

一般座標系を用いた領域分割流体解析手法の 提案とその基本特性に関する考察

DEVELOPMENT OF MULTIBLOCK-PARALLEL COMPUTATION METHOD WITH CURVILINEAR COORDINATES AND ITS BASIC FEATURES

牛島 省¹・田中伸和¹・米山 望²

Satoru USHIJIMA, Nobukazu TANAKA and Nozomu YONEYAMA

¹ 正会員 工博(財) 電力中央研究所 水理部 (〒 270-1194 千葉県我孫子市我孫子 1646 番地)

² 正会員 工修(財) 電力中央研究所 水理部 (〒 270-1194 千葉県我孫子市我孫子 1646 番地)

This paper concerns a multiblock-parallel computation technique for three-dimensional turbulent flows, which is advantageous to deal with complicated boundary shapes and to improve computational efficiency as well. A computational domain is decomposed into multiple sub-blocks and their geometries are represented by curvilinear coordinates. The multiple blocks are connected on their surfaces without overlap, so that the grids near the shared surfaces can be easily generated even when the three-dimensional connected regions have complex geometries. The spatial interpolation for some of the variables are performed with a cubic spline function, which prevents the first-order numerical error arising between sub-blocks. As a result of the parallel computations for laminar flows with a moving wall and pressure gradients, it was confirmed that the computational speed is about twice when using four workstations with 130,000 computational nodes.

KeyWords : *body-fitted coordinates, multiblock grid system, parallel computation*

1 はじめに

本研究では, 流体を含んだ 3 次元の計算対象領域を複数のブロックに分割し, 各ブロックの形状を境界適合座標系で独立に表現するとともに, ブロック内の流体計算を並列的に実行する解析手法について検討する。

境界適合座標系は, 曲面などで構成される計算領域を適切に扱うことが可能な手法の 1 つであるが¹⁾, 一般に計算領域は写像空間中で直方体の領域に変換されるため, 物理空間中の計算点とのマッピングが極端に困難な形状に対しては, 適切な曲線座標が生成できない場合がある。しかしながら, 領域分割を行うことにより, 計算領域は単純な形状を有するブロック要素の集合体として表現されるので, 適切な分割を行えば各ブロックの形状は 3 次元境界適合座標系を用いて正しく表現することができる。このように, 領域分割法に境界適合座標系を適用することにより, 不連続な形状変化や分岐・接合が組み合わされるような計算領域を適切に取り扱うことが可能となる。

上記のような複雑な境界形状を取り扱うことのできる計算手法としては, 非構造格子を利用する有限要素法や有限体積法などの手法がある。これらに対して, 本

手法では, 流体の基礎方程式は構造格子上で有限差分法により離散化されるため, より高精度のスキームへの移行や, 高次の乱流モデルを導入した安定な流体計算などが比較的容易に行えると考えられる。

構造格子を利用する場合の領域分割法では, 小領域内部で計算メッシュを重合させる手法²⁾や境界面で接続する手法³⁾などが提案されている。このうち, 計算メッシュを重合させる方法は, その有効性が示されているものの⁴⁾, 計算領域が 3 次元となり, 接続部の形状が複雑になると計算点配置が困難となる。このため, 本手法では境界面でブロックが接続する方法に着目し, 境界面上の一部の変数値はスプライン内挿により評価するものとした。本研究では, この内挿方法を用いることにより, 線形内挿で発生する可能性のある数値誤差を抑制できることを, 実際に平行平板間の流れの計算を行って確認した。

領域分割により生成した複数のブロック内の流体計算は, ネットワーク接続された一般的な EWS クラスタ上で並列的に実行される。平行平板間の流体計算を 4 台の EWS を使用して実行した結果, 130,000 メッシュの計算条件では約 2 倍の計算速度が得られることが確認された。

