍の振動モードが卓越するのは、流量を変えた他の実験においても同様に観察された。

水膜のばらけ位置（ $x=220\text{cm}$ 付近）ではレーザー変位計による測定が困難であったため、この水膜振動を明確にとらえるため高速ビデオカメラで水膜の山と谷の軌跡を追跡した（図-3）。横軸は時間、縦軸は堰からの落下距離を示している。波の山と山、もしくは、谷と谷の間隔を読むことによって、それぞれ水膜振動の周期および波長を知ることができる。この図から、水膜破碎の振動数はおおよそ28Hz、波長は60cm程度である。また、水膜上の波動はほぼ流れに乗って落下しており、波速は流速にほぼ等しいと考えられる。また、流量が増加すると波

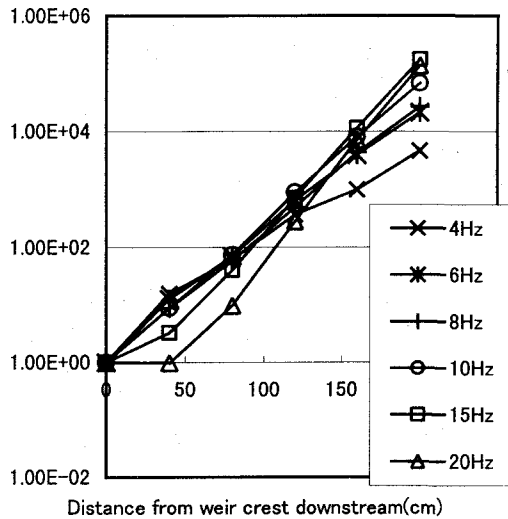


図-4 パワースペクトルの増幅率
“強制外乱あり自由落下実験”

の振動数も増大する。

水膜の破碎に関与する振動の発生の原因を探ることが本節の目的である。“強制外乱なし自由落下実験”から、水膜破碎に関与する振動は上流から生じたのではなく、水膜途中、すなわち約 $x = 100$ cm 辺りから発生している。また、水膜破碎位置での波長は $40 \sim 50$ cm であるから、波速が流速で近似されるとすれば、発生時点 ($x = 100$ cm) での波長はおよそ 13 cm となる。この液膜振動に表面張力が効いているか否かはより精密で詳細な実験を要するが、水膜振動が現れた時点では慣性力が支配的であり表面張力は無視できると考えられる。

(2) 強制外乱あり自由落下

次に“強制外乱あり自由落下実験”を行い、水膜の外乱に対する応答特性を調べた。外乱は図-1に示すように堰上流タンクにモータを設置し、水面に置いた平板をモータの上下振動によって揺らすことで発生させた。この実験では水膜上に現れる振動は主に与えた外乱の振動モードであった。

モータの振動数が $4, 6, 8, 10, 15, 20$ Hz のときの各高さにおけるパワースペクトルを読み取り、その堰上における値で無次元化したパワースペクトルの値を図-4に示す。これら曲線の傾きが増幅率を表すが、外乱の振動数によって増幅の仕方が異なる。 $4, 6, 8$ Hz の振動は堰からの距離が短いときの方が増幅率が大きく、また、 $15, 20$ Hz の振動は距離が大きいときに増幅率が大きくなっている。水膜は落下にともないほぼ距離の $1/2$ 乗に比例して薄くなる。したがって、前述の結果は厚い水膜が低周波に、薄い水膜が高周波に応答することを意味する。

以上の事実は、水膜破碎の振動が上流の擾乱によって偶発的に生じたのではなく、水膜と空気システムの固有のモードとして励起されることを示唆する。

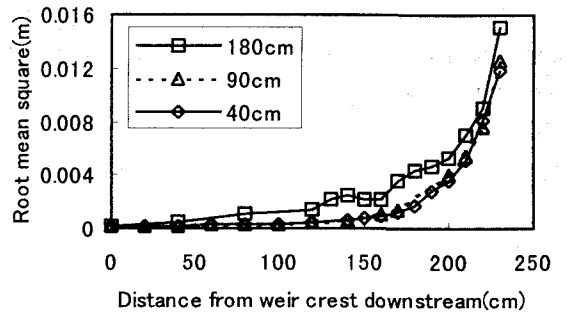


図-5 水膜振動振幅の背面板による効果
背面板の長さはそれぞれ180, 90および40cm

(3) 水膜背面板の効果

ナップの振動は水膜と鉛直壁で囲まれた空気が水膜と連成振動を起こすことに起因する。この効果をみるため、水膜背面の鉛直壁の長さをそれぞれ 40 cm, 90 cm, 180 cm の3ケースに変化させ同様な実験を行った。

