

一般座標系 Regular 格子による開水路乱流の DNS

THE PERFORMANCE OF DNS FOR OPEN CHANNEL TURBULENCE USING REGULAR GRID SYSTEM

林 俊一郎¹, 大本 照憲², 矢北 孝一³, 平川 隆一⁴

Syunichiro HAYASHI, Terunori OHMOTO, Kouichi YAKITA, Ryuichi HIRAKAWA

¹正会員 熊本県芦北土木事務所 (〒869-5461 熊本県芦北郡芦北町芦北2670)

²正会員 工博 熊本大学助教授 工学部環境システム工学科 (〒860-8555 熊本市黒髪2-39-1)

³正会員 熊本大学技官 工学部環境システム工学科 (同上)

⁴学生員 熊本大学大学院生 自然科学研究科博士前期課程 (同上)

A Direct Numerical Simulation method using a regular grid under a generalized curvilinear coordinate system is presented which can simulate flows in complex geometry. In this paper, at first a one-dimensional linear convection problem was dealt to test the accuracy and the results strongly suggested that the way of defining a grid with certain types of unequal spacing cause substantial phase errors in numerical solutions and the cause is the metric discontinuity. Next, a regular grid under a generalized coordinate system was used to analyze free surface turbulent flow with Reynolds number 150 defined by friction velocity. It was shown that this method enabled sufficiently stable calculation. In addition, a comparison with DNS of open channel flow using a staggered grid verified that this simulation gave fairly satisfactory properties with respect to higher-degree statistic values related to turbulent characteristics

key words: DNS, regular grid system, generalized curvilinear coordinate, free surface turbulence, numerical analysis

1. 序論

近年のコンピュータの目覚ましい発達、乱流現象の解明に新たな知見を与えつつある。特に直接数値シミュレーション (DNS) と呼ばれる数値解析法は、乱流モデルを一切含まない物理法則だけに基づく手法で、基礎式であるナビエ・ストークス方程式の適用範囲の広さや信頼性の高さ¹⁾と相まって大きな期待が寄せられている。しかしながら、工学的に要求される複雑境界形状の流れや高レイノルズ数流れへの適用は、依然として困難な課題となっており、その克服に向けさまざまな研究が精力的に行われている。このなかで計算格子系に関しては、従来から staggered 格子が採用されることがほとんどであったが、最近一般座標系への拡張の容易さも手伝って collocate 格子系の研究^{2)~4)}が急速に進むなど、非 staggered 格子化の動きが見られる。

一方、河川や海洋など自由水面を有する乱流場への DNS は、Lam & Banerjee⁵⁾により初めて実施されて以来、実験では容易に捕らえられない自由水面近傍の乱流構造

や物質輸送に関する重要な情報を提供し始めている^{6)~10)}。しかし、いずれもスペクトル法もしくは staggered 格子を用いた差分法によるものであり、regular 格子を用いた解析は見受けられない。

著者ら¹¹⁾は複雑境界形状の流れ場への DNS の適用を目標に、一般座標系 regular 格子を用いることで任意境界形状への適用と演算負荷量の軽減を図るとともに、高次精度の風上差分と時間的離散化法をカップリングすることで、計算精度と数値的安定性を確保した DNS を構築した。第一段階として平行平板間流れへ適用しスペクトル法との比較を行った結果、粗格子にもかかわらず乱流統計量やレイノルズ応力収支がほぼ一致するなど、その精度と有用性を検証した。

本研究では、一次元線形対流問題を例題に、一般座標系 regular 格子の適用において不等間隔格子の設定等が、解の精度確保にとって重要なことを示すとともに、一般座標系 regular 格子を用いた DNS を開水路乱流場へ適用し、その精度や有用性を定量的に検証することを目的とする。また、併せて平行平板間流れとの比較から自由水面流れの特徴を考察する。

