

速度勾配テンソル不変量解析を応用した取水 槽流れの3次元渦構造特性の検索

APPLICATION OF INVARIANCE ANALYSIS OF VELOCITY-GRADIENT
TENSOR TO EVALUATION OF LOCAL PROPERTIES OF
THREE-DIMENSIONAL VORTEX STRUCTURE OF WATER INTAKE FLOW

中山 昭彦¹・焦 徳思²

Akihiko NAKAYAMA and Desi JIAO

¹ 正会員 PhD 神戸大学大学院教授 自然科学研究科 (〒657-8501 神戸市灘区六甲台町1-1)

² 学生会員 工修 神戸大学大学院 自然科学研究科 地球環境科学専攻(同上)

In order to examine local properties of three-dimensional complex flows around a water intake with locally varying strengths of shear and vorticity with isolated vortices, a new method of flow diagnostics based on the invariants of the velocity-gradient tensor has been proposed and applied to the analysis of the laminar flows in intake bay. The results indicate that the flow topology can be effectively found by the phase plot of the second and third invariants of the pressure-gradient tensor, while vortex structure can be better identified by the three-dimensional plots of the second invariant of the rotation tensor and the vorticity number.

Key Words: three dimensional flow, velocity- gradient tensor, intake, vortex

1. はじめに

近年コンピューターグラフィックスの発達により, 複雑な流れ場特性の把握, 問題点の検出などのために, 色々な可視化法が考えられている(たとえば古川¹⁾). こういった可視化法で複雑な剥離や渦の発生・崩壊を伴う3次元流れを調べる場合, 計算結果あるいは実験データより素早く流線や渦度分布の図を描くことにより流れ特性を視覚を通して理解することが出来る. しかし時空間で複雑に変化する流れは, 眼による平均流の流線や圧力の考察では流れの特性は把握し難い. また流速ベクトルや圧力などの物理量では流れ特性を的確に表せない場合もある. 特に形状や流入条件により流れ形態が大きく変わる取水口周りの流れを正確に把握し土砂吸引や局所洗掘を回避するためには渦検出などが重要になっている.²⁾

複雑な3次元流の膨大なデータから渦構造など流れの特性を抽出することは容易でない. 従来では渦度分布による方法, 圧力分布による方法が一般的であったが, 最近では高速計算機により渦コアを探索する Line Integral Convolution (LIC 法) などのツールが提案されている.

Perry & Chong³⁾はCritical-Point Theory に基づいた方法で位相幾何学的解析を提案している. 最近これを発展させ, 不規則に変化する乱流の構造を調べるのに, 平均流れに沿った方向で定義される座標上での記述より, 局所瞬時流の「変化」の方向に合わせた座標で記述する方法, すなわち, 瞬時局所の速度勾配テンソルの不変量を用いる方法がとられている(Chong et al.⁴⁾, Soria et al.⁵⁾, Chacin & Cantwell⁶⁾). これは, 流れの力学的特性, すなわち応力は流速によるのではなく速度勾配で決まり, 局所の力学を直接表しているからである. この方法は乱流に限らず層流の複雑な3次元流の特性を明らかにする場合にも有用であると考えられる.

本研究では, 単純なポテンシャル流やせん断流ではなく, 3次元せん断流と渦流の要素を含み条件により形態が大きく変わる取水口近傍の流れの実験データや数値解析結果より流れの特性を的確に把握するために従来の流速分布や流線, 圧力といった物理量以外に, 速度ベクトルの勾配またひずみ速度テンソル, 回転テンソルの主値, 不変量と流れのトポロジーと局所特性との関係を明らかにし, 複雑流れの把握に適用することを目的とする.

