

SPS乱流モデルの導入による新しい粒子法の展開

LAGRANGIAN FLOW SIMULATION
WITH SUB-PARTICLE-SCALE TURBULENCE MODEL後藤仁志¹・酒井哲郎²・芝原知樹³

Hitoshi GOTOH, Tetsuo SAKAI and Tomoki SHIBAHARA

¹正会員 工博 京都大学助教授 工学研究科土木工学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)²フェロー 工博 京都大学教授 工学研究科土木工学専攻 (同上)³学生会員 京都大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (同上)

A Lagrangian solver of the Navier-Stokes equation, or the MPS method, is extended by installing the sub-particle-scale (SPS) turbulence model. The momentum equation for the particle-scale (PS) flow is derived through the filtering operation of the Navier-Stokes equation. The effect of the SPS turbulence is found as the Reynolds stress terms in the PS momentum equation. The Reynolds stress terms are described by introducing the Smagorinsky model, which is frequently used in Eulerian LES. The MPS method has the advantage in the calculation of the free-surface flow against the Eulerian one, because it is free from the numerical diffusion due to the discretization of advection terms. While, in this paper, the MPS method with the SPS turbulence model is applied to the turbulent mixing layer, or the jet, to show its performance on the simulation of the turbulent flow with a simple structure. The mean velocity profile is compared with the previous experiments. The unsteady behavior of the jet and the mixing process at the interface of the jet and the still water are displayed as the snapshots of the particle motion.

Key Words: Particle method, MPS method, Gridless Analysis, Sub-Particle Scale Turbulence, Smagorinsky model.

1. 緒言

流れの数値解析の発展は目覚ましく，最近では，高次の乱流モデルやLESがかなり複雑な境界条件の流れに対しても適用されることも少なくない．その一方で，乱流の数値解析は高精度の乱流計測とともに発展してきたため，LDVでの計測自体が困難な水塊の分裂・合体や飛沫の発生，気泡混入などが生じるような激しい急変流に関しては，数値モデルの適用もそれほど盛んではなかった．

波動（特に碎波）の数値シミュレーションの分野では，ここ数年，VOF法による自由表面流の数値解析が急速に活発化しつつある．流れの数値解析で頻用されるEuler型の固定計算格子を用いる基礎式の離散化手法では，移流項に起因する数値拡散が不可避であり，これを回避するには高次の差分スキームが必要となって離散化方程式が複雑化する．また自由

表面流を扱うには水面追跡が必要となるが，MAC法やその改良型であるVOF法では，何れもLagrangeのコンセプトで水面追跡を行い，水面の位置情報を得て，空間に固定された計算格子上で基礎式を離散化する．Euler型の手法で自由表面流の取り扱いが困難な理由は，固定計算格子の存在にあるから，基礎式の離散化自体を格子に依存せずに行うLagrange型の解析への発想の転換が，問題の解決の切り札の一つとして浮上する．

流体計算手法としてのLagrange的解析法は，粒子法と呼ばれている．粒子法には幾つかの手法があるが，計算の安定性と種々の条件での適用性の面から，Koshizukaら¹⁾のMPS法(moving particle semi-implicit method)は現時点で最も有望である．著者らは，自由表面流の解析における粒子法の有効性に注目し，MPS法の水工学上の諸問題への適用を試みているが^{2, 3, 4)}，端緒について間もなく，検討すべき

課題や開発すべきサブモデルも多く残されている。

本稿ではそれらの課題の一つであるSPS(Sub-Particle-Scale)乱流モデルを粒子法に導入し、粒子スケール以下の乱流場の影響を反映した粒子法の展開を図る。Koshizuka らの MPS 法は、Navier-Stokes式の数値解法を対象に開発された手法で、粒子スケール以下の乱流構造を表現するサブモデルが含まれない。さらに、粒子法では均一粒径粒子の集合体として流体を表現するので、計算機の能力的制約からKolmogorovスケール以下に粒子径を設定するのは非現実的で、DNS的な利用は現状では難しい。そこで本稿では、Sub-Particle-Scaleの乱流モデルを導入し、Euler型のGrid-Scaleに相当する基礎式を対象としたLES型の数値解析が可能のように粒子法を拡張し、2次元自由噴流場を対象に、モデルの基本的特性を検証する。