2. 不等間隔格子の設定

(1) 格子系の概要

計算格子系は、速度・圧力点の配置により regular 格子系と staggered 格子系に分類することができる。このうち、staggered 格子系は解の数値的振動を抑えることができることから、これまで MAC 系や SIMPLE 系を問わずほとんどの流体解析の空間的離散化法として採用されてきた。しかし、多くの補間演算を必要とすることから計算量の増大化は避けられず、特に一般座標系を用いた場合には膨大な計算負荷量となるなど、格子系の選択は乱流計算のコンパクト化と密接な関係にある。一方、regular 格子系は解の空間的振動の発生が指摘¹²⁾されているものの、物理量を同一点で定義することから、特にプログラミングの上で簡便なうえ、高精度化や複雑境界問題に有効な一般座標系への変換が容易という利点を有している。懸念される数値的振動についても、不等間隔格子を採用することで除去することが可能であり¹³⁾、このことは、壁面近傍を除く変化量の緩慢な領域を粗格子とすれば、効率的なシミュレーションへの寄与も期待できる。

(2) 不等間隔格子による影響

不等間隔格子の採用は、一般に精度の低下を伴うことから、ここでは不等間隔格子が解へ及ぼす影響を、式(1)に示す一次元線形対流問題¹³⁾により検討する。

∂u/∂t + U ∂u/∂x = 0, (U = 1, -∞ < x < ∞) (1)

u(x, 0) = { 1 - cos(2x - π) / 2, (π/2 ≤ x ≤ 3π/2) ; 0, otherwise }

格子には図-1に示す、等間隔格子、滑らかでメトリック x_ξ が連続な不等間隔格子 (A)、および滑らかではあるがメトリック x_ξ に不連続点を有する不等間隔格子 (B) の3種類を用いる。なお、式(1)の厳密解は初期値が保存されることから、 x 軸の両端に周期境界条件を採用することで、 m 周回後の数値解と厳密解との比較を行う。ここで、時間進行法にはすべて3次精度 Adams-Bashforth 法を用いることにする¹⁴⁾。

図-2は、等間隔格子でのクーラン数が0.1の場合の、50周回後の波形を比較したものである。上段の(a)~(c)は対流項の差分近似に中心差分を、下段の(d)~(f)は風上差分を用いた結果である。これらの図から不等間隔格子(A)は、等間隔格子に比べ減衰誤差が僅かに大きいことが認められる。これは例えば、不等間隔におけるテイラー展開から導かれた2階微分近似の打