図-5は流量を $0.155 \text{ cm}^3/\text{min}$ に固定し、背面板の長さを変えたときの水膜の振動振幅を落下距離の関数としてプロットしたものである。背面板が長くなると水膜の振動振幅が変調していることがわかる。この原因としては、背面板を設置することで空気の行き場が狭くなり、水膜の変位による空気の圧力変動が水膜全体にわたるようになったためであると考えられる。

3. 理論的な検討

前章の実験から理解されるように、落下水膜の振動を議論する際にはその原因を大きく別けて2つ考慮する必要がある。1つ目は水膜と背後に閉じ込められた空気の連成振動による不安定性、2つ目は落下水によって加速された空気流のせん断不安定である。水膜の落下高さが小さく、水膜前面もしくは背面の空気が閉じ込められている場合は前者の要因が支配的であり、水膜の落下高さが大きく水膜前後の空間が吹き抜けになっている場合には後者の要因が水膜振動に大きく関与する。水膜振動を理論的に予測する際に考慮すべき点を挙げると次のようになる。(A) 非一様流。(B) 重力の効果。(C) 空気を媒介とする圧力の伝播。(D) 水および空気のせん断流の不安定。(E) 水の表面張力の影響。

ここでは、理論的検討の初期段階として以下の2つの理論について検討する。

(1) 水膜と空気の連成振動

水膜前面および背面の空気が鉛直壁、水面、上壁面などで囲まれているときは、局所的な水膜変動の影響は空気を通して水膜全体に伝播する。本節では水膜全体の運動を対象とし、水膜と空気間に生じるせん断流の効果は無視する。それゆえ、流れ場は渦無しであると仮定す

る。水膜前後の空間が様々な幾何学形状をもつ場合に適用可能な物理モデルを求めるために、水膜の運動方程式と水膜に作用する圧力を別々に導く。

a) 基礎方程式

まず、水流の運動方程式はラプラス方程式および圧力方程式であり次式で与えられる。

$$\Delta\phi_I = 0, \quad \frac{\partial\phi_I}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\phi_I}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\phi_I}{\partial y} \right)^2 \right] - gx + \frac{P_I}{\rho_w} = 0 \quad (1)$$

ここで、 ϕ_I および P_I はそれぞれ速度ポテンシャルと圧力である。下付添字の I は水膜部分における諸量を表わし、 ρ_w は水の密度、 g は重力加速度である。 t は時間、 x, y は空間座標で x 軸は鉛直下方が正となるように選んだ。水膜と空気の2つの界面の位置を η_r, η_ℓ と置くと、水流に対する境界条件は

$$P_I + T\kappa_\alpha - P_{sa} = 0, \quad \frac{\partial\eta_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial\phi_I}{\partial x} \frac{\partial\eta_\alpha}{\partial x} - \frac{\partial\phi_I}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

$$y = \eta_\alpha, \quad \alpha = r, \ell$$

で与えられる。下付添字の α は r もしくは ℓ であり、水流の右側を r 、左側を ℓ で表わすことでそれぞれの界面における値を区別する。ここで、 P_{sa} は界面における空気流の圧力、 T は表面張力係数、 κ_α は界面の曲率である。

さて、 x 方向の空間スケールが y 方向の空間スケールに比べて極めて大きい運動を対象とし

$$O(\partial/\partial x)/O(\partial/\partial y) = \varepsilon \ll 1 \quad (3)$$

を仮定する。また、流体の加速度は重力加速度と同オーダーであるとする。以上の仮定のもとに摂動解として

$$\begin{aligned} \eta_\alpha &= \eta_{\alpha 0}(x, t) + \delta\eta_{\alpha 1}(x, t) + \dots, \\ \phi_I &= \phi_{I 0}(x, y, t) + \delta\phi_{I 1}(x, y, t) + \dots, \\ P_{sa} &= P_{sa 0}(x, t) + \delta P_{sa 1}(x, t) + \dots, \\ \delta &\equiv \varepsilon^2 \end{aligned} \quad (4)$$