2. 速度勾配テンソルと流体局所運動の関係

3次元流れ場の点 $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)=(x, y, z)$ での速度ベクトルを $\mathbf{v}=(v_1, v_2, v_3)=(u, v, w)$ とすると点 $\mathbf{x}$ での相対運動は速度勾配テンソル $\mathbf{L}=\nabla \mathbf{v}$ (ij 成分は v_{ij})により決まる。一般に2階のテンソル $\mathbf{A}$ の固有値 λ は

$$\lambda^3 - I\lambda^2 + II\lambda - III = 0 \quad (1)$$

の解で与えられる。ここで I, II, III は

$$I = A_{ii}, II = \frac{1}{2}[I^2 - A_{ij}A_{ij}], III = -\frac{1}{3}A_{ij}A_{jk}A_{ki} \quad (2)$$

で定義される $\mathbf{A}$ の第1, 第2, 第3不変量である。これを非圧縮流の速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ にあてはめた場合 $v_{i,i}=0$ であるので, 第1不変量はゼロで, 速度勾配テンソルの特性はその第2及び第3不変量 II_L と III_L のみで決まる。この場合の特性方程式は

$$\lambda^3 + II_L \lambda - III_L = 0 \quad (3)$$

となり, 解は3実根, 2実根, 或いは1実根と2虚根の3つの場合に分かれる。これらの場合は次のCardano関数の値によって判別される。

$$\Delta_L = 4II_L^3 + 27III_L^2 \quad (4)$$

すなわち $\Delta_L > 0$ の場合は1実根, $\Delta_L = 0$ の場合は2実根, $\Delta_L < 0$ の場合は3実根を持つ。実根の数は不変方向の数にあたる。実根が一つの場合不変方向も一つで, 流れはこの方向を軸とする回転性である。速度がゼロである淀み点近傍では, 不変方向から集約する吸い込み流れまたは放出する吹き出し流れで, 何れも渦状点 (focus) と呼ばれる。吸い込み性か吹き出し性かは第3不変量 III_L の符号による。不変方向が3つある場合流れは, 1方向から集約し2方向に放出する場合と2方向から集約し, 1方向の放出する鞍点 (saddle) と, 3方向から集約または3方向に放出する接点 (node) の場合がある。これらの関係を Perry & Chong³⁾は図-1のように II_L - III_L 平面上で表している。

$\mathbf{L}=\nabla \mathbf{v}$ の対称成分であるひずみ速度テンソルを $\mathbf{S}$, 逆対称成分である回転テンソルを $\mathbf{W}$ とすると, その成分は

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad W_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}), \quad (5)$$

で, 第2不変量は

$$II_L = \frac{1}{2}(W_{ij}W_{ij} - S_{ij}S_{ij}) = \frac{1}{2}(W^2 - S^2) \quad (6)$$

と表せる⁷⁾。ここで S 及び W はひずみ速度テンソルおよび回転テンソル成分の2乗和の平方根でそれぞれの大きさを表す。従って $II_L > 0$ の領域は回転の卓越する流れ, $II_L < 0$ の領域はひずみの卓越する流れを表す。また p, ρ を圧力, 流体の密度とすると, 運動方程式の発散をとることにより得られる圧力の方程式は

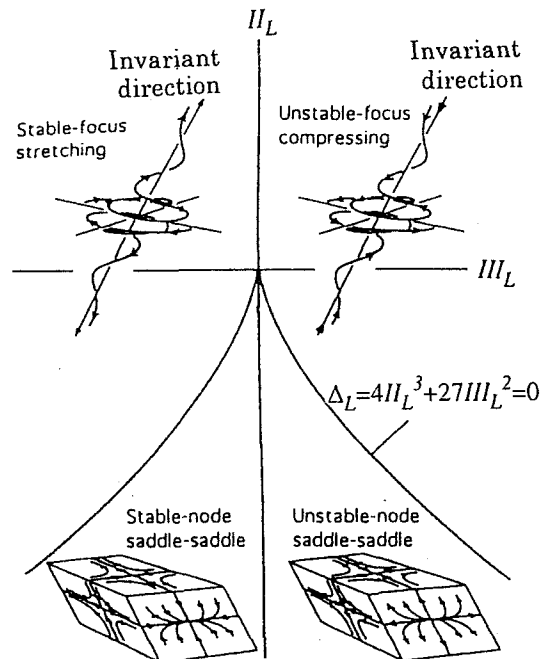


図-1 II_L - III_L 平面での流れ形態の分類 (Perry & Chong³⁾より)

