

定常風成流の解析解とその適用範囲について

AN ANALYTICAL SOLUTION OF STEADY WIND-DRIVEN WATER CURRENTS AND ITS APPLICATION

松本治彦¹・羽田野袈裟義²
Haruhiko Matsumoto and Kesayoshi Hadano

¹正会員 工博 宇部短期大学教授 人間生活科学研究所 (〒755 山口県宇部市文京町5-40)

²正会員 工博 山口大学助教授 工学部社会建設工学科 (〒755 山口県宇部市常盤台2-16-1)

This paper presents a theoretical study of the steady wind-driven currents in a semi-enclosed rectangular basin of uniform depth. Linearised equations of motion and f-plane approximation are used. Horizontal component of wind-driven current has been obtained for a general steady wind system by means of Fourier analysis. Solution is composed of both wind drift and slope current. Calculation reproduced a flow structure similar to the existing field data.

Key Words : wind-driven current, linearised equation

1. はじめに

内湾や湖沼などの閉鎖性の強い水域では、水の交換率が悪いために、一度水質が汚濁するとそれが長期化する傾向がある。一般に水質の予測は、水域の流れの特性を知ることが不可欠である。また上記の水域の恒流は海上を吹く風によって生じる風成流（ここでは、風により直接起こされる吹送流と風の吹き寄せによって生じた海面勾配による傾斜流を加えたものを風成流と定義する）が主体となることが多い¹⁾。風成流の問題は取り扱う地形が複雑であるために、単純な問題²⁾を除くと解析的に解くことはなく、ほとんどの場合、計算機を用いた数値解法によっている。このような数値解法は任意形状の水域における種々の風条件に対する流れの3次元分布を計算することができる有力な方法である。中村ら³⁾は大村湾の風成流について3次元数値シミュレーションを行い、Ekman spiral と類似な流況を再現している。その結果は現地観測結果と比較的よく一致している。なお風速に対する風成流の遅れ時間は現地観測では3時間程度であるのに対して、数値計算では流速ベクトルで12時間程度、流速の絶対値で3時間程度となっている。数値計算に見られた流速ベクトルと流速の絶対値の遅れ時間の差異は、はたして実現象でも生じるのか疑問が残る。また、風速に対する遅れ時間が比較的小さいことから、風系の変化が穏やかな場合には風速をリアルタイムで変えた定常解析の方法も考えられる。

以上のことを考慮して、本研究では、任意の定常な風系により一様水深の矩形閉鎖水域に誘発される定常風成流を理論解析し、水平流速の3次元分布を表示する式を求めている。また、得られた解析解について渦動粘性係数の与え方を検討するとともに、解の適用範囲について考察する。

2. 基礎方程式

図-1に示すように、北緯 ϕ に位置し、 $x=0$, a , $y=0$, b を側岸線とする矩形閉塞海を設定する。この海上を長時間、定常的に風が吹き続けた場合に誘発される定常状

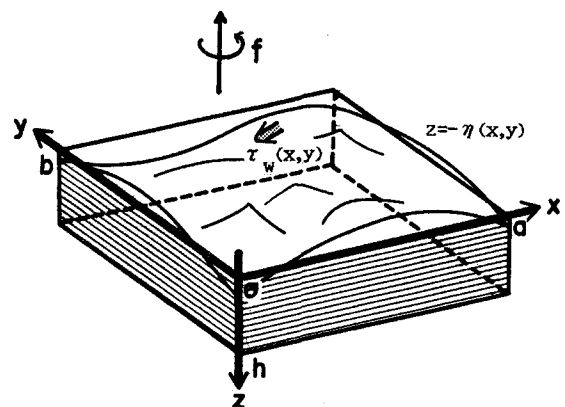


図-1 モデルの概要と座標の設定

態の海流を検討する。また、この現象は、 f -平面近似で十分な精度を持つ範囲内で起こるものとする。海水の密度 ρ は一定とし、海水の運動に関与する力として風応力、コリオリ力、重力、摩擦力を考慮する。さらに、水平流に比べて鉛直流は微小であるとして、静水圧の近似を行う。以上の仮定により線型化された運動方程式と連続の式は、次式ようになる。

$$0 = fv - g \frac{\partial \eta}{\partial x} + A_h \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + A_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1)$$

$$0 = -fu - g \frac{\partial \eta}{\partial y} + A_h \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + A_z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{z=-\eta}^{z=h} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z=-\eta}^{z=h} v dz = 0 \quad (3)$$

