

貯留型流出モデルの確率応答特性(2)

STOCHASTIC PROPERTY OF STORAGE FUNCTION RUNOFF MODEL (2)

田中岳¹・藤田睦博²・熊谷進³・海藤勝⁴

Gaku TANAKA, Mutsuhiro FUJITA, Susumu KUMAGAI, Masaru KAIDO

¹学生会員 工修 北海道大学大学院 工学研究科 (〒007-0884 札幌市北区北13条西8丁目)

²正会員 工博 北海道大学大学院教授 工学研究科 (同上)

³正会員 日産建設(株) 札幌支店営業課長 (〒064-0917 札幌市中央区南17条西10丁目)

⁴正会員 (株)大林組 東京支店土木本部 プロジェクト部長 (〒108-8502 東京都港区港南2-15-2)

We derived differential equations whose solutions provide the first four moments of discharge under the condition that rainfall input is mutually dependent random variable using the storage function runoff model proposed by Hoshi et al.. In the concrete, we assumed that the deviation from average rainfall is described by AR(1) process based on the statistical analysis of observed rainfall. The validity of proposed theoretical equations was cross-checked by a simulation. It is possible to estimate the probability density function of discharge by the calculated first four moments of discharge. The results of this study can be applied to estimating the design flood.

Key words: storage function runoff model, stochastic property, AR process, design flood

1. はじめに

流出モデルの入力である降雨量が確率過程ならば、その出力である流出量も確率過程となる。つまり、流出量の確率特性は、降雨量の確率特性と流出モデルに依存していることになる。これまで、藤田、工藤ら¹⁾は、貯留型流出モデル(後述するモデルF)を、田中、藤田ら²⁾がKinematic Wave式、貯留型流出モデル(後述するモデルH)を採用し、流出高(流出量)の1~4次モーメントを個別に求めて、その確率密度関数を推定している。いずれの研究も降雨量の確率特性として互いに独立な確率変数を仮定している。しかし、実降雨量時系列には、強い非定常性の他、弱いながらも持続性が確認されている³⁾。この降雨量の持続性が流出量の確率特性に及ぼす影響について検討する必要がある。田中、藤田ら⁴⁾は、モデルFを用いて、降雨量の持続性を考慮した流出高の確率特性を推定している。

本論文では、星、山岡ら⁵⁾によって提案され、実流域への適用範囲の広い貯留型流出モデル(モデルH)を採用し、降雨量の持続性を考慮した流出高の確率特性(1~4次モーメント)を理論的に求め、流出高

の確率密度関数の推定を行う。

2. 基礎理論

これまでに、分布定数系モデル(Kinematic Waveモデルや不飽和浸透流モデル)を集中化し、いくつかの貯留型流出モデル(貯留方程式)が提案されている。なお、それぞれの貯留型流出モデルを区別するため、高棹、宝ら⁶⁾の記述にしたがって以下のように記す。

$$\frac{ds_h}{dt} + q_h = r \quad (1)$$

$$\text{モデルF: } s_h = k_1 q_h^{p_1} \quad (2)$$

$$\text{モデルP: } s_h = k_1 q_h^{p_1} + k_2 \frac{dq_h}{dt} \quad (3)$$

$$\text{モデルH: } s_h = k_1 q_h^{p_1} + k_2 \frac{dq_h^{p_2}}{dt} \quad (4)$$

s_h : 貯留高; q_h : 流出高;

k_1, k_2 : 貯留係数; p_1, p_2 : 貯留指数

貯留方程式(2),(3)が式(4)の特別な形であることは、容易に理解できよう。本論文では、式(1),(4)で表されたモデルHを解析の対象とする。式(4)を式(1)に代入すると、次式が得られる。

$$k_1 \frac{dq_h^{p_1}}{dt} + k_2 \frac{d^2 q_h^{p_2}}{dt^2} + q_h = r \quad (5)$$

降雨量 r が確率変数ならば、流出高 q_h もまた確率変数となる。これからの解析の都合上、それぞれの確率変数は、平均値(記号: $\bar{\cdot}$)とそれからの偏差(記号: $\tilde{\cdot}$)とに分離して扱う。

$$r = \bar{r} + \tilde{r}, \quad E(\tilde{r}) = 0 \quad (6) \quad q_h = \bar{q}_h + \tilde{q}_h, \quad E(\tilde{q}_h) = 0 \quad (7)$$

さらに、指数型の確率変数($q_h^{p_1}, q_h^{p_2}$)については、以下の近似式を用いる。

$$q_h^{p_1} = \alpha_1 \bar{q}_h + \beta_1 \tilde{q}_h \quad (8) \quad q_h^{p_2} = \alpha_2 \bar{q}_h + \beta_2 \tilde{q}_h \quad (9)$$

式(8),(9)の4つの係数($\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$)については、Bras and Georgakakosら⁷⁾が以下のように与えている。ただし、 α_2, β_2 については、式(10),(11)で p_1 を p_2 に置き換えることで得られる。

$$\alpha_1 = \bar{q}_h^{p_1-1} \left\{ 1 + \frac{1}{2} p_1 (p_1 - 1) \frac{E(\tilde{q}_h^2)}{\bar{q}_h^2} + \frac{1}{6} p_1 (p_1 - 1) (p_1 - 2) \frac{E(\tilde{q}_h^3)}{\bar{q}_h^3} + \dots \right\} \quad (10)$$

$$\beta_1 = \frac{\bar{q}_h^{p_1+1}}{E(\tilde{q}_h^2)} \left\{ p_1 \frac{E(\tilde{q}_h^2)}{\bar{q}_h^2} + \frac{1}{2} p_1 (p_1 - 1) \frac{E(\tilde{q}_h^3)}{\bar{q}_h^3} + \frac{1}{6} p_1 (p_1 - 1) (p_1 - 2) \frac{E(\tilde{q}_h^4)}{\bar{q}_h^4} + \dots \right\} \quad (11)$$