2 数値解析手法

(1) 領域分割と座標生成

流体計算の対象となる3次元の領域は、ユーザが設定する任意の断面によって複数のブロックに分割される。図1は、ブロック分割を概略的に示したものである。

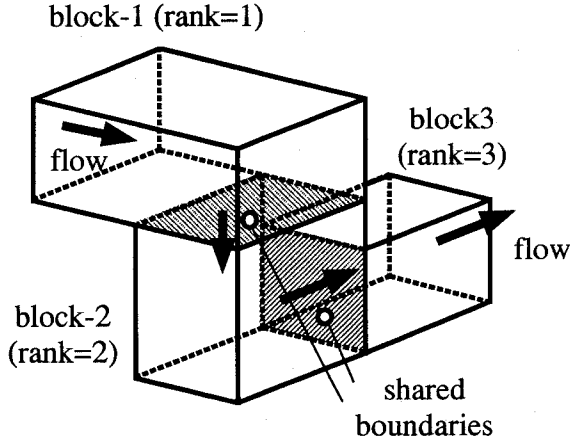


図-1 ブロック分割の概略図

る。各ブロックには一意的な番号 (rank) が付され、ブロックどうしが接続する境界面 (共有境界面) が特定されて、ブロックの接続関係などのデータが設定される。

このブロック分割により、元の計算領域は、比較的単純な形状を有するブロック要素の集合体として表現されるので、全体の形状がかなり複雑であっても、各ブロックの形状は3次元境界適合座標系を用いて適切に表現することが可能である。各ブロックにおける3次元境界適合座標系は、Thompson ら¹⁾と同様に、物理空間および写像空間中の座標成分 (x_i および ξ_m) から構成されるポアソン方程式を逆変換した次式により生成される。

$$\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial \xi_p \partial \xi_q} \right)^* \left(\frac{\partial \xi_p}{\partial x_j} \right)^* \left(\frac{\partial \xi_q}{\partial x_j} \right)^* + \frac{\partial^2 x_i}{\partial \xi_r \partial \xi_s} \left(\frac{\partial \xi_r}{\partial x_j} \right)^* \left(\frac{\partial \xi_s}{\partial x_j} \right)^* + P_m \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_m} \right)^* = 0 \quad (1)$$

ここでは、特に座標生成時の計算精度を高めるため、上式中の*記号がついた項を、中央差分ではなく3次スプライン関数を用いて評価する⁵⁾。(1)式中の P_m は、物理空間中のメッシュ間隔の粗密を制御するためにユーザが設定する関数である。

本計算手法では、写像空間中のコントロールボリュームは27個の計算点から構成される立方体となる。3次元の流速成分と圧力は、この立方体上でスタガード配置されているが、特に境界近傍では変数の間隔を変化させることにより、境界面上に変数が定義される。図2は、2次元平面上における境界付近の変数の配置例を

示したものである。計算領域外部に変数の定義点が存在しないため、ブロックが接続する共有境界面付近でも変数の扱いは煩雑なものとはならない。

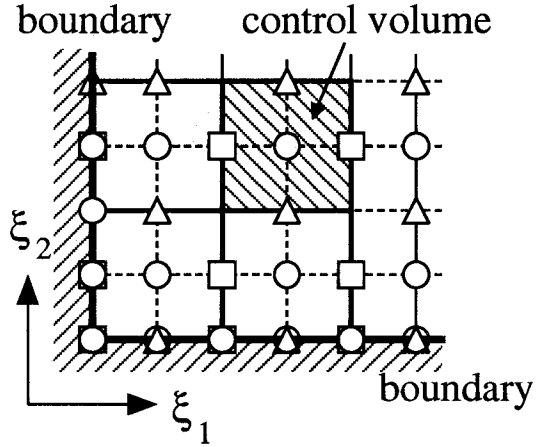


図-2 写像空間中の境界近傍の変数定義位置 (○= p , □= U_1 , Δ= U_2)

なお、後述するように、各ブロック内の流体計算は並列的に実行されるため、上記のような複雑な計算領域形状に対する適用性に加えて、本手法は計算効率を向上させることも可能となっている。複雑な形状の問題に対しては、まず形状を適切に表現することが最も重要であるが、計算効率の観点からは、各ブロック内に含まれる計算メッシュ数を可能な範囲で等しくする領域分割が望ましいと考えられる。

(2) ブロック内の流体解析法

各ブロック内では、写像空間中に変換された基礎方程式が離散化されて流体解析が行われる。2方程式乱流モデルを利用する場合には、写像空間中に変換された基礎式は以下のように与えられる。

(1) 運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{Du_i}{Dt} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} + F_i \\ & + (\nu + \epsilon_M) \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi_m \partial \xi_n} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} + P_m \frac{\partial u_i}{\partial \xi_m} \right) \\ & + \frac{\partial \epsilon_M}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_i} \right) \\ & - \frac{3}{2} \frac{\partial k}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (2)$$