ここで、 u および v は流速の x および y 方向成分、 f はコリオリパラメータ、 A_h は水平渦動粘性係数、 A_z は鉛直渦動粘性係数、 g は重力加速度を表わす。境界条件として、水表面 $z = -\eta$ (x, y) を $z = 0$ と近似して

$$\left(-\rho A_z \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} = \tau_{wx}(x, y)$$

$$\left(-\rho A_z \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=0} = \tau_{wy}(x, y) \quad (4)$$

とする。ここで、 $\tau_{wx}(x, y)$ および $\tau_{wy}(x, y)$ は風応力の分布 $\vec{\tau}_w(x, y)$ の x および y 方向成分である。また、簡単のため Onishi ら⁴⁾ にならい海底面では海水はすべるとする。さらに鉛直境界壁では流速をゼロとする。

3. 解析法の概要と解析解

解析法の概要は以下の通りである。まずストークスの方法により、任意の定常風成流について風系と海面傾斜量により水平流速を表示する式を求める。次に、流量流線関数を導入してその支配方程式を所与の定常風系に対して解き、この結果を用いて海面傾斜量を求める。最後に、風系と海面傾斜量により水平流速を表示する式に、風系と海面傾斜量の結果を代入して水平流速を求める。以下順を追って説明する。

[1] ストークスの方法により任意の定常風系に対して、風系と海面傾斜量により水平流速を表示する式を求める。

海面傾斜量 $\gamma_x = -\partial \eta / \partial x$, $\gamma_y = -\partial \eta / \partial y$ と水平流速 u, v の空間分布を複素数ベクトル表示して、

$$\vec{W}(x, y, z) = u(x, y, z) + iv(x, y, z),$$

$$\vec{\gamma}(x, y) = \gamma_x(x, y) + i\gamma_y(x, y) \text{ とおくと、式}$$

(1), (2) は次のように表示される。

$$A_h \left(\frac{\partial^2 \vec{W}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{W}}{\partial y^2} \right) + A_z \frac{\partial^2 \vec{W}}{\partial z^2} - i f \vec{W} = -g \vec{\gamma} \quad (5)$$

また、風の応力分布 $\vec{\tau}_w(x, y)$ は海流と同形のフーリエ級数で展開し、上述の手順で解く。その結果のみを以下に示す。

$$\begin{aligned} \vec{W}(x, y, z) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\bar{L}_{mn}}{\rho \sqrt{A_z \bar{D}_{mn}}} \left[\left(\coth \sqrt{\frac{\bar{D}_{mn}}{A_z}} h \right) \cosh \sqrt{\frac{\bar{D}_{mn}}{A_z}} z \right. \right. \\ & \left. \left. - \sinh \sqrt{\frac{\bar{D}_{mn}}{A_z}} z \right] + \frac{g}{\bar{D}_{mn}} \bar{\Gamma}_{mn} \right\} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \end{aligned} \quad (6)$$

$$\bar{\Gamma}_{mn} = \left(\frac{4}{ab} \right) \int_0^a \int_0^b \vec{\gamma}(x, y) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y dy dx \quad (7)$$

$$\bar{L}_{mn} = \left(\frac{4}{ab} \right) \int_0^a \int_0^b \vec{\tau}_w(x, y) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y dy dx \quad (8)$$

$$\bar{D}_{mn} = A_h \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] + i f \quad (9)$$

[2] 流量流線関数を導入してその支配方程式を所与の定常風系に対して解き、この結果を用いて海面傾斜量の空間分布を求める。 x, y 方向の単位幅流量を $S_x = \int_{z=-\eta}^{z=h} u dz$, $S_y = \int_{z=-\eta}^{z=h} v dz$ (10) とおくと、連続の式(3)は次のように表わされる。

$$\frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} = 0 \quad (11)$$

式(11)より流量流線関数 Ψ を定義することができる。

$$S_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad S_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (12)$$

式(1), (2)の両辺を積分し、 $\eta/h \ll 1$ の条件を用いる

と次式が得られる.

$$0 = fS_y - gh \frac{\partial \eta}{\partial x} + A_h \left(\frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_x}{\partial y^2} \right) + \frac{\tau_{wx}(x, y)}{\rho} \quad (13)$$

$$0 = -fS_x - gh \frac{\partial \eta}{\partial y} + A_h \left(\frac{\partial^2 S_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_y}{\partial y^2} \right) + \frac{\tau_{wy}(x, y)}{\rho} \quad (14)$$

式(12), (13)および(14)より次式が得られる.