なお、先述のように、粒子法が本来の有効性を最も発揮するのは自由表面流においてであるが、本稿ではSPS乱流モデルの検証に重点を置き、自由噴流を適用対象とした。著者らの前報でも明らかなように、粒子法の自由表面の記述は至って簡単であり、自由表面の影響を除去した条件下での乱流モデルの有効性が検証されれば、同種のモデルを自由表面流に適用することは容易である。

2. 数値モデルの概要

(1) MPS法の概要

MPS法によるNavier-Stokes 式の解法に関しては、越塚⁵⁾に詳しく示されているので、ここでは、概要のみを示す。MPS法では、計算領域に多数の粒子を配置し、個々の粒子の周囲に設定した影響域内での粒子間相互作用として基礎式を離散化する。

質量保存 (連続式)

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

は、均一で質量が変化しない粒子の総数を一定に保つことで、厳密に満足される。さらに、非圧縮条件は、粒子数密度 (単位体積あたりの粒子数) を一定値 n_0 に保つことにより満足される。

一方、運動方程式 (Navier-Stokes 式)

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \\ \left[\text{or } \frac{Du_l}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_l} + \nu \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_m^2} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

については、移流項、圧力項、粘性項の各々について、粒子周囲の影響域内の他の粒子との相互作用として離散化する。ここに、 $\mathbf{u}$: 流速ベクトル、 p : 圧力、 ρ :

流体の密度、 ν : 動粘性係数である。移流項は粒子移動の追跡を通じて計算されたため、複雑な手続きなしに移流項の差分化に起因する数値拡散の問題を回避できることが、MPS法の利点である。

粒子 i の圧力項および粘性項は、

$$-\frac{1}{\rho} \langle \nabla p \rangle_i = -\frac{1}{\rho} \frac{D_0}{n_0} \sum_{j \neq i} \left\{ \frac{p_j - p_i}{|\mathbf{r}_{ij}|^2} \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{w}(|\mathbf{r}_{ij}|) \right\} \quad (3)$$

$$\nu \langle \nabla^2 \mathbf{u} \rangle_i = \frac{2\nu D_0}{n_0 \lambda} \sum_{j \neq i} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) w(|\mathbf{r}_{ij}|) \quad (4)$$

$$\lambda = \sum_{j \neq i} w(|\mathbf{r}_{ij}|) |\mathbf{r}_{ij}|^2 / \sum_{j \neq i} w(|\mathbf{r}_{ij}|) \quad (5)$$

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i \quad (6)$$

のように近傍に存在する粒子との相互作用としてモデル化される (D_0 : 次元数; $\mathbf{r}$: 粒子の位置ベクトル)。相互作用を伴う影響範囲は重み関数

$$w(r) = \begin{cases} \frac{r_e}{r} - 1 & \text{for } r \leq r_e \\ 0 & \text{for } r > r_e \end{cases} \quad (7)$$

(Koshizuka and Oka⁶⁾) により、当該粒子を中心とする半径 r_e の円周内部に限定される。また、粒子数密度は重み関数を用いて、

$$\langle n \rangle_i = \sum_{j \neq i} w(|\mathbf{r}_{ij}|) \quad (8)$$

と定義される。

時間積分過程には2段階法が用いられ、第1段階は、粘性項を与えて粒子の速度 (流速) を計算し、粒子の仮位置および仮の数密度 n_k^* を算定する陽的なプロセスである。第1段階で更新された場では、質量保存 (粒子数密度が一定値 n_0 に一致すること) が満足されていないから、第2段階では圧力項と数密度で記述された質量保存則から誘導される圧力に関する Poisson 方程式

$$\nabla^2 p_{k+1} = \frac{\rho}{(\Delta t)^2} \frac{n_k^* - n_0}{n_0} \quad (9)$$

を陰的に解いて圧力場を更新し (式中の Δt は計算時間間隔、添字 k は計算ステップ)、流速の修正量を求めて流速場および粒子の位置を修正する。

(2) SPS乱流モデルの導入

本稿では、粒子スケール以下の乱流の効果 (Sub-Particle-Scale Turbulence) を、Euler型のLESでSGS乱流について一般に用いられる方法⁷⁾を援用して表現す