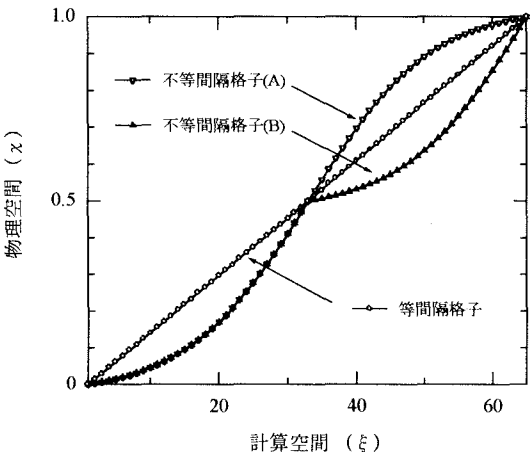
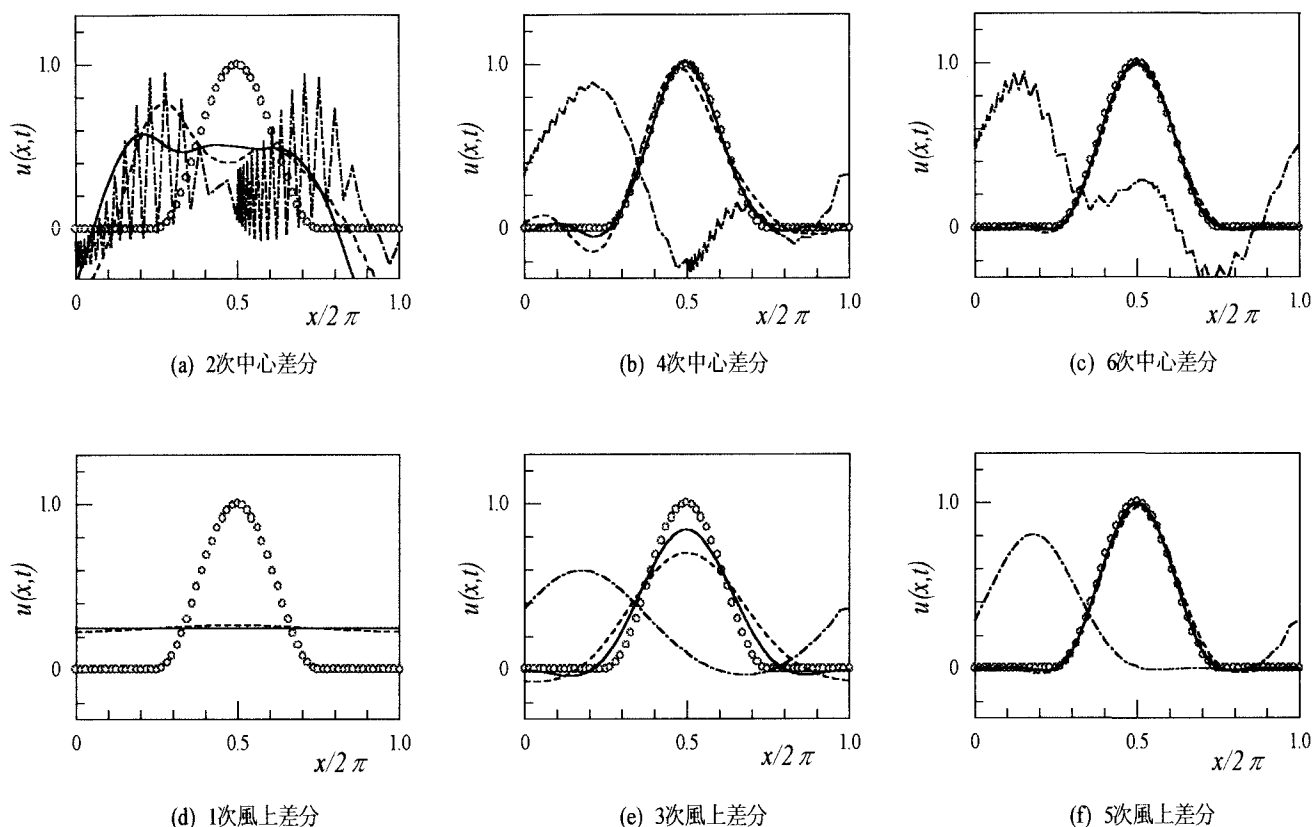


図-1 座標変換

切り誤差からも推察されるように、不等間隔格子においては格子間隔が十分滑らかに変化しなければ精度が1次低下することが原因と見られる^{14),15)}。図(c)(f)は、この精度の低下を補うためには高精度の差分近似の採用が有効であることを示唆している。これに対し、不等間隔格子(B)は全ケースにおいて減衰誤差に加えて位相誤差まで生じていることが分かる。この格子の滑らかさは不等間隔格子(A)と同じであることを考えると、位相誤差の発生にはメトリック x_ξ の不連続点の存在が関与しているものと考えられる。

次に、対流項の差分スキームの違いに関してであるが、一般に風上差分は中心差分と数値粘性の和として表現できることから、上段の中心差分(a)~(c)にそれぞれ2階、4階、6階微分型の打ち切り誤差(数値粘性)を加えた結果が下段の風上差分(d)~(f)となる。よって上下の図を比較することにより、数値粘性の影響を検討することができる。これらによれば、数値粘性には中心差分で見られた振動解を抑制する機能が認められるものの、低次の風上差分ほどその効果は大きく解そのものを歪めることが問題となる。また、実用計算で盛んに利用される3次風上差分でさえも減衰が大きく、最高の精度が要求される乱流解析には不向きであることを示唆している。一方、5次風上差分は解に与える悪影響はほとんど見受けられず、高波数成分のみを除去するハイカット・フィルターとなっていることが理解できる。なお中心差分ではたとえ高精度であっても奇数階微分型の打ち切り誤差による分散性が引きがねとなり非線形不安定が生じやすい¹⁶⁾。このため、非線形項から連続的に生成される高波数成分が原因の aliasing 誤差の除去や、物理的意味を持たない数値的振動を伴った解を抑制するためには、5次風上差分の採用が有効と判断される。