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \Psi}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{1}{\rho A_h} \left(\frac{\partial \tau_{wy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{wx}}{\partial y} \right) \quad (15)$$

これが流量流線関数の支配方程式である. ここで, $\bar{\tau}_w$ は海流と同形のフーリエ級数展開可能な形で与えることにする. さらに, 式(15)において次の条件を課す.

$$2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^2 \partial y^2} = 0 \quad (16)$$

これは積分形の運動方程式(13), (14)において, それぞれ

$$\frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 S_x}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 S_y}{\partial y^2} \ll \frac{\partial^2 S_y}{\partial x^2} \quad \text{と仮定したこ}$$

とになる. この条件設定に対する影響については, 今後の検討課題である.

また周辺境界壁では流速をゼロとしたことから, これに沿って Ψ は一定である. さらに, この境界壁では $S_x = 0, S_y = 0$ となる. これらの条件を満たす Ψ とし次式を得る.

$$\Psi(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\frac{\mu_m^4}{a^4} + \frac{\mu_n^4}{b^4}} \right) \times \left(\frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b \text{curl}_z \bar{\tau}_w(\lambda, \lambda') X_m(\lambda) Y_n(\lambda') d\lambda d\lambda' \right) \times X_m(x) Y_n(y) \quad (17)$$

$$X_m(x) = \cos \frac{\mu_m}{a} x - \cosh \frac{\mu_m}{a} x + \frac{(\sin \mu_m + \sinh \mu_m) \left(\sin \frac{\mu_m}{a} x - \sinh \frac{\mu_m}{a} x \right)}{\cos \mu_m - \cosh \mu_m} \quad (18)$$

$$Y_n(y) = \cos \frac{\mu_n}{b} y - \cosh \frac{\mu_n}{b} y + \frac{(\sin \mu_n + \sinh \mu_n) \left(\sin \frac{\mu_n}{b} y - \sinh \frac{\mu_n}{b} y \right)}{\cos \mu_n - \cosh \mu_n} \quad (19)$$

である.

ただし, μ_m, μ_n は $y = \cos x$ と $y = 1/\cosh x$ の二つの曲線交点の x 座標を示す ($m = 1, 2, 3, \dots, n = 1, 2, 3, \dots$).

この解を式(13), (14)より得られる次式に代入すると海面傾斜量が得られる.

$$-\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{gh} \left(2\Omega \sin \phi \frac{\partial \Psi}{\partial x} - A_h \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} - \frac{\tau_{wx}}{\rho} \right) \quad (20)$$

$$-\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{gh} \left(2\Omega \sin \phi \frac{\partial \Psi}{\partial y} + A_h \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} - \frac{\tau_{wy}}{\rho} \right) \quad (21)$$

なお, 風応力 $\bar{\tau}_w$ の与え方は後で示す.

[3] 風系と[2]で得た海面傾斜量を式(6)に代入して水平流速の空間分布を求める. その計算式は以下のようである.

$$\bar{W}(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \bar{P}_{mn} \left[\left(\coth \sqrt{\frac{\bar{D}_{mn}}{A_z}} h \right) \cosh \sqrt{\frac{\bar{D}_{mn}}{A_z}} z - \sinh \sqrt{\frac{\bar{D}_{mn}}{A_z}} z \right] + \frac{g}{\bar{D}_{mn}} \bar{\Gamma}_{mn} \right\} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (22)$$

ここで,

$$\bar{P}_{mn} = \frac{1}{\rho \sqrt{A_z \bar{D}_{mn}}} \times \left(\frac{1}{ab} \right) \int_0^a \int_0^b \bar{\tau}_w(x, y) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y dy dx \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{mn} = & \left(\frac{4}{abgh} \right) \times \\ & \int_0^a \int_0^b \left\{ \left(2\Omega \sin \phi \frac{\partial \Psi}{\partial x} - A_h \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} - \frac{\tau_{wx}}{\rho} \right) \right. \\ & \left. + i \left(2\Omega \sin \phi \frac{\partial \Psi}{\partial y} + A_h \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} - \frac{\tau_{wy}}{\rho} \right) \right\} \\ & \times \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y dy dx \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (24)$$

式(22)において $\bar{P}_{mn}$ のかかった項 $\bar{u}1$ は風応力の直接の作用による吹送流, そして $\bar{\Gamma}_{mn}$ のかかった項 $\bar{u}2$ は $curl_z \bar{\tau}_w$ を含む傾斜流を示す。