を与え、基礎方程式に代入し各オーダーの方程式を求め整理すると次式が得られる⁵⁾。

$$\frac{\partial Y_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(U_0 Y_s) = 0, \quad (5a)$$

$$\rho_w \left(\frac{\partial U_0}{\partial t} + U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} \right) = (\rho_w - \rho_a)g, \quad (5b)$$

$$\begin{aligned} 2\rho_w Y_s \frac{\partial^2 Y_m}{\partial t^2} + 2\rho_w Y_s \left(\frac{\partial U_0}{\partial t} + U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} \right) \frac{\partial Y_m}{\partial x} \\ + 4\rho_w Y_s U_0 \frac{\partial^2 Y_m}{\partial t \partial x} + (2\rho_w Y_s U_0^2 - 2T) \frac{\partial^2 Y_m}{\partial x^2} \\ = P_{sa 1} - P_{sr 1} \end{aligned} \quad (5c)$$

ただし、

$$U_0 = \frac{\partial\phi_{I 0}}{\partial x}, \quad Y_s = \frac{1}{2}(\eta_{r 0} - \eta_{\ell 0}), \quad Y_m = \frac{1}{2}(\eta_{r 0} + \eta_{\ell 0}) \quad (6)$$

である。式(5a)は体積保存則、式(5b)、(5c)は鉛直方向および水平方向の運動方程式である。上式は、式(5b)から U_0 、次に式(5a)から Y_s 、最後に式(5c)から Y_m を決定する。ただし、空気流の界面における圧力 P_{sa} は界面変位 η_α の関数となる。

前述の圧力を決定するためには、空気流のポテンシャル関数を求めれば良い。空気流に対する基礎方程式もラプラス方程式であり、その解は界面における境界条件

$$\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial n} = \left\{ 1 + \left(\frac{\partial\eta_\alpha}{\partial x} \right)^2 \right\}^{-1/2} \left(-\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial x} \frac{\partial\eta_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\phi_\alpha}{\partial y} \right), \quad y = \eta_\alpha \quad (7)$$

および水膜前後の空間の境界上での運動学的条件から決定することができる。ただし、 $\alpha = r, \ell$ である。研究の初期段階として、ここでは水膜振動が小さく水膜表面の平均位置が鉛直平面であるとする。このとき矩形領域にグリーンの定理を適用し、グリーン関数として境界上でその法線微分が0となるものを用いれば、ポテンシャル関数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \phi_{sa 1}(x, t) &= 2 \int_0^h Gr_\alpha(x, \bar{x}) \frac{\partial\eta_{\alpha 0}}{\partial t}(\bar{x}, t) d\bar{x}, \\ Gr_\alpha(x, \bar{x}) &= -\frac{1}{\pi} \sum_n \frac{\cos \frac{n\pi x}{h} \cos \frac{n\pi \bar{x}}{h}}{n \tanh \left(\frac{n\pi L_\alpha}{h} \right)}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\alpha = r, \ell$$

ここで、 h は水膜の落下高さ、 $y = L_\alpha$ は矩形領域の鉛直壁の位置である。水流部分にはいわゆる長波近似を用いたが、上式は任意の h/L_α に適用される。ポテンシャル流においては、空気の流れは水膜表面の法線方向変位によって引き起こされるため水膜変位が小さいとき空気流の非線形性は無視される。したがって、圧力は主に運動の非定常性から生じ、圧力方程式によって

$$P_{sa 1}(x, t) = -2\rho_a \int_0^h Gr_\alpha(x, \bar{x}) \frac{\partial^2 \eta_{\alpha 0}}{\partial t^2}(\bar{x}, t) d\bar{x}, \quad (9)$$