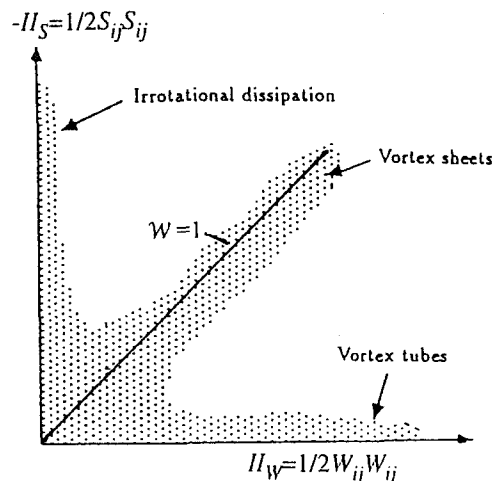


図-2 II_S - II_W 平面での流れ形態の分類 (Perry & Chong³⁾より)

$$\nabla^2 p = 2\rho II_L \quad (7)$$

となり, II_L と圧力, 特に圧力の極大値, 極小値と関係している。 II_W, II_S をテンソル $\mathbf{S}, \mathbf{W}$ の第2不変量とすると

$$II_W = \frac{1}{2}W_{ij}W_{ij}, \quad II_S = \frac{1}{2}S_{ij}S_{ij}, \quad II_L = II_W - II_S \quad (8)$$

と書ける。 II_W はenstrophy densityの定義と同一で, II_S は運動エネルギーの粘性による逸散率 $\mathcal{D}$ と

$$\mathcal{D} = 2\nu S_{ij}S_{ij} = 4\nu II_S \quad (9)$$

のような関係がある⁷⁾。ここで ν は動粘性係数である。また II_W と II_S の比

$$W = II_W/II_S \quad (10)$$

は無次元渦度数 (Vorticity number, Piquet⁷⁾) と呼ばれ渦度の程度を表す。 $W=0$ の場合非回転流で $W=\infty$ の場合

剛体回転運動もしくは一様平行流になる。Vortex sheet など強いせん断層内では $\mathbf{S}$ と $\mathbf{W}$ のゼロでない成分は等しく、 $W=1$ となる。従って Π_W/Π_S 平面上での流れ特性は図-2に示すようになる³⁾。

以上のように、不変量 Π_L , Π_L , Π_W , Π_S 及び $W=\Pi_W/\Pi_S$ の値と局所流れの形態と特性とは密接な関係がありこれらの量を調べる事は流れ特性抽出の鍵になる。

3. 取水槽内流れ

ここでは速度勾配テンソルの不変量解析を次のような取水槽内の流れに適用し、その局所流の特性との関連を調べる。図-3, 4はそれぞれ矩形水槽から鉛直向きと水平向きに置かれた円形断面の取水管により吸い込まれる流れ場を示している。取水槽へは水路などから左側の面を通して流入する。図-3の形状は河川などから冷却水などの取り入れる取水口に見られる構造で、著者ら^{8), 9)}がいくつかの場合について流れの予測計算を行ったものである。用いた計算格子は直交等間隔格子で流れ方向、横方向、鉛直方向の格子数はそれぞれ 80, 46, 38 である。これらの流れ場は通常ゆっくりした低レイノルズ数流れである。今回は層流を仮定して行った計算例を図-5に示してある。境界条件は底面及び側壁で滑りなし、水面は滑り、流入面では流入速度分布を与えている。取水管出口では自由流出条件を適用している。取水槽断面平均流入速度 V_m と水深 H を基にした Reynolds 数は 500 で、取水管直径と管内断面平均流速を基にした Reynolds 数は約 2000 である。図-5(a)は一様な流れが取水槽に流入し、水深の約 1/2 の位置に置かれた取水管口に対称で滑らかに流入する。図-5(b)は流入面に横流れがある場合で、取水槽内に旋回流や渦が発生し複雑になっている。図-5(c), 図-5(d)は取水管が水平向きの場合の計算結果である。これらの図では従来の方法で流線を示している。流線は取水槽流入面の水面近傍から発するものと路床近傍から発するものを表している。これを見ると図-5(b)と(d)の場合、水面近傍の旋回流が取水管に渦を巻きながら吸い込まれる流れになっており図-5(a),(c)の Case A, Cの流れと大きく異なっている。