る。LESと同様のフィルタリング操作

$$u_l = \bar{u}_l + u'_l \quad (10)$$

を施し, Leonard項とCross項を無視すると, 粒子スケール (PS) の流れの基礎式 (運動方程式) は以下のように書ける。

$$\frac{D\bar{u}_l}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_l} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_l}{\partial x_m^2} - \frac{\partial (\bar{u}'_l u'_m)}{\partial x_m} \quad (11)$$

式(2)と比較して明らかなように, Reynolds応力項が新たなる付加項として出現する。そこで, 渦粘性係数モデルで Reynolds 応力項を記述すると

$$-\bar{u}'_l u'_m = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_m} + \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_l} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{lm} \quad (12)$$

となる (k : 乱れエネルギー)。渦粘性係数 ν_t およびエネルギー散逸率 ε に関するは次元解析的表現

$$\nu_t = C_\nu k^{1/2} \Delta \quad (13)$$

$$\varepsilon = \frac{C_\varepsilon k^{3/2}}{\Delta} \quad (14)$$

(Δ ; 粗視化スケール ($=d_0$: 粒子径), C_ν, C_ε : モデル定数) と粒子スケール以下の小領域での局所平衡性の仮定

$$-\bar{u}'_l u'_m \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_m} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_m} + \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_l} \right) \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_m} = \varepsilon \quad (15)$$

から, 渦粘性係数は

$$\nu_t = (C_s \Delta)^2 \left\{ \left(\frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_m} + \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_l} \right) \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_m} \right\}^{1/2} \quad (16)$$

となり, 基礎式が完結する⁸⁾ (C_s : Smagorinsky定数)。

(3) 平面2次元場でのSPS乱流モデル

本稿では, 平面2次元場の自由噴流を対象とするが, PSの基礎式を見れば明かなように, Reynolds応力項さえ付加項として考慮すれば, PSの流速・圧力について先述のMPS法の手続きが適用できる。より具体的には, 付加項 (Reynolds 応力項)

$$F_{spxx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(2\nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{2}{3} k \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right\} \quad (17)$$

$$F_{spyy} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\nu_t \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \frac{2}{3} k \right) \quad (18)$$

(u, v : x, y 方向の流速成分) を従来のMPSのフレームワークに追加すればよい。また, 渦粘性係数および乱れエネルギーは, エネルギー生成項 P_r を用いて,

$$\nu_t = (C_s \Delta)^2 P_r^{1/2} \quad (19)$$

$$k = \frac{C_v}{C_\varepsilon} \Delta^2 P_r \quad (20)$$

$$P_r = 2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 \quad (21)$$

と表現できる。Reynolds応力項は2段階計算の第1段階で陽的に処理し, 式中の偏微分項の計算は, MPSモデルの勾配の定義に習い,

$$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x_l} \right\rangle_i = \frac{D_0}{n_0} \sum_{j \neq i} \left\{ \frac{\phi_j - \phi_i}{x_{ij} - x_{ii}} \cdot w(|\mathbf{r}_{ij}|) \right\} \quad (22)$$

のように定義する。なお, モデル定数に関しては, 式(13), (19) および (20) より,

$$C_s^2 = C_\nu^{3/2} C_\varepsilon^{-1/2} \quad (23)$$

の関係が成立し, $C_\varepsilon=1.0$ として, 乱流混合層に対する Smagorinsky定数の標準値 $C_s=0.15$ を用いると, $C_\nu=0.08$