以上から、本研究で用いる一般座標系 regular 格子による解析においては、不等間隔格子が十分滑らかに変化し、かつメトリックが連続となるよう格子生成を行うとともに、対流項には5次精度の風上差分を用いるものとする。



○：厳密解， —：等間隔格子， ----：不等間隔格子(A)， - - - -：不等間隔格子(B)

図－2 格子間隔の違いによる波形比較 ($c=0.1$, $x/2\pi=50$)

3. 数値解析法

(1) 計算対象の概要

計算は、図－3に示す底面が平滑な固体壁で、上面には変形を考慮しないゼロ・フルード数近似¹⁷⁾の自由水面を有する完全発達した開水路乱流場を対象とする。なお、流下方向とスパン方向には周期境界条件を与え、側壁の効果がない流れ場とする。流れは x 軸と水平線のなす角度が θ となるよう傾斜させ、重力により流下させるものとする。このとき摩擦速度と重力の関係は式(2)により表される。

$$u_\tau = \sqrt{gh \sin \theta} \quad (2)$$

ここで、重力と静水圧がつり合った状態を基準圧力にし、摩擦速度と平均圧力勾配の関係を用いると、無次元化された重力は平均圧力勾配を -1 に設定したと等価になることから、重力による効果は x 軸方向へ平均圧力勾

配を付加することで計算に取り込むことができる。この結果、本計算におけるパラメータはレイノルズ数のみとなる。なお、staggered格子を用いたNagaosa¹⁸⁾の結果と比較するため、計算領域は、水深 h 、流下方向長さ $2\pi h$ 、スパン方向長さ πh とし、断面平均流速と水深で定義したレイノルズ数を2280とする。これは摩擦速度で定義したレイノルズ数では約150に相当することから、内部変数表示で領域を表現すれば、 $x^+ \approx 942$, $y^+ \approx 150$, $z^+ \approx 471$ となる。格子分割には $96 \times 97 \times 96$ の密格子と、 $64 \times 65 \times 64$ の粗格子の2種類を用い、風上差分で問題となる格子依存性についても確認する。格子生成には2章の検討結果を踏まえ、滑らかでかつメトリック x_ξ が連続となるよう双曲型関数(tanh関数)を用いる。図－4は粗格子の格子分割図を示したものであるが、粘性低層からバッファ層にかけての壁面乱流のダイナミズムが顕著に現れる壁面領域、および自由水面領域を解像するため両領域に十分な格子点を配置する一方、中間領域で相対的に粗い格子点を配置するなど、流れ場の特性を活した効率的なシミュレーションを図った。この結果、解像度は密格子において、概ね $\Delta x^+ \approx 9.8$, $\Delta y^+ \approx 0.1 \sim 2.8$, $\Delta z^+ \approx 4.9$ 、粗格子で $\Delta x^+ \approx 14.7$, $\Delta y^+ \approx 0.1 \sim 6.7$, $\Delta z^+ \approx 7.4$ となった。

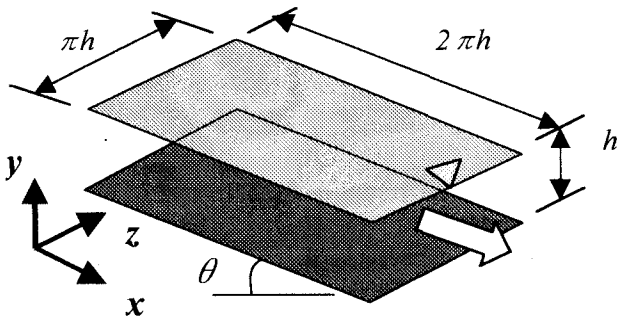


図-3 計算対象の概要

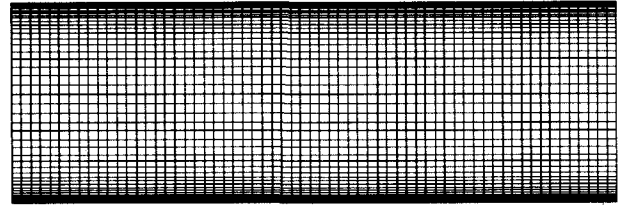


図-4 格子分割図 (x-y 断面)