$$\alpha = r, \ell$$

で与えられる。これを水膜の水平方向の運動方程式に代入すれば閉じた方程式系が得られる。

b) 水膜振動の解析

特性曲線法を使うと、鉛直方向の運動方程式および体積保存則は厳密に解くことができ以下のようになる。

$$\begin{aligned} x &= \frac{g_0}{2}(t - \tau)^2 + u_{e0}(\tau)(t - \tau), \\ U_0 &= g_0(t - \tau) + u_{e0}(\tau), \\ Y_s &= \frac{u_{e0}(\tau)y_{e0}(\tau)}{g_0(t - \tau) + u_{e0}(\tau)}, \quad g_0 \equiv (1 - \rho_a/\rho_w)g. \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 τ は媒介変数である。また、 u_{e0} および y_{e0} は水膜上流端における水流の流速および水膜振幅であり、これらが τ に依存しないときは定常流となる。一方、水平方向の運動方程式は圧力および表面張力によって複雑となり、特性曲線法が有効であるとは言えない。本節で対象とする水膜運動の空間スケールは系全体にわたるもので表面張力は無視できると考えられる。例えば表面張力および空気の影響を無視すると、式(5c)の解は

$$Y_m = u_{e0}(\tau)Y_{mex}(\tau)(t - \tau) \quad (11)$$

で与えられる。ただし、 Y_{mex} は水膜上流端の水膜の x 方向勾配である。以上の議論で理解されるように、空気を通した圧力の伝播がないときは方程式は双曲型であり、方程式は特性曲線を使って解くことが可能である。

水膜周辺の空間形状が任意の場合に本理論を適用することは可能であるが、本論文では方程式の基礎的特性をみるために、水膜前後の空間形状が同じで、かつ、 U_0, Y_s が時間に依存しないときの水膜運動を調べる。このとき、式(5c)中の圧力による外力は Y_s には依存せず、 Y_m のみによる。まず、無次元化

$$x_n = \frac{x}{h}, \quad t_n = t \sqrt{\frac{g_0}{h}}, \quad q_n = \frac{2u_{e0}y_{e0}}{h\sqrt{g_0h}}, \quad u_{e0n} = \frac{u_{e0}}{\sqrt{2g_0h}} \quad (12)$$

を行うと、方程式(5c)は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 Y_m}{\partial t_n^2} + \frac{\partial Y_m}{\partial x_n} + 2\sqrt{2}\sqrt{x_n + u_{e0n}^2} \frac{\partial^2 Y_m}{\partial t_n \partial x_n} + 2(x_n + u_{e0n}^2) \frac{\partial^2 Y_m}{\partial x_n^2} \\ &= \frac{2\sqrt{2}\sqrt{x_n + u_{e0n}^2}}{q_n} \gamma \int_0^1 Gr_r(hx_n, hx_{nl}) \frac{\partial^2 Y_m}{\partial t_n^2}(x_{nl}, t_n) dx_{nl} \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、 q_n は単位幅当たりの無次元流量、 γ は密度比 ρ_a/ρ_w である。この方程式に変数変換

$$u_n = \sqrt{u_{e0n}^2 + x_n} \quad (14)$$

を行うと、式(5c)は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 Y_m}{\partial t_n^2} + \sqrt{2} \frac{\partial^2 Y_m}{\partial t_n \partial u_n} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_m}{\partial u_n^2} \\ &= \frac{4\sqrt{2}u_n}{q_n} \gamma \int_{u_{e0n}}^{u_{hn}} Gr_u(u_n, u_{nl}) \frac{\partial^2 Y_m}{\partial t_n^2}(u_{nl}, t_n) u_{nl} du_{nl}, \quad (15) \\ & Gr_u(u_n, u_{nl}) \equiv Gr_r(h(u_n^2 - u_{e0n}^2), h(u_{nl}^2 - u_{e0n}^2)) \end{aligned}$$