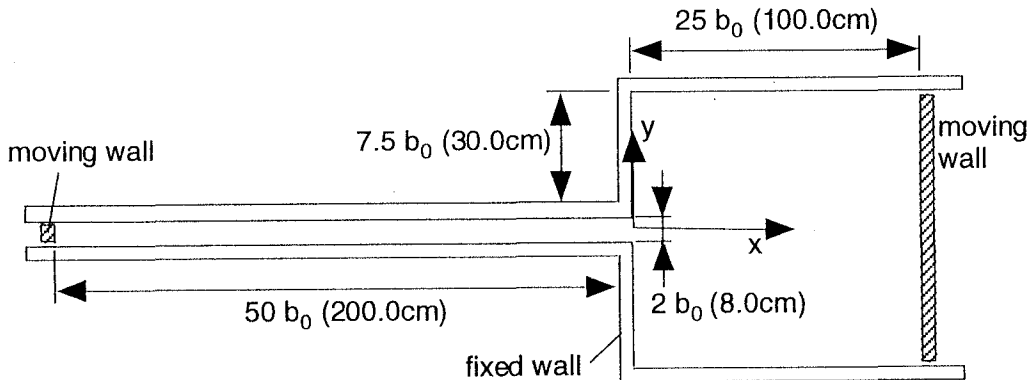


図-1 計算領域

となる。また、重み関数の有効半径 r_e については、勾配について $r_e=2.1d_0$ 、Laplacian について $r_e=3.1d_0$ 、偏微分について $r_e=3.1d_0$ とした。

3. MPS法による自由噴流のシミュレーション

(1) 計算領域と計算条件

本稿では、図-1に示す2次元自由噴流場を対象に計算を行った。細管内および水槽内の両端に移動壁を設け、左右両端で流量の連続性を保持されるように両移動壁を移動させた。なお、細管内の移動壁の急激な移動は、粒子の過大な密集を誘発して計算の不安定に繋がるので、計算開始時の静止状態から所与の噴出速度に対応した移動壁速度に達するまで徐々に加速する方法を採った。また、長時間の計算を行うには、初期の細管内の粒子数を増加させる必要があるが、これには細管長を長くする必要がある。細管長が一定以上長くなった状態で、管の端部の移動壁だけで管内粒子を駆動させようとする、移動壁から離れた粒子の慣性が効いて、前述と同様の粒子の過度の密集が細管内で発生し、数値的不安定を生じる。そこで、端部の移動壁とは別に、細管内に加速区間を設定し、その区間内では粒子の速度を強制的に与えて細管内流体を加速し、所定の噴出速度が得られるようにした。また、水槽内の壁粒子には流速ゼロを与えた (non-slip条件)。

計算に用いた全粒子数は、11584、内訳は細管内が1600、水槽内が6800、他が壁粒子である。粒子径は $d_0=1.0\text{cm}$ である。水槽は、幅 100.0cm 、高さ 68.0cm であり、噴出口の高さは、 $2b_0=8.0\text{cm}$ となっている。噴出速度は、 $U_0=20.0\text{cm/s}$ であり、Reynolds数 $Re(=U_0b_0/\nu)=8000$ の計算条件となっている。先に述べた細管内移動壁は計算開始時点から 0.5s 間加速されて速度 U_0 の定常運動に入る。計算時間は物理時間で 8.5s であり、DEC alpha CPU533MHzで約60時間の演算を要した。

(2) 流速場の非定常特性

図-2は、粒子のスナップショットおよび流速ベクトルに関する時間変化を示している。なお、スナップショットでは、初期に細管内に存在する粒子と水槽内に存在する粒子を区別して表示し、混合の進行過程を可視化することとした。初期状態 $t=0.0\text{s}$ は細管内移動壁の移動開始時刻に相当し、全粒子は静止している。噴出初期の時刻 $t=1.0\text{s}$ には中心軸に対してほぼ対象な流速場が見られ、初期に細管内にあった粒子の拡散範囲もほぼ対称になっている。次に、時刻 $t=4.0\text{s}$ には、 $t=1.0\text{s}$ に中心軸に対する対称性を示していた流速場が非対称性を示すようになる。これは、従来の実験的研究 (室田・中辻⁹⁾) により

報告されているフラッピング現象を誘発する大規模渦の出現に相当するものと判断できる。スナップショットにも、大規模渦の存在を示す主流の蛇行現象が示されており、初期の細管内粒子が主流と直交する方向 (図中の上下方向) に効率的に拡散していく様子が理解できる。さらに、時間が進行した時刻 $t=8.5\text{s}$ には、 $t=4.0\text{s}$ と比較して渦運動がより明確になり、より大規模化している。大規模渦は、噴出口からの距離 $x/b_0=2.0$ 付近から発達し始め、図面の上下のせん断層で交互に発生している。渦の規模は噴出口から離れるにつれて大きくなり、混合の促進に寄与している。時刻 $t=8.5\text{s}$ のスナップショットに見られる初期細管内粒子と水槽内粒子の混合状態は、このような大規模渦の役割をよく物語っている。