(2) 計算方法

支配方程式は連続式とナビエ・ストークス方程式とし、圧力の解法には MAC 法を採用する。なお、平坦な底面上の開水路流れであるため、各座標軸は直交しているものとする。従って、変数変換は式 (3) に示す 1 次元座標変換となる。

$$x = x(\xi), \quad y = y(\eta), \quad z = z(\zeta) \quad (3)$$

上式に chain-rule を適用し、1 階微分および 2 階微分を変換面で表すとナビエ・ストークス方程式は、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{x_\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{v}{y_\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{w}{z_\zeta} \frac{\partial u}{\partial \zeta} &= -\frac{1}{x_\xi} \frac{\partial p}{\partial \xi} \\ &+ \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{x_\xi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{x_{\xi\xi}}{x_\xi^3} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{y_\eta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{y_{\eta\eta}}{y_\eta^3} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{z_\zeta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - \frac{z_{\zeta\zeta}}{z_\zeta^3} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{x_\xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{v}{y_\eta} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{w}{z_\zeta} \frac{\partial v}{\partial \zeta} &= -\frac{1}{y_\eta} \frac{\partial p}{\partial \eta} \\ &+ \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{x_\xi^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \frac{x_{\xi\xi}}{x_\xi^3} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{y_\eta^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - \frac{y_{\eta\eta}}{y_\eta^3} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{1}{z_\zeta^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} - \frac{z_{\zeta\zeta}}{z_\zeta^3} \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{u}{x_\xi} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{v}{y_\eta} \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{w}{z_\zeta} \frac{\partial w}{\partial \zeta} &= -\frac{1}{z_\zeta} \frac{\partial p}{\partial \zeta} \\ &+ \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{x_\xi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{x_{\xi\xi}}{x_\xi^3} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{1}{y_\eta^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \frac{y_{\eta\eta}}{y_\eta^3} \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{1}{z_\zeta^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} - \frac{z_{\zeta\zeta}}{z_\zeta^3} \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

同様に、連続式に対応する圧力ポアソン方程式は式 (5) のように変換される。

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_\xi^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} - \frac{x_{\xi\xi}}{x_\xi^3} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{1}{y_\eta^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} - \frac{y_{\eta\eta}}{y_\eta^3} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{1}{z_\zeta^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \zeta^2} - \frac{z_{\zeta\zeta}}{z_\zeta^3} \frac{\partial p}{\partial \zeta} &= \\ \left(\frac{1}{x_\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{y_\eta} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{1}{z_\zeta} \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) / \Delta t \end{aligned} \quad (5)$$

これらの式を基礎式として、以下に示す Fractional Step 法によるアルゴリズムによって解析を行う。この特長は、中間速度場を求める発展方程式の非線形項に陽解法の 3 次精度 Adams-Bashforth 法、線形の粘性項に陰解法の 2 次精度 Crank-Nicolson 法を用いたことで、時間的位相誤差の除去¹⁾を始め、陽解法によるコンパクト化と陰解法による収束性と数値的安定化、さらに速度と圧力の分離による解法全体の縮小化を同時に達成したことである。

$$\frac{\tilde{U} - U^n}{\Delta t} = \frac{1}{12} (23H^n - 16H^{n+1} + 5H^{n+2}) + \frac{1}{2\text{Re}} \nabla^2 (\tilde{U} + U^n) \quad (6)$$

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{\text{div } \tilde{U}}{\Delta t} \quad (7)$$

$$\frac{U^{n+1} - \tilde{U}}{\Delta t} = -\text{grad } p^{n+1} \quad (8)$$

ここで H は対流項を表し、 n は時間レベルを示すものとする。圧力ポアソン方程式は 4 次精度で離散化を行うとともに、新ステップの速度場は、圧力に対し Euler の後退スキームを適用して計算する。なお、圧力ポアソン方程式およびナビエ・ストークス方程式における Crank-Nicolson 法の反復解法には面 Gauss-Seidel 法を用いる。境界条件には、底面においてノースリップ条件、自由水面では流速 u, w にスリップ条件、 v は 0 を与えた。