(2) 乱れの運動エネルギー k の方程式

$$\begin{aligned} \frac{Dk}{Dt} = & \epsilon_M \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \\ & + \left(\nu + \frac{C_k}{C_\nu} \epsilon_M \right) \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \xi_m \partial \xi_n} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} + P_m \frac{\partial k}{\partial \xi_m} \right) \\ & + \frac{C_k}{C_\nu} \frac{\partial \epsilon_M}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial k}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} - \epsilon \end{aligned} \quad (3)$$

(3) 乱れの運動エネルギーの散逸率 ϵ の方程式

$$\begin{aligned} \frac{D\epsilon}{Dt} = & C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \epsilon_M \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \\ & + \left(\nu + \frac{C_\epsilon}{C_\nu} \epsilon_M \right) \left(\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \xi_m \partial \xi_n} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} + P_m \frac{\partial \epsilon}{\partial \xi_m} \right) \\ & + \frac{C_\epsilon}{C_\nu} \frac{\partial \epsilon_M}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial \epsilon}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \end{aligned} \quad (4)$$

上記の方程式中で、 u_i と F_i はそれぞれ x_i 方向の平均流速成分と外力成分、 p は圧力、 ρ は流体密度、 ν は動粘性係数である。また、 ϵ_M は渦動粘性係数、 C_k , C_ν , C_ϵ , $C_{\epsilon 1}$, $C_{\epsilon 2}$ はモデル係数⁶⁾である。基礎式の左辺のLagrange微分オペレータは、以下のように表される。

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial \tau} + U_m \frac{\partial}{\partial \xi_m} \quad (5)$$

ここに t および τ は物理空間中と写像空間中の時間で、両者は等しい。 U_m は流速の反変成分である。

上記の各基礎方程式は、Lagrange スキーム上で離散化される⁵⁾。運動方程式を例にとれば、以下のような離散化がなされる。

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} = & u_i^n + \left[-PG_i^{n+1} + F_i^n \right. \\ & \left. + \left(\frac{3}{2} D_i^n - \frac{1}{2} D_i^{n-1} \right) \right] \Delta t \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 PG_i は運動方程式の圧力勾配項、 D_i は拡散項を表し、上添字は計算ステップ、またプライム、ダブルプライムはそれぞれ上流側に1および2計算ステップ分だけ遡った位置における変数であることを意味している。他の基礎方程式も同様に離散化される。

基礎方程式中で、特に移流項に相当する(6)式右辺第1項は、3次スプライン関数を利用した空間内挿(LCSI)によって評価される⁵⁾。この手法では、図2に示したような境界付近でも、内挿対象となる空間位置を含んだ周囲の64点の変数から移流項を精度良く評価することが可能である。既報⁵⁾では、このLCSI法は3次風上差分よりも若干精度が高いことが示されている。

圧力は連続式と運動方程式から導かれる次式を写像空間中で収束計算することにより求められる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial \xi_m \partial \xi_n} \left(\frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) + P_m \frac{\partial p^{n+1}}{\partial \xi_m} \\ = & \frac{\rho}{\Delta t} \left(\frac{\partial U_m^n}{\partial \xi_m} + \frac{\partial F U_i}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \Delta t \right) \equiv RHS \end{aligned} \quad (7)$$

図2に示されるように、境界付近では圧力の定義位置の間隔が変化するが、精度の低下を防ぐため、離散化式では内部領域より数多くの圧力値を利用している。このため、(7)式を離散化すると、次式のように計算対象

となる圧力 p_{ijk} の周囲の圧力値 p_{pqr} を最大21個使用する。

$$c_0 p_{ijk}^{n+1} + \sum_{m=1}^{21} c_m p_{pqr}^{n+1} = RHS_{ijk} \quad (8)$$

ここで c_m は座標成分の微分値等を含んだ係数である。

なお、これらの流体解析手法は、各ブロックで共通であるため、関連するソースファイルは1つのディレクトリ(src-dir)にまとめている。一方、各ブロックに対しては、1つずつディレクトリが設けられ(block-dir)、ブロック固有のデータである境界の形状や境界条件、ブロックの接続関係などに関する比較的少ない情報のみが記述される。実行ファイル作成(コンパイル)時には、src-dir内のファイルをリンクして各block-dir内に個別に実行ファイルが作成される。このように流体解析部分と領域分割に係わるプログラムを分離することにより、流体解析手法の改良や異なる計算領域形状への対応が容易に行える。