(3) 発達時の流速場

図-3は、流れが完全発達状態に達したと判断できる時刻 $t=7.5\text{--}8.5\text{s}$ 間 (計算の打ち切り時刻の手前1秒間) に噴出口からの距離 $x/b_0=2.5, 5.0, 10.0, 15.0, 20.0$ の5箇所で行ったEuler型のサンプリングによる平均流速分布を示している。今回の計算では、サンプリング時間が 1.0s と短く設定されていることもあり、比較的噴出口に近い断面で大規模渦の逆流域がとらえられて、負の平均流速が表示されているが、噴出口から離れるにつれて速度分布が平坦化していく状況は、既往の計測事実 (例えばRajaratnam¹⁰⁾) と一致している。また、いわゆるポテンシャルコアは、断面 $x/b_0=5.0, 10.0$ の間で消滅しており、これも既往の実験とほぼ良好な対応となっている。

計算機の記憶容量等のハードウェア的制約から、これ以上の計算領域拡大ができず、水槽の容量をこれ以上大きくとることが困難なため、下流端の条件の影響を受けない範囲で計算を継続できる時間に限度がある。ハードウェアの面やコードの効率化などソフトウェア面での対応を進めることにより、より長時間で広領域の計算が可能となれば、大規模渦を複数個含む長時間のサンプリングと平均化が可能となる。

図-4は、SPSの乱れ成分の分布を表示したもので、流速分布と同様の時刻に同様の5箇所で行ったEuler型のサンプリングにより表示している。噴出口付近の混合層では、上下方向に薄い領域で大きな速度差が生じるため、SPSの乱れの生成が活発で、混合層に対応した地点に顕著なピークが出現する。この傾向は、噴出口からの距離が増加するにつれて不明瞭化し、SPSの乱れのピークも低減して、広範囲で低レベルのSPSの乱れが計算されている。このように、SPSの乱れ場は、大規模渦の運動と関連した特性を示しており、Euler型のLESで頻用されるSGS乱れのモデル化と同種の枠組みが、粒子法でも有効に機能して