式中 $\bar{P}_{mn}$ と $g\bar{\Gamma}_{mn}/\bar{D}_{mn}$ は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \bar{P}_{mn} = & \frac{1}{\rho \sqrt{A_z} (A^2 + B^2)} \\ & \times \{ (AL_{mnx} + BL_{mny}) + i(AL_{mny} - BL_{mnx}) \} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{g\bar{\Gamma}_{mn}}{\bar{D}_{mn}} = & \frac{g}{C_1^2 + f^2} \\ & \times \{ (C_1 \Gamma_{mnx} + f \Gamma_{mny}) + i(C_1 \Gamma_{mny} - f \Gamma_{mnx}) \} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (26)$$

ここで,

$$C_1 = A_h \left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}, \quad f = 2\Omega \sin \phi \quad (27)$$

$$A = \sqrt{\frac{C_1 + \sqrt{C_1^2 + f^2}}{2}}, \quad B = \frac{f}{2A}$$

$$\bar{L}_{mn} = L_{mnx} + iL_{mny}, \quad \bar{\Gamma}_{mn} = \Gamma_{mnx} + i\Gamma_{mny} \quad (28)$$

である。

水面に作用する風の応力分布 $\bar{\tau}_w(x, y)$ は, 次のバルク公式⁵⁾を用いて推定する。

$$\bar{\tau}_w(x, y) = \rho_a C_f |\bar{U}_{10}| \bar{U}_{10} \quad (29)$$

ここで, ρ_a は空気の密度である。したがって風の与え方としては次のような手順をとる。

まず, 水面上 10 m の風速分布を $\bar{U}_{10}(x, y)$ の関数形で表現し, 式(29)を用いて計算する。

$$\bar{\tau}_w(x, y) = \tau_{wx}(x, y) + i\tau_{wy}(x, y) \quad (30)$$

次に,

$$\bar{\tau}_w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{L}_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (31)$$

で

$$\begin{aligned} \bar{L}_{mn} = & \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \bar{\tau}_w(x, y) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y dy dx \end{aligned} \quad (32)$$

を求めて式(6)に代入すればよい。

4. 渦動粘性係数と水平流の分布

以上で得られた解の基本的な特徴は前報⁶⁾で述べた。ここでは渦動粘性係数の与え方について検討する。鉛直渦動粘性係数 A_z について余越ら⁷⁾は, 風速, 表面流速およびせん断応力の関係より次のような推定式を与えている。

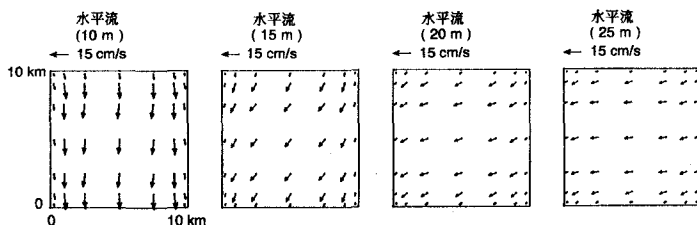
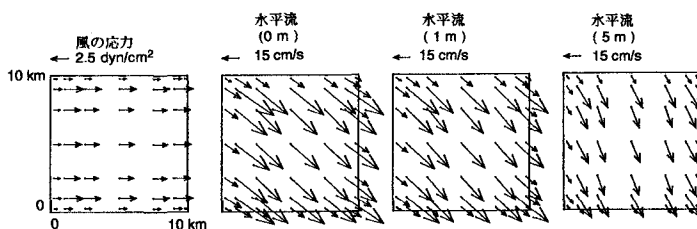
$$A_z = 0.00055 \sqrt{C_f} h U_{10} \quad (33)$$

ここで, U_{10} は水面上 10 m の風速 (m/s), h は水深 (m), C_f は水面での摩擦係数である。本モデルでは鉛直渦動粘性係数として式(33)を用いた。

次に, 水平渦動粘性係数 A_h について検討した。この係数は, 経験的に定めることが多く, 沿岸の現象では $10^4 \sim 10^6 \text{ cm}^2/\text{s}$ 程度, 海洋の大循環では $10^7 \sim 10^8 \text{ cm}^2/\text{s}$ 程度の値が使用されている。Hidaka⁸⁾は海洋の大循環に関する問題で, 海流の流速と水平渦動粘性係数 A_h はほぼ逆比例し, A_h に $10^9 \text{ cm}^2/\text{s}$ 程度を用いると実際に近い流速を与えるとしている。ここでは, この係数を詳細に検討するためにモデル海を設定し, x 方向に一樣で定常な風速 (10 m/s) の風が吹いて定常状態に達した場合の水平流速の鉛直分布を求め, A_h の適当な範囲を求めた。その結果, 水平スケールが $10 \text{ km} \times 10 \text{ km}$ のモデルでは, $5 \times 10^4 \sim 5 \times 10^5 \text{ cm}^2/\text{s}$, また水平スケールが $1000 \text{ km} \times 1000 \text{ km}$ の大規模なモデルでは, $10^8 \sim 5 \times 10^{10} \text{ cm}^2/\text{s}$ 程度の値が A_h として適当であることがわかった。