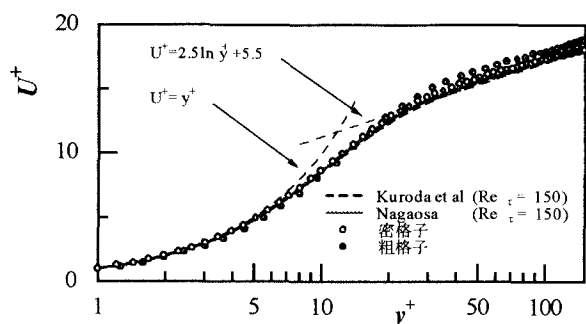


図-5 平均流速分布

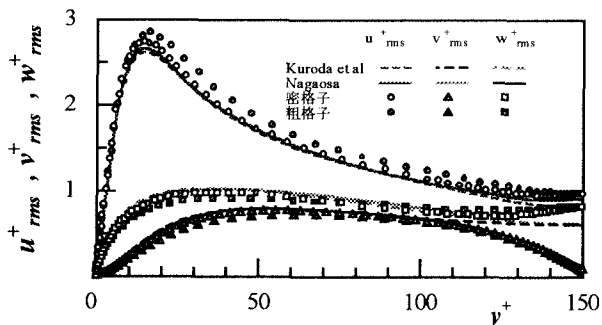


図-6 乱れ強さの分布

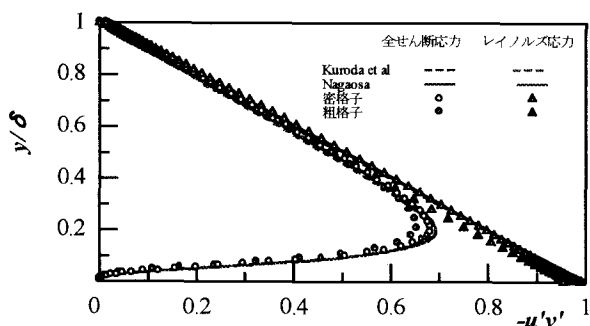


図-7 レイノルズ応力と全せん断応力の分布

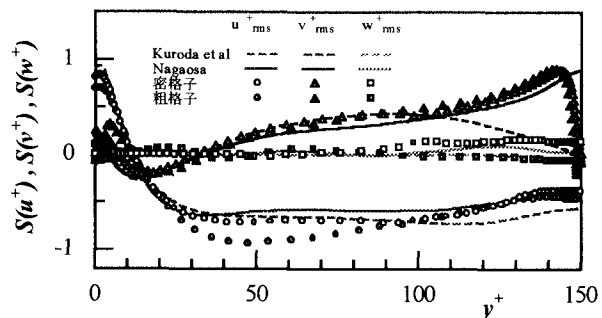


図-8 スキューネス

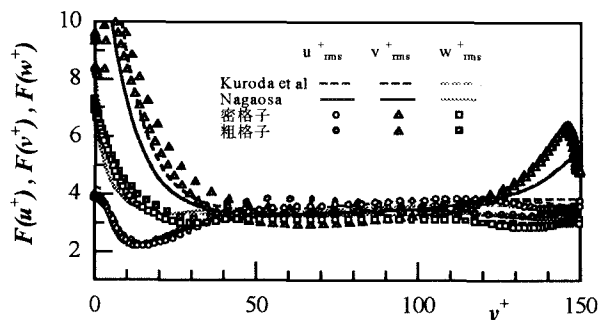


図-9 フラットネス

4. 結果と考察

自由水面流れの DNS データベースは未だ見受けられないことから、本研究の精度検証は先行する Nagaosa の結果¹⁸⁾、および平行平板間流れの代表的データベース¹⁹⁾との比較により行う。なお、統計量は 100,000 ステップ ($\Delta t = 2/1000 * \delta/u_\tau$) の時間平均から算出した。