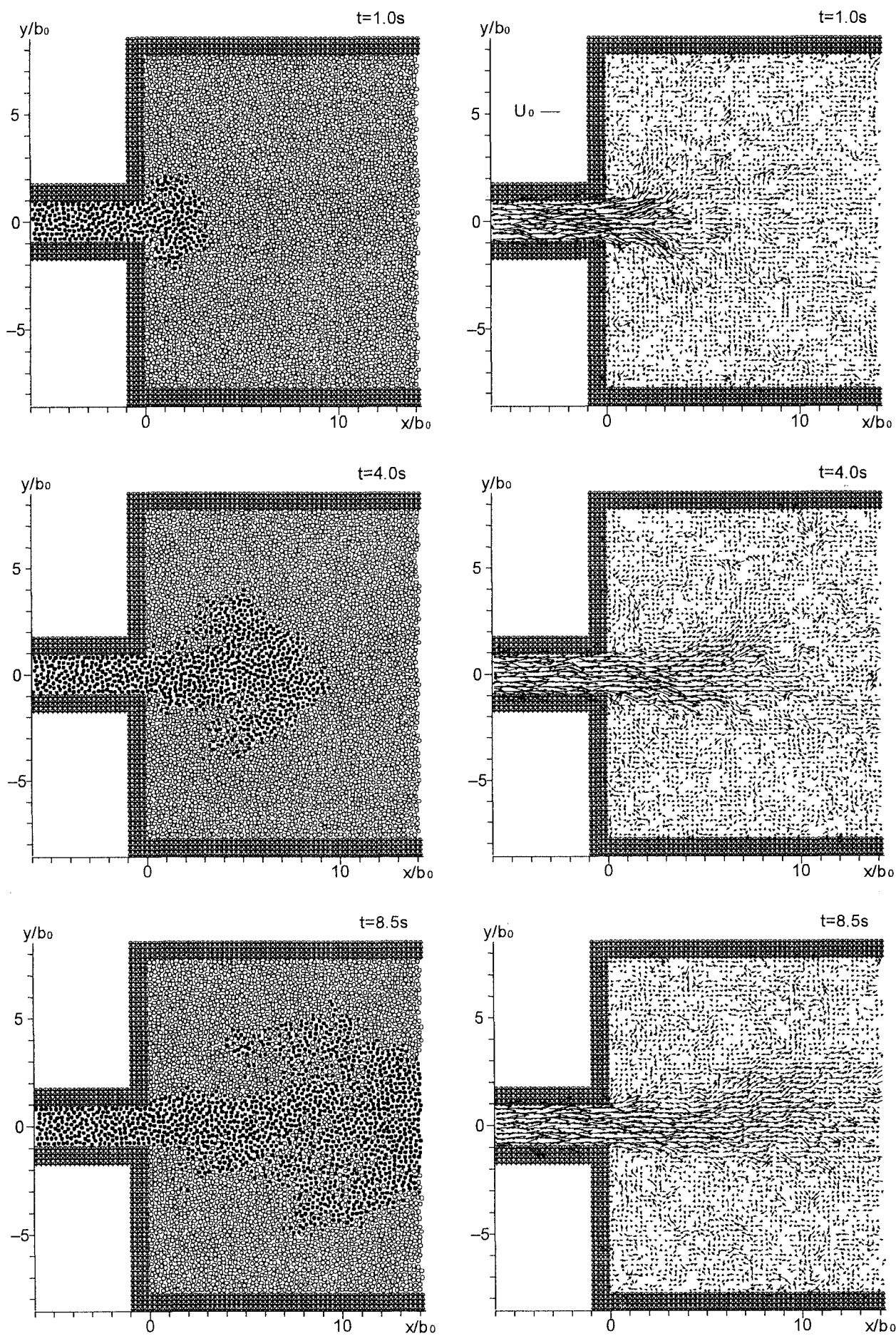


図-2 粒子の瞬間像と流速ベクトル（発達過程の計算結果）

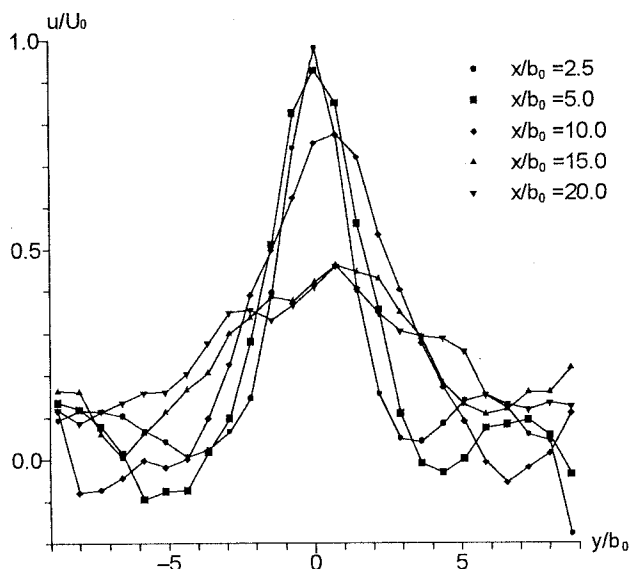


図-3 断面平均流速

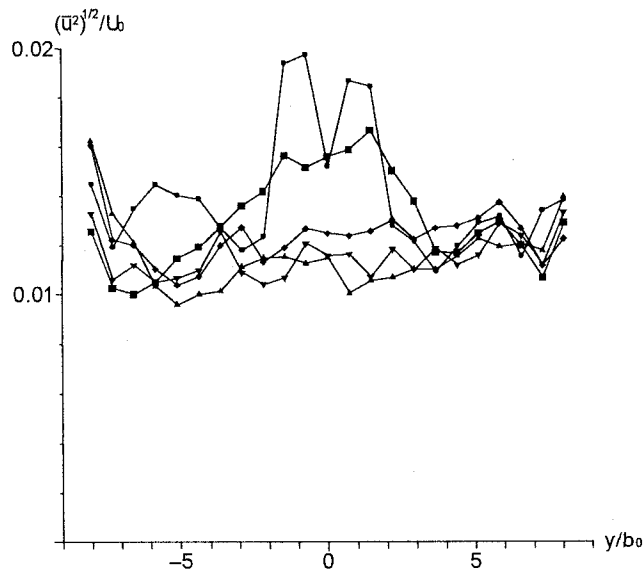


図-4 SPS乱れ強度

いることを示唆している。

粒子法をはじめとするLagrange型の手法では、Euler型の手法と異なり、空間に固定した格子点を用いない。このことの利点は既に言及した通りであるが、流速・圧力の定義点自体が時々刻々変化するLagrange型の手法では、流速や圧力にある種の揺らぎ(Stochastic behavior)が不可避である。より具体的に言うと、粒子が個々の座標を保っているのは、他の粒子との間の接近によって生じる反発力(圧力の増加)のためであり、小刻みな圧力の増減が個々の粒子の過剰接近を抑制し、場全体としての安定性を創り出している。このため、SPSの乱れの計算では適切な空間フィルタリングを行ってPSレベルの揺らぎの影響を受けないように配慮する必要がある(重み関数の有効半径 r_c のチューニングがこれにあたる)。それでもなお、PSには揺らぎ成分が含まれるので、長時間平均からの偏差で単純にPSの乱れを求めてSPSと合算し、乱れ強度を評価することができない。本稿でSPSのみの成分の表示に留めているのはこのような理由による。

4. 結 語

本稿ではSPS(Sub-Particle-Scale)乱流モデルを粒子法に導入し、粒子スケール以下の乱流場の影響を反映した粒子法の展開を示した。Euler型のGrid-Scaleに相当する基礎式を対象としたLES型の数値解析が可能のように拡張された粒子法を2次元自由噴流場に適用して、モデルの基本的特性を検証した。噴流の既往の研究で指摘されているフラッピング現象や完全発達時の平均流速場の基本的特性などについては再現性が確認されたが、Stochastic behaviorの影響に

起因するPSの乱れ成分の評価の問題が再認識される結果となった。Stochastic behaviorの影響を如何に小さく留めるか、また影響があったとして、PSの乱れの中で物理的に意味のある成分をどのように抽出するかなど、引き続き検討したい。

参考文献