(3) 並列計算のプロセス構成と通信

領域分割により生成した複数のブロック内の流動計算は並列的に実行される。本研究で利用した計算機は、並列計算専用機ではなく、100BaseTでネットワーク接続された一般的なEWS(COMPAQ Alpha21164 500MHz) クラスタである。この計算機環境に、MPI⁷⁾ 準拠の通信コマンド等を含んだライブラリを提供するLAM(Local Area Multicomputer)をインストールした。LAMはインターネット上で公開されており(<http://www.mpi.nd.edu/lam/>)、これにより、ネットワーク接続された異機種種のEWS群を一台の並列計算機のように扱うことができる。また、本解析手法はMPIが使用できる環境であれば容易に移植可能である。

複数のブロックに分割された計算領域のうち、互いに関連し合うブロック間では、計算の進行に応じて適切なタイミングで変数値の授受を行うことが必要である。このデータ通信やそれに伴う数値処理を流体計算と切り分けるため、本研究ではマスター・スレーブ型のプロセスの構成を採用した。スレーブプロセスは、ブロック数と同数起動され、各ブロックと一対一に対応しており、割り当てられたブロック内の座標生成や流体計算などの計算処理と、マスタープロセスとの通信を行う。一方、単一で起動されるマスタープロセスは、主としてブロック間通信を管理するもので、各ブロックから変数値を受け取って数値処理を行い、再び所定のブロックへその結果を送信する。

図3は、スレーブプロセスで行われる流体計算とマスタープロセスとの通信の概略を示すものである。最初にスレーブプロセスは割り当てられたブロック形状

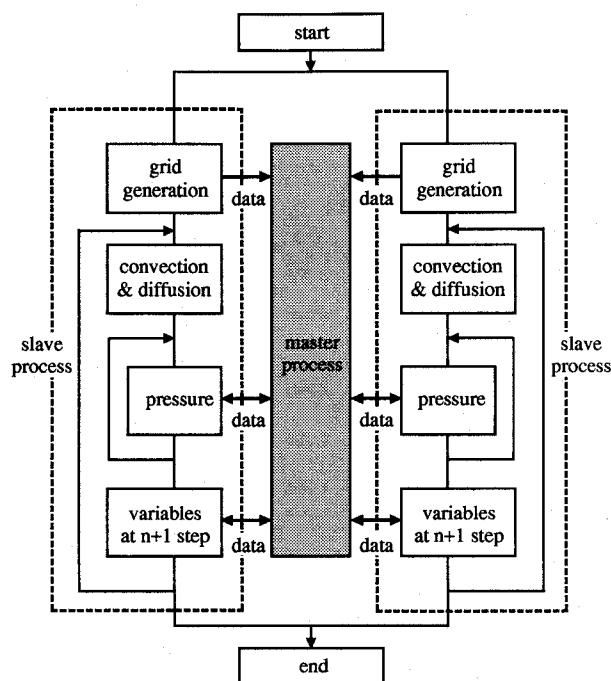


図-3 流体解析のフローと通信

に対して3次元境界適合座標系を生成する。生成された座標成分のうち、共有境界面近傍の座標値は、後述するブロック間の空間内挿に使用されるので、マスタープロセスに送信される。スレーブプロセスでは、移流項や拡散項などが計算された後、圧力の収束計算が行われる。この圧力計算では、収束計算の所定の回数ごとにマスタープロセスを介してブロック間で圧力値の通信が行われる。このデータ通信により、解析領域全体で連続的に分布する圧力場が求められる。次に、得られた圧力値を用いて、 $n+1$ ステップにおける流速成分などが計算される。これらの変数値はマスタープロセスに送信され、マスタープロセスはそれらの値のブロック間内挿等を行い、処理結果を再びスレーブプロセスに送信する。スレーブプロセスは受信した処理結果を用いて流体計算を継続する。

なお、上記のデータ通信は、MPIのブロッキング関数⁷⁾を利用したメッセージパッシングにより実行されるので、各ブロックの計算は通信時に同期が取られる。

(4) ブロック間空間内挿

2つのブロックが接続する共有境界面上の変数は、各ブロックの流体計算において境界条件として利用される。この共有境界面上においては、境界面に平行する流速成分と圧力を除くスカラー量は、両ブロックの変数値を空間内挿して定める。このようなブロック間空間内挿を精度良く行うために、本研究では両ブロック内の変数値を使ってスプライン内挿を行うものとした。図4に概略的に示すように、block-Aとblock-Bが接