取水口周辺の流れでは水面に発する渦が形成されると空気の混入が起こり、底面に発する渦が形成されると土砂吸引や洗掘などの問題が起こるので、渦発生は設計時に予測できなければならない現象である。本報ではこういった特性が速度勾配テンソルの不変量解析で如何に捉えられるかを調べる。

4. 不変量解析の結果

(1) 不変量面位相プロット

まず図-6に図-5の流れについて取水管の中心を通る

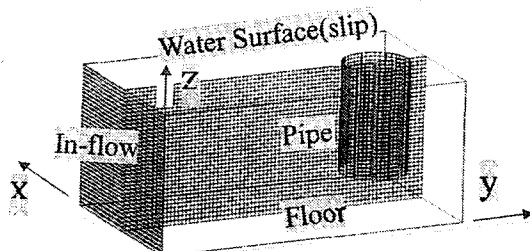


図-3 取水管が鉛直向きの場合の取水槽内流れ場

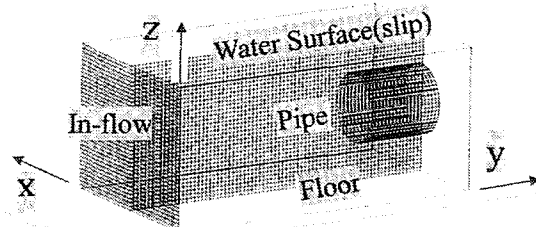
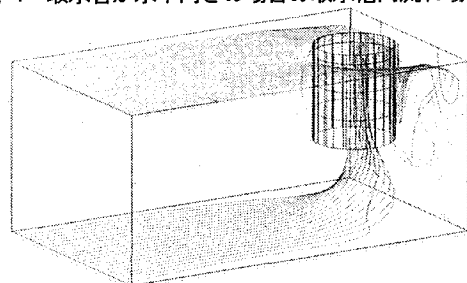
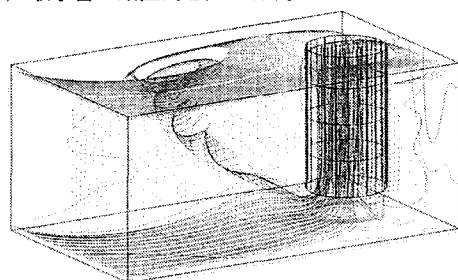


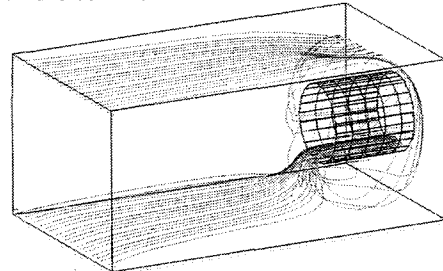
図-4 取水管が水平向きの場合の取水槽内流れ場



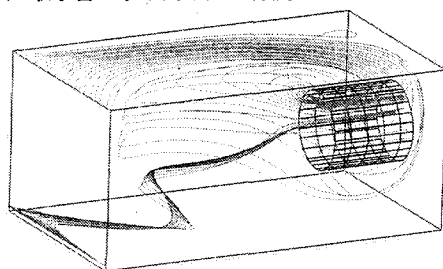
(a)Case A, 取水管が鉛直向き, 一様流入



(b)Case B, 取水管が鉛直向き, 横流れ



(c)Case C, 取水管が水平向き, 一様流入



(d)Case D, 取水管が水平向き, 横流れ

図-5 取水槽内流れの計算例

鉛直面内の幾つかの点での不変量 II_L - III_L プロットを示す。表示される点の座標は図に記入してある。図-5(a),(c)は旋回もない滑らかな対称流の場合であるが、 II_L - III_L 平面第3象限の $\Delta_L > 0$ の領域にあり、1方向のせん断卓越流ということになる。この場合の取水槽への流入速度分布は一樣であるが、底面はすべりなし面の仮定の計算であるので、鉛直方向の速度勾配が発生している。Case Bの場合、軌跡は第2象限の II_L が正の領域で回転性の強い流れを意味する。絶対値は取水管から離れるにつれ減少しているがやはり引張性の回転流を意味する。この場合流れは確かに取水管により吸引され引き伸ばされる格好になっている。Case Dの場合も II_L, III_L が共に負の値であるため1方向のせん断流になる。