図-5 は平均流速分布を比較したものである。本計算の結果は概ね Nagaosa 等の結果と一致しているが、密格子に比べ粗格子では対数則領域において僅かに流速が大きくなるなど格子解像度が低い場合には、数値粘性が顕著な低次の風上差分を用いた結果¹¹⁾と同様な層流化傾向を示すことが分かる。なお、開水路流れの特徴である最大流速点の降下現象は認められなかった。これはスパン方向を無限とし側壁の影響を排除したためと思われる。

図-6 は乱れ強さの分布を比較したものである。粗格子が u^+_{rms} を過大に v^+_{rms} , w^+_{rms} を過小に評価するなど、密格子と粗格子では Nagaosa からのズレに違いがあり若干ではあるが格子依存性が認められる。なお、自由水面付近では管路に比べ水深方向の挙動が抑制される一方、流下方向とスパン方向の乱れが大きくなるなど、自由水面流れの大きな特徴である再配分による乱れの非等化が確認できる。また、平行平板間流れとの比較から、管路と開水路の相違は境界層の外層に相当する自由水面領域²⁰⁾ ($0.6 < \xi < 1.0$) において顕著に生じるだけで、壁面領域では平行平板間流れと開水路による違いはなく自由水面の効果及ばないことが分かる。

図-7 はレイノルズ応力と全せん断応力の分布を比較したものである。全せん断応力の結果は、密格子・粗格子ともに直線分布上から僅かにズレているが、これは助走計算や時間平均の長さが必ずしも充分ではないことに原因があるものと思われる。なお、レイノルズ応力や全せん断応力については、管路や開水路とで違いは見られず、普遍的であることが分かる。

図-8, 9 はそれぞれ速度変動の 3 重および 4 重相関であるスキューネスとフラットネスを比較したものである。Nagaosa とは概ね同様な傾向を示すが、自由水面近傍での v 変動のスキューネスとフラットネスに違いが見られる。 v 変動のスキューネスは、Nagaosa が水面へ向け単調に増加するのに対し、本計算は $y^+ = 140$ くらいから急激に低下する。また v のフラットネスについても、本計算が $y^+ = 140$ 付近で一旦大きなピークを描いたのち低下している。なお、Nagaosa の結果は、スカラー輸送方程式を連成させたものであるため、本計算値との直接の比較は必ずしも妥当とは言い難い。いずれにしても水面近傍の乱流統計量について、今後の精密な計測実験が待たれる。

次に、平均流速分布やレイノルズ応力分布などは自由水面の影響をほとんど受けず、また乱れ強さの違いは自

由水面領域のみに限定されるなど、管路と開水路が類似するのに対し、スキューネスは中間領域から差異が認められる。これは管路には見られないボイリングとの関連もうかがわれ、今後詳細な検討が待たれる。なお、今回対象としたレイノルズ数程度であれば、水面変動やフルード数は小さく¹⁷⁾、さらにこれまでの考察からも分かるように自由水面の影響そのものが水面近傍に限定されることを勘案すると、境界条件として変形を考慮しないゼロ・フルード近似も妥当性があると考えられる。

5. 結論

本研究では、まず不等間隔格子の設定が解の精度へ与える影響を一次元線形対流問題を用い検討した。次に、一般座標系 **regular** 格子による開水路乱流の DNS を実行し、平均流特性や乱流統計量について既存結果との比較検討を行った。なお、得られた結果から以下の結論を得た。

- 1) 座標変換を用い写像する場合、メトリック x_ξ に不連続点があれば大きな位相誤差が生じた。このため、不等間隔格子の生成には、滑らかでかつメトリックの連続性を確保するなど、空間的離散化による精度低下には十分な注意を払う必要がある。
- 2) 一般座標系 **regular** 格子による計算格子点の配置であっても、適切な不等間隔格子を用いれば計算の不安定化や解の振動挙動の発生などは全く見られず安定な計算が可能であった。
- 3) 開水路乱流を対象とした検証計算からは、若干の格子依存性も認められるが概ね妥当な結果を示しており、またハンドリングの良さや計算負荷量などを考慮すれば、**regular** 格子も空間的離散化法として十分に活用が期待できる。