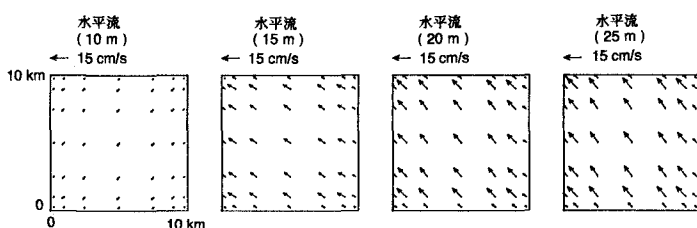
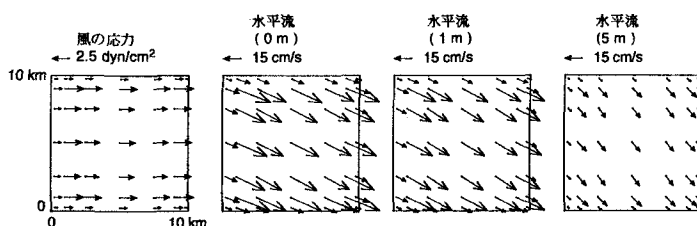
次に水平流の分布特性について検討する。解析解である式(6)をみると, 風応力の直接の作用により生じた吹送流の部分 $\bar{u}1$ と $curl_z \bar{\tau}_w$ を含んだ鉛直方向に一樣な傾斜流の部分 $\bar{u}2$ の2つに分離できる。今, 水平スケール

(a) 吹送流

 $\bar{u}1$ 

(b) 風成流

(吹送流+傾斜流)

 $\bar{u}1 + \bar{u}2$ 図—2 水平流の分布 (水深 $h = 25$ m, $A_h = 10^5$ cm²/s)

が10 km×10 km のモデル海を設定し、上記の方法で渦動粘性係数を仮定して東方向に一樣で定常な風速 (10 m/s) の風が吹いて定常状態に達した場合の水平流速の鉛直分布を計算した。水深 h は摩擦深度 D より浅い場合 (25 m) と深い場合 (100 m) の2ケースについて行った。その結果を吹送流の部分 $\bar{u}1$ と吹送流と傾斜流の合成流である風成流 ($\bar{u}1 + \bar{u}2$) に分けて図—2 (水深 25 m) と図—3 (水深 100 m) に示す。これらの図より $\bar{u}1$ と ($\bar{u}1 + \bar{u}2$) を比較すると、表面近くでは両者に大きな差はないが、深部では大きく流速分布の異なることがわかる。 $\bar{u}1$ では水深が摩擦深度より小さいと底面付近でも表面流と逆向きの流れは生じないし、水深が摩擦深度を越えてこれが生じても、それは非常に小さい。これに対して ($\bar{u}1 + \bar{u}2$) は水深の半分程度の深さで表面流とは逆向きの流れとなっており、それ以深では著しい北向き成分がでている。これは、上層で吹送流による南方

へのエクマン輸送に対して、下層で北方への体積輸送のあることを示し、風成流の鉛直循環の存在を示している。

5. 実際の風成流との比較

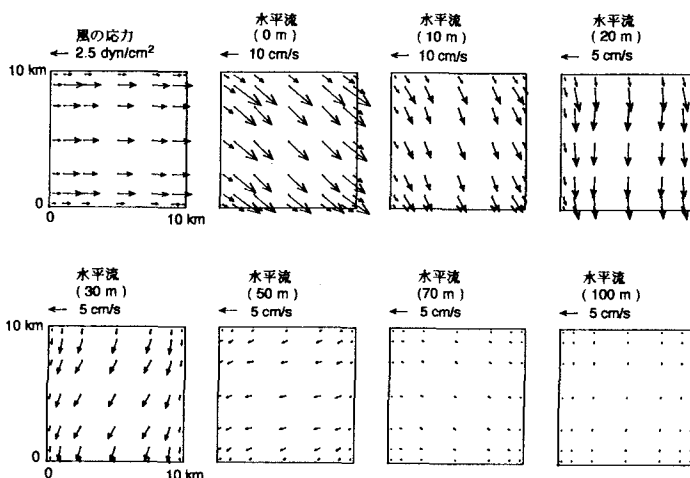
大村湾 (平均水深 18 m) において、風成流の現地観測が行われている⁹⁾。その結果によると、湾の下層部では風が吹き始めると遅れ時間が約3時間で風の方角に対して時計回りに約 240 度の流れが起こっている。前項で検討したモデル (水平スケールが10 km×10 km で水深が25 m) でこの層の流向をみると、220~260 度であり、現地観測結果と解析解がほぼ一致している。