このように不変量の位相プロットは局所流れのトポロジをよく表している。しかし3次元空間での分布を表すには限界がある。また流れの特性は表してもその位置が分かり難い。従って不変量の一つを3次元空間で等値面として表してみる。

(2) 不変量の等値面

図-7に第2不変量 II_L の等値面 $II_L = 8Vin2/H^2$ を流線と併せて示す。等値面の内側では $II_L H^2 / V_m^2 > 8$ である。 II_L の値が大きい領域では回転が卓越する。図-7(a)の流れの場合取水管入り口付近と内壁、それに取水槽のコーナー付近で $II_L > 8V_m^2/H^2$ となっているがその他の領域ではこれ以下で回転性の小さい流れであることを示している。図-7(b)Case Bの場合、流入面の隅角部と、流線が旋回している渦の中心に沿った部分で大きくなっているのが見て取れる。流線が旋回している中心部は取水管に近づくにつれ細くなっているが、 II_L の等値面の断面は逆に太くなっている。図-7(c)Case Cと図-7(d)Case Dでは、取水管の両側の水面から弱いが渦の生成が確認される。

以上のように II_L の値で流れ性状がよく理解出来る。流線図では渦は見られない取水管横の隅角部にも II_L の大きな値をとる領域があるが、流線をよく見直すとここでも回転性になっていることが分かる。

次に図-8、図-9は II_W および II_S の同様な等値面のプロットである。 II_W 等値面の値は $40V_m^2/H^2$ で II_S 等値面の値は $5V_m^2/H^2$ である。 II_W 等値面は II_L 等値面とよく似ているが、水面から旋回している渦の領域はやや小さい。 II_S の値の大きい部分は取水管入り口と管内壁に集中している。図では見え難いが管中心部では小さい値になっている。Case Bの場合のみ底面付近及び取水管と手前の壁の間で大きな値になっているが、これらの領域はせん断の大きい位置と一致しており、ひずみ速度の大きい領域を表している。

(3) Vorticity number の等値面

II_W および II_S の等値面のプロットは回転成分とひずみ

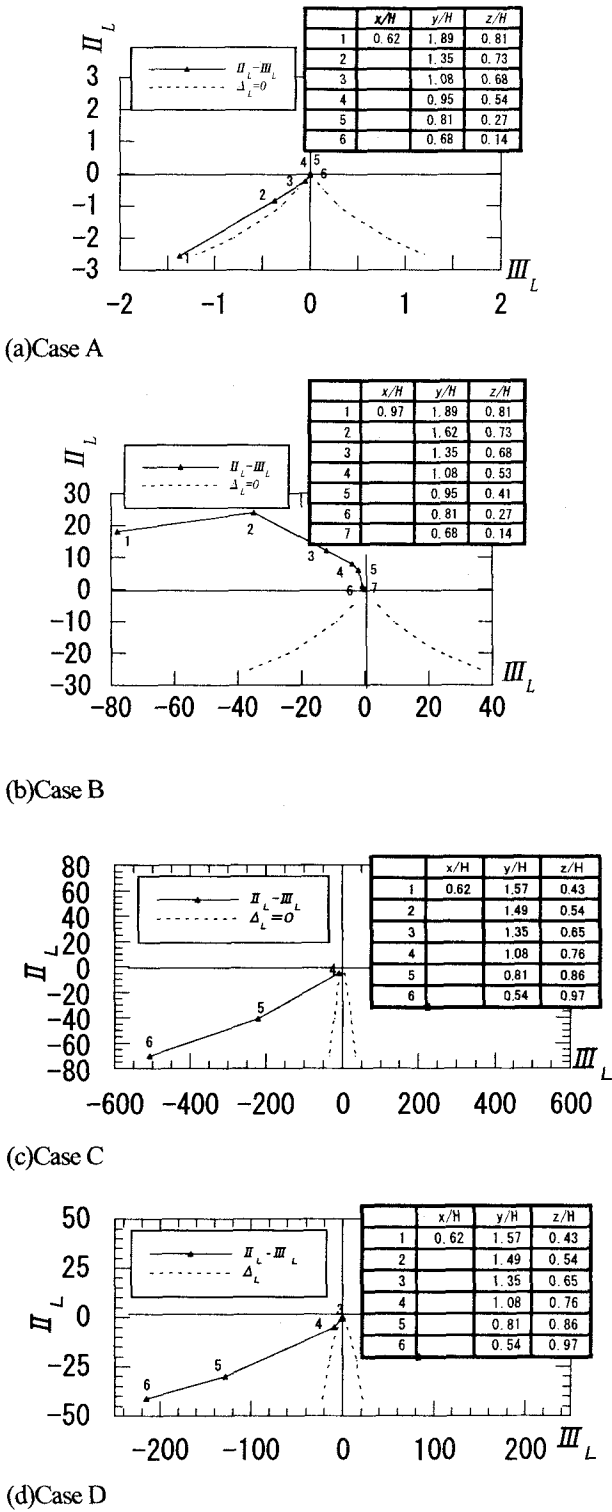
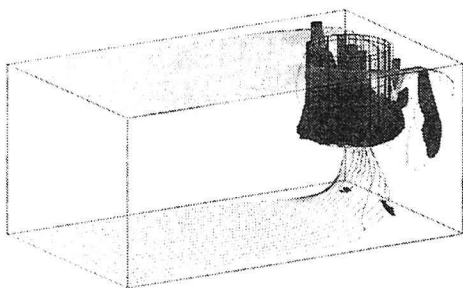
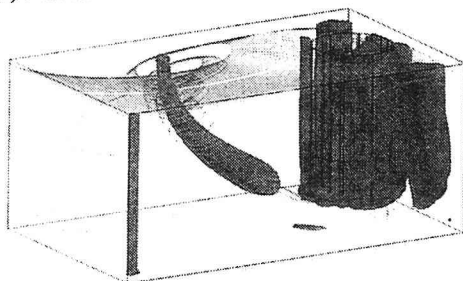