続しており、共有境界面上の変数が ϕ_0 、その内部の変数が ϕ_{Ai} および ϕ_{Bi} ($i = 1, 2, \dots$) で与えられる場合、スプライン内挿を利用すれば、 ϕ_0 は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \phi_0 = & M_{A1} \frac{d_{B1}^3}{6d} + M_{B1} \frac{d_{A1}^3}{6d} + \left(\phi_{A1} - \frac{M_{A1}d^2}{6} \right) \frac{d_{B1}}{d} \\ & + \left(\phi_{B1} - \frac{M_{B1}d^2}{6} \right) \frac{d_{A1}}{d} \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 M_{A1} と M_{B1} は、変数 ϕ の2階微分値である。これらの値は、各ブロック内部の4つの変数 ϕ_{Ai} および ϕ_{Bi} ($i = 1, 2, \dots, 4$) からそれぞれ3次多項式を導き、 ϕ_{A1} あるいは ϕ_{B1} の位置における導関数から求める。また、 d 、 d_{A1} 、 d_{B1} はそれぞれ ϕ_{A1} と ϕ_{B1} が定義された点間の距離、 ϕ_0 と ϕ_{A1} あるいは ϕ_{B1} が定義された点間の距離である。

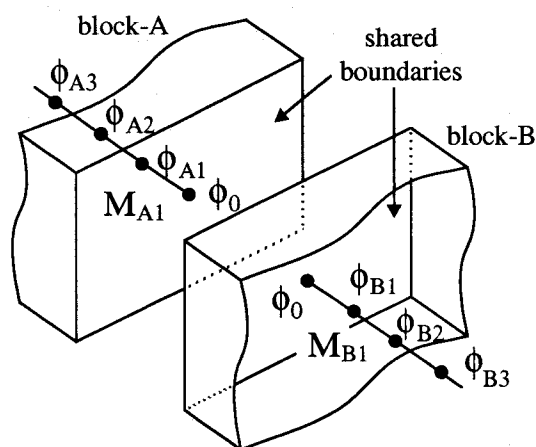


図-4 共有境界面上の変数の空間内挿

実際の計算では、スレーブプロセスにおいて M_{A1} および M_{B1} 等の値が計算され、それらがマスタープロセスに送信される。マスタープロセスでは、受信した値を用いて(9)式により共有境界面上の変数値が計算され、その結果は再び各スレーブプロセスに送信される。

共有境界面における法線方向流速成分と圧力値は、Type-AおよびType-Bの2種類のブロック境界面を定義することにより設定する。Type-Aの境界面を有するブロックでは、流速成分の法線方向の勾配を0とする境界条件を用い、これにより共有境界面上の値を定める。一方、Type-Bの境界面を持つブロックでは、圧力の法線方向勾配を0とし、この条件により同様に共有境界面上の値を定める。

共有境界面において、このType-AおよびType-Bの境界は常に1対で用いる必要があるが、試計算の結果、Type-AおよびType-Bの定め方は流れの方向には依存せず、さらに共有境界面で流入が共存する場合でも問題なく計算を行えることが確かめられている。

3 解析精度と計算効率の考察

(1) ブロック間内挿精度

本研究で用いている流体解析手法は、これまでにベンダ管内の3次元流動などに適用され、実験結果を用いた検証がすでに行われている⁵⁾。しかしながら、本計算手法では、新たに領域分割という手法を用いているため、共有境界面を含んだ解析領域において計算精度が十分なものかどうかを確認することが必要である。このため、本手法により Navier-Stokes 方程式の厳密解が得られている平行平板間の層流計算を行った。

図5は、3次元の計算領域と境界条件を示したものである。この領域は、各方向に単位長さを有する立方体である。 y 軸に直交する境界面では、 $y = 0.5$ の境界