6. 結語

解析解を求める過程で式(16)のような条件を課している。したがって、任意風系に適用するにはこの条件によ

(a) 吹送流

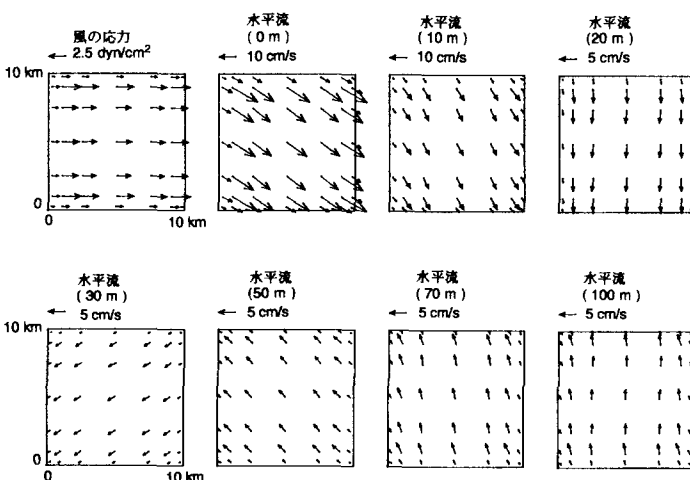
$\vec{u}_1$



(b) 風成流

(吹送流+傾斜流)

$\vec{u}_1 + \vec{u}_2$



図—3 水平流の分布 (水深 $h = 100 \text{ m}$, $A_h = 10^5 \text{ cm}^2/\text{s}$)

る影響について検討することが必要である。しかしながら、風の回転効果のない風系を与える場合には、この条件は成立しており、求めた解を実際の海域に適用可能である。特に浅い海域でも流れの鉛直循環の存在を示唆しており、数 km から数百 km 程度の水平スケールで矩形に近い内湾、内海や湖沼の風成流の基本特性を知ることにより適用できると考えられる。

謝辞：本研究に際し、東京水産大学名誉教授斎藤泰一先生、同大教授松山優治先生に様々なご教示を頂いた。また、長崎大学環境科学部中村武弘助教授には貴重な資料をご提供頂いた。記して謝意を表す。

参考文献

- 1) 宇野木早苗：内湾の物理環境、西條八束編「内湾の環境科学」、pp. 63-162, 培風館, 東京, 1984.
- 2) 長島秀樹：傾いた底を持つ水道の吹送流, 理研報告, 54, pp. 23-27, 1982.
- 3) 中村, 富樫, 飯塚, 小田, 三厨：大村湾の潮流に関する研究(3), 長崎大学工学部研究報告, 21巻, 37号, pp. 179-187, 1991.
- 4) Oonishi, Y. and Imazato, N. : Study on the currents in Lake Biwa(2)- Barotropic responses to the uniform wind of a finite duration -, J. Oceanog. Soc. Japan, 31, pp. 53-60, 1975.
- 5) 鳥羽良明：海面境界過程, 海洋科学基礎講座「海洋物理 I」, pp. 145-255, 東海大学出版, 東京, 1970.
- 6) 松本, 羽田野, 斎藤：閉鎖性水域における定常風成流の解析解について, 土木学会年講49回第2部B, pp. 700-701, 1994.
- 7) 余越, 富所：風による諏訪湖の流動特性, 土木学会論文集, 第276号, pp. 53-63, 1978.
- 8) Hidaka, K. : How faithfully will the geostrophic currents represent the existing ocean currents ?, J. Oceanog. Soc. Japan, 28, pp. 48-62, 1972.
- 9) 中村, 富樫, 福本, 三厨：大村湾における風成流に関する研究, 海岸工学論文集, 39, pp. 246-250, 1992.

(1999. 9. 30受付)