図-6 取水槽流れの不変量位相プロット

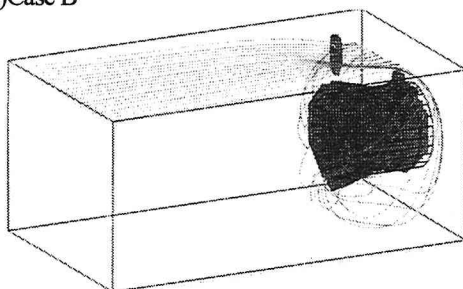
成分の絶対値を表し、ひずみの大きい取水管入り口での変形速度の大きいところ、あるいは底面で大きくなっていることが分かるが、流れ構造自体は捉えられ難いことが分かる。そこでこれらの比である Vorticity number $W = II_W/II_S = 8$ の等値面を図-10に示してある。これを見るとやはり渦発生部で W の値は大きくなっており、構造抽出



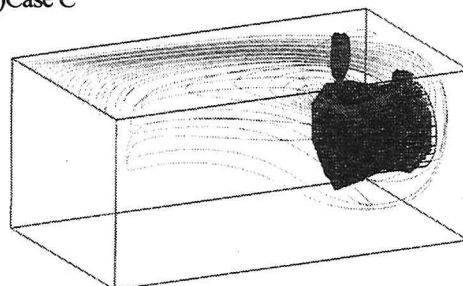
(a)Case A



(b)Case B



(c)Case C



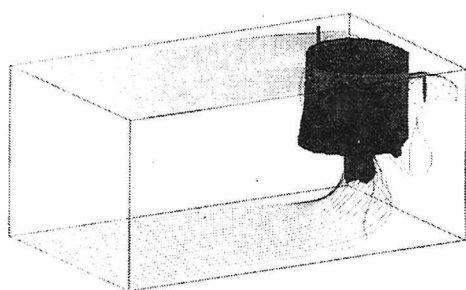
(d)Case D

図-7 第2不変量 Π_L の等値面, $\Pi_L = 8V_m^2/H^2$

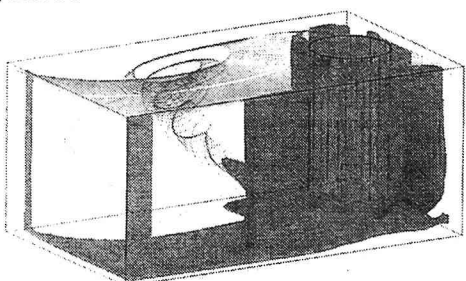
に適したパラメータであることが分かる。注目することは水面渦の中心で W の値は大きくなっているが等値面形状と渦中心部がほぼ一致していることである。