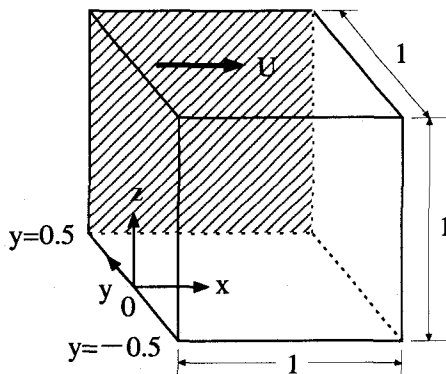


図-5 平行平板間の計算領域

面に x 方向に向かう壁面速度 U が与えられ、他方は固定壁面である。 z 軸に直交する両境界面は、フリースリップ壁面である。 x 軸に直交する境界面では、 $x = 0$ の上流端と $x = 1$ の下流端の間で流速に対して周期境界条件を適用する。また、これら上下流端断面に一定の圧力差を与える。計算領域内の静止流体は、 x 方向の圧力勾配 dp/dx と壁面速度 U により流動を開始し、十分な時間が経過すると、周期境界条件によって定常な流速分布を示す。

流体の粘性係数を μ とすると、上記の境界条件における Navier-Stokes 方程式の解は次のように導かれる⁸⁾。

$$u(y) = U(0.5 + y) - \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (0.25 - y^2) \quad (10)$$

特に、流下方向の圧力勾配が 0 の場合には、壁面流速のみの作用により、線形な流速分布 (Couette 流れ) となる。(10) 式から、次式の無次元圧力勾配 P が定義される。

$$P = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \frac{1}{U} \quad (11)$$

数値計算では、図5に示した計算領域をブロック分割し、ブロック間内挿として線形内挿と本研究のスプ

ライン内挿を適用して、両者の結果を比較した。計算

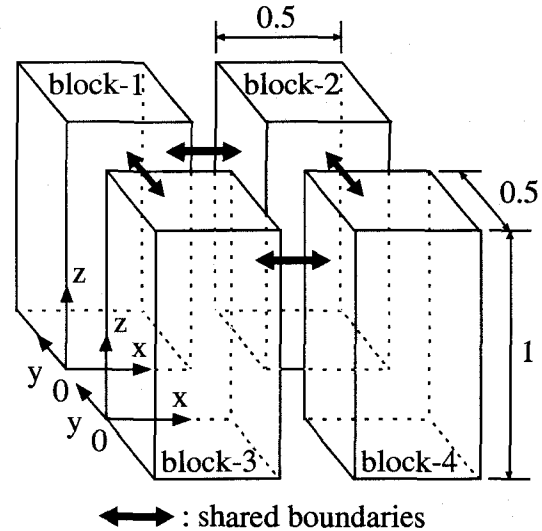


図-6 計算領域のブロック分割

領域は、図6に示すように、大きさの等しい4つのブロックに分割される。計算メッシュは等間隔とし、(1) 式の P_m は 0 とおいた。初期状態は静止流体として、計算領域内の流速分布が定常となる 10,000 ステップまで非定常計算を行った。

図7および図8は、 P および U をパラメータとして変化させたときの計算結果を理論解と比較したものである。図7に示すように、 P の増加につれ、線形内挿では理論解との相違が大きくなる。特に、図8に示すように、 $U = 0, P = 5$ とした条件では、流速の極大値が過小に評価されている。一方、ブロック間内挿にスプライン関数を用いた計算結果は、いずれの条件においても、理論解と一致した。以上の結果から、ブロック間内挿にスプライン内挿を用いることにより、線形内挿で生じ得る精度の低下が発生しないことが示された。

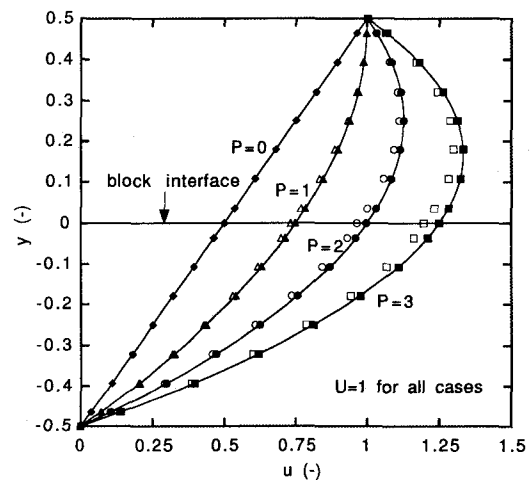


図-7 流速分布の比較 (— = 理論解, 白抜き記号=ブロック間線形内挿, 黒記号=ブロック間スプライン内挿)