となり、上記微積分方程式の微分作用素の係数は定数となる⁵⁾。

水膜の外乱依存性を調べるために、式(15)の解として時間周期解

$$Y_m = A_{ym}(u_n) \exp(i\Omega t_n) \quad (16)$$

を仮定する。また基礎式(15)は線形であり水膜振幅は適当に正規化してよい。したがって、水膜上流端での境界条件を次のように与える。

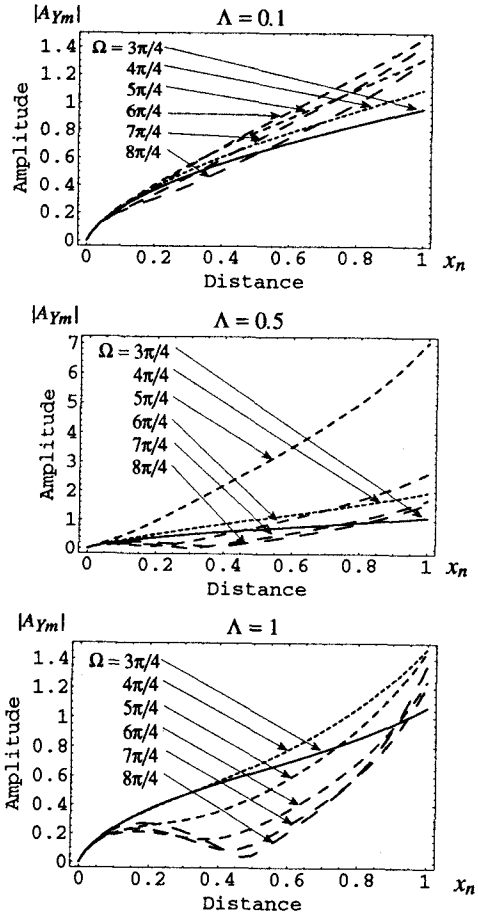


図-6 水膜振動の振幅

ここで、外乱振動数 Ω の値は破線の長い順にそれぞれ $\Omega=8\pi/4, 7\pi/4, 6\pi/4, 5\pi/4, 4\pi/4, 3\pi/4$ である。

$$A_{ym}(u_{e0n}) = 0, \quad \frac{dA_{ym}}{du_n}(u_{e0n}) = 1 \quad (17)$$

すると、この現象を支配する無次元パラメータは、水膜前後の空洞のアスペクト比 κ 、無次元振動数 Ω 、無次元初速度 u_{e0n} および空気の影響を代表する変数 $\Lambda = 8\sqrt{2}\gamma/q_n$ である。図-6に $\kappa=1$ 、 $u_{e0n}=0.1$ 、 $\Lambda=0.1, 0.5$ および1のときの $|A_{ym}|$ を x_n の関数としてプロットした。空気の影響がないとき、すなわち $\Lambda=0$ のとき、 $|A_{ym}|$ は x_n の関数として放物線を描く。空気の影響を考慮すると水膜振幅は変調し、波形は水流の流下方向のみではなく上流にも伝播する。さらに、水膜振幅が極値をもつ振動数が存在することがわかる。ナップの振動では、この増幅率最大のモードが観察されると考えられる。

(2) セン断流の不安定性による波動

本研究で観察された水膜の振動は、越流時のWeber数(慣性力/表面張力)が1に比べて遥かに大きいことから、表面張力が原因で生じたとは考え難い。したがって、表面張力を考慮したKelvin-Helmholtz型の増幅率最大のモードは、この水膜振動の原因ではない。実際、水

膜上に発生する波動の波長は水膜振動が僅かに現れる位置で数10cmであり、ここでは表面張力は無視できる大きさである。もちろん表面張力は水膜上に発生する小スケールの波動・ばらけ・微粒化に関しては重要な役割を演じる。

類似した現象が平板上の放射状液膜流で観察されており、これは平板上の液膜のせん断不安定性によって生じたTollmien-Schlichting波（T-S波）が現われたとして解析が行われている¹⁰⁾。一方、落下水膜においては、界面で空気が引きずられるため、水膜中よりも空気流のせん断変形速度が大きくなる。したがって、空気流の不安定性が原因となり発生したT-S波が水膜を媒介として観察されていると考えることができる。そこで本実験（越流水深 $H = 2.3\text{cm}$ ）において、空気流が先ず不安定になったとして、次式

$$\text{Re}(x) \equiv \frac{V_w(x)\delta(x)}{v_a}, \quad \delta(x) = 1.2 \sqrt{\frac{2v_ax}{V_w(x)}}, \quad (18)$$

$$V_w(x) \approx \sqrt{2gx}$$

から、遷移点 $\text{Re}(x) = \text{Re}_{cr} = 520$ におけるT-S波の振動数および堰頂からの距離を概算すると、31Hzおよび50cmとなった。この振動数は水膜ばらけ位置の実験値に近い。