5. おわりに

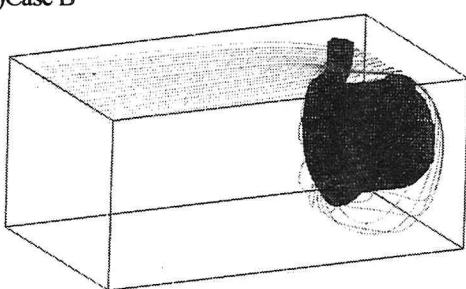
従来の流速分布や流線、圧力といった物理量を基にした流れ特性の把握法に対し、速度勾配テンソルと、ひずみ速度テンソル及び回転テンソルの主値、不変量の分布をグラフィックスを駆使して調べることで、流れのトポロジーと局所的特性の関係を明らかにした。さらにせん断流と渦流の要素を含む取水槽内流れの渦構造の抽出と把握に応用した。速度勾配テンソルの第2不変量と



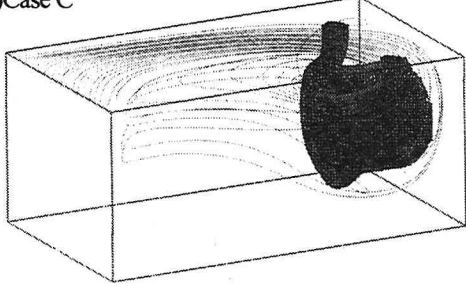
(a)Case A



(b)Case B



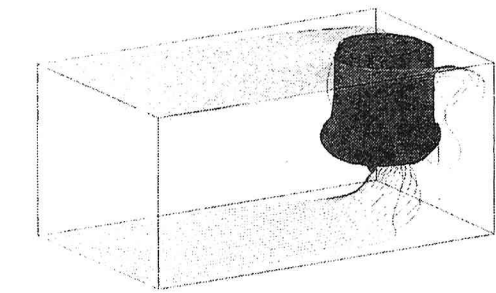
(c)Case C



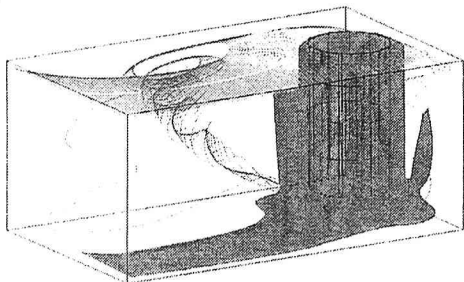
(d)Case D

図-8 第2不変量 Π_W の等値面, $\Pi_W = 40V_m^2/H^2$

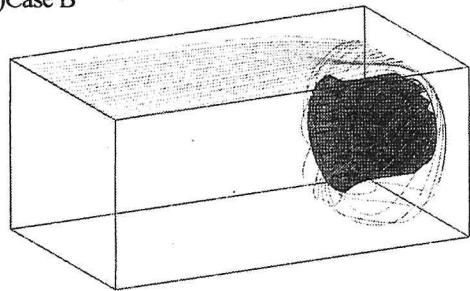
第3不変量の位相プロットは、回転性、収縮性、せん断性など流れの性状を知るのに適しているが、3次元空間での表示が困難で、渦の位置などの検出には不変量の等値面表示が有効であることが分かった。とくに渦検出には回転テンソルの第2不変量とひずみ速度テンソルの第2不変量の比である無次元渦度数のボリュームレンダリングによる空間分布の検索が有効である。条件により形態が大きく変わる取水口近傍の流れへの適用では流線の眼による検証では分かり難い構造を捉えることが分かった。本方法は取水槽の設計で渦流の検出などに応用することができる。もちろん本方法は他の高レイノルズ数乱流、多様に变化する流れの予測計算結果や実験データの解釈にも使うことが出来有益である。