- 1) Koshizuka, S., Tamako, H. and Oka, Y.: A particle method for incompressible viscous flow with fluid fragmentation, *Computational Fluid Dynamics J.*, Vol. 4, No. 1, pp.29-46, 1995.
- 2) 後藤仁志, 酒井哲郎, 沖 和哉, 芝原知樹: 粒子法による巻き波型砕波を伴う斜面遡上過程の数値シミュレーション, 海岸工学論文集, 第45巻, pp.181-185, 1998.
- 3) 後藤仁志・酒井哲郎・芝原知樹: 急変流のLagrangian型シミュレーション, 水工学論文集, 第43巻, pp.509-514, 1999.
- 4) 後藤仁志・Jørgen Fredsøe: Lagrange型固液二相流モデルによる海洋投棄微細土砂の拡散過程の数値解析, 海岸工学論文集, 第46巻, 1999 (印刷中)。
- 5) 越塚誠一: 数値流体力学, インテリジェントエンジニアリングシリーズ, 培風館, p223, 1997.
- 6) Koshizuka, S. and Oka, Y.: Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid, *Nuclear Science and Engineering*, Vol. 123, pp.421-434, 1996.
- 7) 大宮司久明, 三宅 裕, 吉澤 徹編: 乱流の数値流体力学-モデルと計算法, 東京大学出版会, p. 652, 1998.
- 8) Smagorinsky, J.: General circulation experiments with the primitive equations, I. The basic experiment, *Mon. Weath. Rev.* Vol. 91, pp. 99-164, 1963.
- 9) 室田 明, 中辻啓二: ジェットとブルーム, 土木学会論文集, 第429号/II-15, pp.1-15, 1991.
- 10) Rajaratnam, N.: Turbulent Jets, *Developments in water science* 5, Elsevier, p. 304, 1976.

(1999.9.30受付)