一方、水膜を局所的にみて空間一様流であると仮定し、表面不安定モード（sinusoidal mode）の界面張力および水・空気の粘性を考慮した線形安定性を調べた（図-7）。解析方法は水流および空気流のOrr-Sommerfelds方程式をRicatti方程式に変換し、固有値問題から線形増幅率および不安定モードを求めるものである¹¹⁾。越流水深 $H = 2.3\text{cm}$ における臨界不安定モードを水膜の落下距離が50cmおよび100cmの場合に計算すると、その波長と振動数はそれぞれ14cm, 18Hzおよび18cm, 16Hzとなった。この理論には水膜運動に関する自由度が入っており流れは前述の空気流の場合より不安定となり、また得られた振動数は水膜上部における実験値20Hzに近い値である。

実験から観察された卓越振動数は水膜の落下に伴って、上流から下流に9Hz, 20Hz, 28Hzへと変化する（図-2参照）。上記の局所一様流の理論は各高さにおける不安定モードを予測するようであるが、この一連の現象を説明することはできない。

4. 結論および考察

実験的に自由落下水膜の振動の発生原因を調べ、水膜振動が空気流のせん断不安定性により生じること、上流で励起されたこの低周波モードが水膜厚さが小さくなるにつれてカスケードを起こし高周波モードが現れることが判明した。理論解析により、落下水膜によって加速された空気流の線形安定性を調べ、理論から予測される振動数は実験値周辺の値を与えることがわかった。ただ

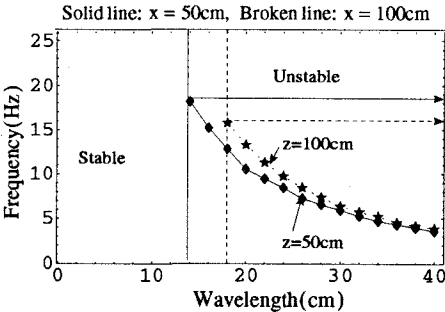


図-7 不安定モードの波長と振動数
落下距離50cmおよび100cmの地点における臨界モードの振動数はそれぞれ18Hzおよび16Hzである。

し、この現象の解明には流れの非一様性を考慮した理論解析が必要である。最後に、ナップの振動を予測するモデルを導き、本実験で観察された水膜振幅の変調現象について説明を与えた。

謝辞：筑波大学技官 中島孝，飯高稔，小島篤志，山田慶一，寺田秀雅の諸氏には実験装置の制作にご協力頂きました。ここに、感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 逢澤正行，篠原 修：自由落下型と越流型の落水表情についての実験的研究，土木学会論文集，No. 593/II-43，pp. 105-115，1998.
- 2) Shwartz, H. I.: Projected nappes subject to harmonic pressures, *Proc. Inst. Civil Engineers.*, Vol.28, pp.313-326, 1964.
- 3) 本間 仁，荻原国宏：フラップゲートの振動についての理論解析，土木学会論文報告集，No. 238，pp. 43-53，1975.
- 4) Casperson, L. W.: Fluttering fountains, *J. Sound and Vibration*, Vol. 162(2), pp.251-262, 1993.
- 5) Weinstein, S. J., A. Clarke, A. G. Moon and E. A. Simister: Time-dependent equations governing the shape of a two-dimensional liquid curtain, Part I: Theory, *Phys. Fluids*, Vol. 9(12), pp.3625-3636, 1997.
- 6) Taylor, G. I.: The dynamics of thin sheet of fluid, II. Waves on fluid sheets, *Proc. R. Soc. Lond.*, A253, pp.296-312, 1959a.
- 7) Taylor, G. I.: The dynamics of thin sheet of fluid, III. Disintegration of fluid sheets, *Proc. R. Soc. Lond.*, A253, pp.313-321, 1959b.
- 8) Mansour, A. and N. Chigier: Dynamic behavior of liquid sheets, *Phys. Fluids*, Vol. A3(12), pp.2971-2980, 1991.
- 9) Mehring, C. and W. A. Sirignano: Nonlinear capillary wave distortion and disintegration of thin planar liquid sheets, *J. Fluid Mech.*, Vol. 388, pp.69-113, 1999.
- 10) 東 恒雄，星野達郎：放射状液膜流れに関する研究 第1報 乱流遷移，機械学会論文集B編，Vol. 58, No. 452, pp. 974-981, 1984.
- 11) Davy, A.: On the numerical solution of difficult eigenvalue problems, *J. Comput. Phys.*, Vol. 24, pp. 331-338, 1977.

(2000. 10. 2受付)