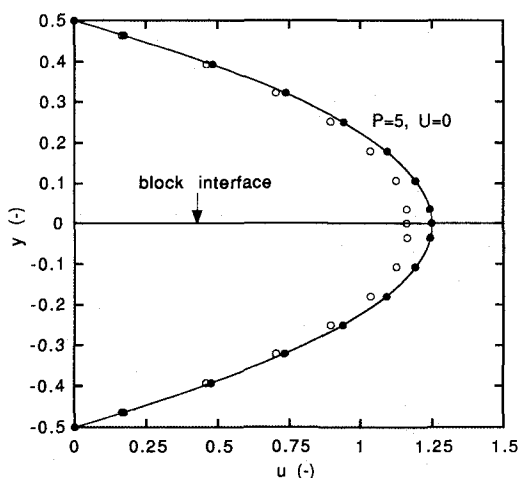


図-8 流速分布の比較 (記号は図7と同じ.)

(2) 計算速度の比較

上記と同様の平行平板間を流れる層流を対象として、計算領域を分割しないシングルブロック計算とブロック分割を行った並列計算の計算速度を比較した。図9は、計算メッシュ数に対して、計算に要した時間を示したものである。図9に示されるように、メッシュ数が

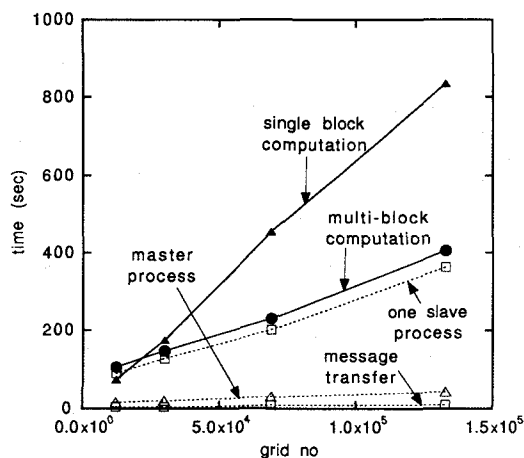


図-9 計算時間の比較

20,000程度以下の条件では、並列計算は計算速度の観点からは有利ではない。しかしながら、それ以上のメッシュ数では並列計算はシングルブロック計算より高速となり、本計算の最大メッシュ数、約130,000メッシュにおいては約2.0倍の計算速度となり、計算効率が向上することが示された。

また、定常解が得られるまでの収束状況を比較した結果、並列計算において収束状況に若干の改善があったが、定常解に到達するまでの過程はほぼ同様であった。

4 おわりに

本研究では、3次元の計算対象領域を複数のブロックに分割し、各ブロックの形状を境界適合座標系で独立に表現するとともに、ブロック内の流体計算を並列的に実行する解析手法を提案した。

本手法では境界面でブロックが接続する方法を採用しており、境界面上の一部の変数値はスプライン内挿により評価する。この内挿方法を用いることにより、線形内挿で発生する可能性のある数値誤差を抑制できることを確認した。さらに、複数のブロック内の流体計算は一般的なEWSクラスタ上で並列的に実行するものとし、平行平板間の流体計算を4台のEWSを使用して実行した結果、計算効率が向上することを確認した。

この計算手法は、多大な計算時間が必要となる乱流計算や、複雑な形状を有する水理構造物内の流動評価など広範囲にわたる流体解析に役立てることができると考えられる。

参考文献

- 1) J. F. Thompson, Z. U. A. Warsi and C. W. Mastin. *Numerical Grid Generation*. Elsevier Science, New York, 1985.
- 2) W. Shyy, J. Wright, and J. Liu. A multilevel composite grid method for fluid flow computations. *AIAA-93-0768*, 1993.
- 3) C. Y. Perng and R. L. Street. A coupled multi-grid domain splitting technique for simulating incompressible flows in geometrically complex domain. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 13, pp. 269-286, 1991.
- 4) W. Shyy, J. Liu, and J. Wright. Pressure-based viscous flow computation using multiblock overlapped curvilinear grids. *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 25, pp. 39-59, 1994.
- 5) S. Ushijima. Prediction of thermal stratification in a curved duct with 3D boundary-fitted coordinates. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 19, pp. 647-665, 1994.
- 6) W. Rodi. Turbulence models and their application in hydraulics. *A state of the art review presented by the IAHR section on fundamentals of division II experimental and mathematical fluid dynamics*, 1980.
- 7) W. Gropp, E. Lusk and A. Skjellum. *Using MPI*. The MIT Press, 1994.
- 8) 日野幹雄. 流体力学. 朝倉書店, 1981.

(1999.9.30 受付)