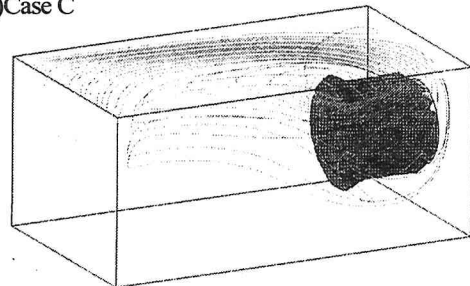
(a)Case A



(b)Case B

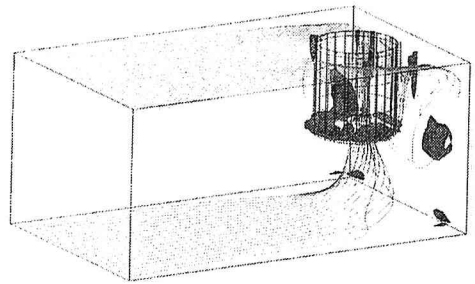


(c)Case C

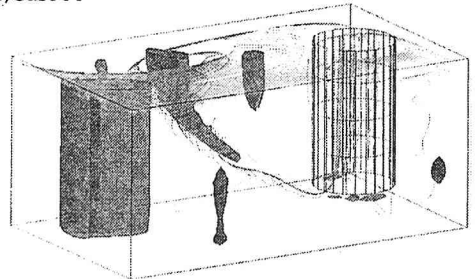


(d)Case D

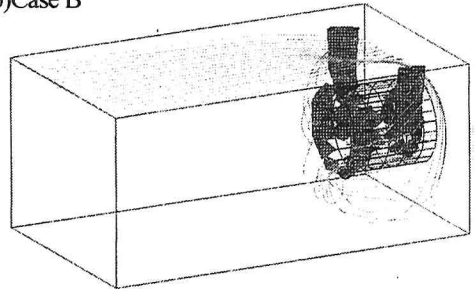
図-9 第2不変量 II_S の等値面, $II_S = 5V_m^2/H^2$



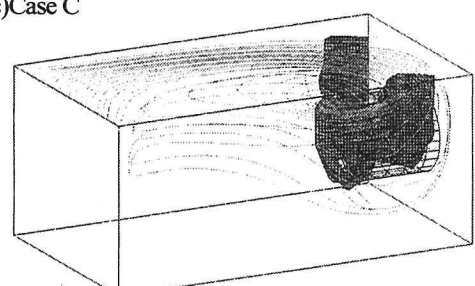
(a)Case A



(b)Case B



(c)Case C



(d)Case D

図-10 Vorticity number $W = II_W/II_S$ の等値面, $W = 8$

参考文献

- 1) 古川雅人: EFD/CFD ハイブリッド解析で複雑渦流れ現象を探る, 日本流体力学会年会 2000 講演論文集, pp.15-18, 2000.
- 2) Quick, M.C.: Efficiency of air-entraining vortex formation at water intake, Proc. ASCE J. of Hydraulics Division pp. 1403-1416, 1970.
- 3) Perry, A.E. and Chong, M.S.: A Description of Eddying Motions and Flow Patterns Using Critical-Point Concepts, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, Vol.19, pp.125-155, 1987.
- 4) Chong, M.S., Perry, A.E. and Cantwell, B.J.: A general classification of three-dimensional flow fields, *Phys. Fluids A*, Vol.2, pp.765-777, 1990.
- 5) Soria, J., Sondergaard, R., Cantwell, B.J., Chong, M.S. and Perry, A.E.: A study of the fine-scale motions of

incompressible time-developing mixing layers, *Phys. Fluids*, Vol.6, pp.871-884, 1994.

- 6) Chacin, J.M. and Cantwell, B.J.: Dynamics of a low Reynolds number turbulent boundary layer, *J. Fluid Mech.*, Vol. 404, pp.87-115, 2000.
- 7) Piquet, J.: *Turbulent Flows*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1999.
- 8) Jiao, D. and Nakayama, A.: Calculation of Three Dimensional Vortex Around a Water Intake, Proc. 8th Asian Congress of Fluid Mech., pp.447-450, 1999.
- 9) 中山昭彦・焦徳思・市成準一: 取水管周りの渦を伴う3次元流の要因とその予測計算法, 水工学論文集, 第43巻, pp.485-490, 1999.

(2000.10.2 受付)