なお、今回構築した計算法は現在市販されているパーソナル・コンピュータで十分実行可能であり、その工学的価値は高いと考えられる。ちなみに粗格子の計算時間は、Visual Technology 社の VT-Alpha 600 を用いた場合、1 タイムステップあたり約 7 秒であった。

謝辞： 本研究で比較検討に用いた自由水面乱流の DNS データは、工業技術院資源環境技術総合研究所 永翁龍一氏から提供を受けたものである。本研究での使用に快諾を頂き厚くお礼申し上げる。

参考文献

- 1) 巽友正：ナビエ・ストークス方程式と乱流，第 44 回応用力学連合会議講演予稿集，pp.7-11，1995。

- 2) 佐竹信一，笠木伸英：コロケーション **grid** を用いたチャンネル乱流のダイレクトシミュレーション，第 8 回数値流体力学シンポジウム講演論文集，pp.321-324，1994。
- 3) 梶島岳夫，太田貴士，岡崎和彦，三宅裕：コロケート格子による非圧縮流れの高次差分解析，日本機械学会論文集（B 編），63 巻 614 号，pp.3247-3254，1997。
- 4) 森西洋平：コロケート格子系差分の運動エネルギー保存特性の改善方法，日本機械学会論文集（B 編），65 巻 630 号，pp.505-512，1999。
- 5) Lam, K. and Banerjee, S. : On the condition of streak formation in a bounded turbulent flow, *Phys. Fluids*, pp.306-320, 1992.
- 6) Komori, S., Nagaosa, R., Murakami, Y., Chiba, S., Ishii, K. and Kuwahara, K. : Direct numerical simulation of three-dimensional open-channel flow with zero-shear gas-liquid interface, *Phys. Fluids*, pp.115-125, 1993.
- 7) Hundler, R.A., Swean, T.F., Jr., Leighton, R.I., and Swearingen, J.D. : Length scale and the energy balance for turbulence near a free surface, *AIAA*, pp.1998-2007, 1993.
- 8) 永翁龍一，斉藤隆之：十分に発達した安定成層開水路乱流場の構造，日本機械学会論文集（B 編），63 巻 608 号，pp.1170-1176，1997。
- 9) 永翁龍一，斉藤隆之：十分に発達した自由表面乱流場に出現する組織構造と熱・物質輸送機構との関連性，日本機械学会論文集（B 編），64 巻 620 号，pp.1025-1032，1998。
- 10) 橘津家久，山本義暢：DNS を用いた開水路キャビティ流れの生成機構とその輸送過程の解析，水工学論文集，第 43 巻，pp.377-382，1999。
- 11) 林俊一郎，大本照憲，矢北孝一，平川隆一：風上差分スキームを用いた直接数値シミュレーションの基礎的研究，応用力学論文集，Vol.2，pp.599-608，1999。
- 12) パタンカー，S.V.（水谷幸夫，香月正司共訳）：コンピュータによる熱移動と流れの数値解析，森北出版，1985。
- 13) 梶島岳夫：非圧縮流れのための上流補間法，日本機械学会論文集（B 編）60 巻 578 号，pp.3319-3326，1994。
- 14) 流れの数値シミュレーション，日本機械学会，コロナ社，1988。
- 15) 藤井孝蔵：流体力学の数値計算法，東京大学出版会，1994。
- 16) 例えば，風工学のための流れの数値シミュレーション法入門，土木学会，1992。
- 17) 大宮司久明，三宅裕，吉澤徹 編：乱流の数値流体力学—モデルと計算法，東京大学出版会，1998。
- 18) Ryuichi Nagaosa : Direct numerical simulation of vortex structures and turbulent scalar transfer across a free surface in a fully developed turbulence, *Phys. Fluids*, pp.1581-1595, 1999.
- 19) 笠木伸英：直接数値シミュレーションによる乱流輸送現象のデータベース構築に関する研究，平成 3 年科学研究費補助金（総合研究 A）研究成果報告書，1992。
- 20) Ichisa Nezu and Hiroji Nakagawa. : Turbulence in Open-Channel Flows, *IAHR-Monograph*, Balkema, 1993.

（1999 年 9 月 30 日受付）