式(6)~(9)を式(5)に代入すると、

$$k_1 \frac{d(\alpha_1 \bar{q}_h + \beta_1 \tilde{q}_h)}{dt} + k_2 \frac{d^2(\alpha_2 \bar{q}_h + \beta_2 \tilde{q}_h)}{dt^2} + \bar{q}_h + \tilde{q}_h = \bar{r} + \tilde{r} \quad (12)$$

式(12)の両辺に期待値をとれば、次式が得られる。

$$k_1 \frac{d(\alpha_1 \bar{q}_h)}{dt} + k_2 \frac{d^2(\alpha_2 \bar{q}_h)}{dt^2} + \bar{q}_h = \bar{r} \quad (13)$$

式(12)から式(13)を引くと、

$$k_1 \frac{d(\beta_1 \tilde{q}_h)}{dt} + k_2 \frac{d^2(\beta_2 \tilde{q}_h)}{dt^2} + \tilde{q}_h = \tilde{r} \quad (14)$$

数式展開を容易にするため、式(13),(14)の記述を簡略化し、以下のように書き改める。

$$\frac{d^2 \bar{V}}{dt^2} + f_1(t) \frac{d\bar{V}}{dt} + g_1(t) \bar{V} = \bar{r} \quad (15)$$

$$\frac{d^2 \tilde{V}}{dt^2} + f_2(t) \frac{d\tilde{V}}{dt} + g_2(t) \tilde{V} = \tilde{r} \quad (16)$$

ただし、

$$\bar{V} = k_2 \alpha_2 \bar{q}_h \quad (17) \quad \tilde{V} = k_2 \beta_2 \tilde{q}_h \quad (18)$$

$$f_1(t) = \frac{k_1 \alpha_1}{k_2 \alpha_2} \quad (19) \quad g_1(t) = \frac{1}{k_2} \left\{ k_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2} \right\} \quad (20)$$

$$f_2(t) = \frac{k_1 \beta_1}{k_2 \beta_2} \quad (21) \quad g_2(t) = \frac{1}{k_2} \left\{ k_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right) + \frac{1}{\beta_2} \right\} \quad (22)$$

$\bar{V}, \tilde{V}$ について、式(15),(16)をそれぞれ解き、 V の1~4次モーメントが求まると、 q_h の1~4次モーメント(式(17)および式(43)~(45))を推定することができる。しかし、式(16)のような一般の2階微分方程式は、 $\tilde{V}$ を陽形式に表現できない。そこで、複素関数($f_3(t), g_3(t)$)を導入して式(16)を連立1階微分方程式で表す。

$$\frac{d\tilde{V}_1}{dt} + f_3(t) \tilde{V}_1 = \tilde{r} \quad (23) \quad \frac{d\tilde{V}}{dt} + g_3(t) \tilde{V} = \tilde{V}_1 \quad (24)$$

$$f_3(t) = F(t) + jG(t) \quad (25) \quad g_3(t) = H(t) + jI(t) \quad (26)$$

j : 虚数単位

式(16)と式(23),(24)を比較することで、次式が得られる。

$$\frac{dH(t)}{dt} + \{f_2(t) - H(t)\}H(t) = g_2(t) - I(t)^2 \quad (27)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} + \{f_2(t) - 2H(t)\}I(t) = 0 \quad (28)$$

$$F(t) = f_2(t) - H(t) \quad (29) \quad G(t) = -I(t) \quad (30)$$

式(23),(24)をそれぞれ解き、 $\tilde{V}$ について2~4乗して期待値をとることで V の2~4次モーメントが得られる。ここで留意すべき点は、式(16)の $\tilde{V}$ が実数値関数であるのに対して、式(24)の $\tilde{V}$ は複素数値関数として定義されていることである。したがって、式(23),(24)を解く際には、 $\tilde{V}, \tilde{V}_1$ の実部のみを取り合う。ここで、記号(R_e)は、複素数値関数の実部を表す。結果的に、次式が得られる。

$$R_e\{\tilde{V}\} = C_1(t)W_1(t) + S_1(t)W_2(t) \quad (31)$$

$$\frac{dW_1}{dt} + HW_1 = W_5W_3 + W_6W_4 \quad (32)$$

$$\frac{dW_2}{dt} + HW_2 = W_6W_3 - W_5W_4 \quad (33)$$

$$\frac{dW_3}{dt} + FW_3 = C_1(t)\tilde{r}(t) \quad (34)$$

$$\frac{dW_4}{dt} + FW_4 = S_1(t)\tilde{r}(t) \quad (35)$$

$$\frac{dC_1}{dt} = -IS_1, \quad C_1(0) = 1 \quad (36) \quad \frac{dS_1}{dt} = IC_1, \quad S_1(0) = 0 \quad (37)$$

$$W_5(t) = C_1(t)^2 - S_1(t)^2 \quad (38) \quad W_6(t) = 2C_1(t)S_1(t) \quad (39)$$

式(31)を2~4乗して期待値をとることで、 V の2~4次モーメント($\sigma_V^2, \mu_{V3}, \mu_{V4}$)が得られる。

$$\sigma_V^2 = E\{[C_1(t)W_1(t) + S_1(t)W_2(t)]^2\} \quad (40)$$

$$\mu_{V3} = E\{[C_1(t)W_1(t) + S_1(t)W_2(t)]^3\} \quad (41)$$

$$\mu_{V4} = E\{[C_1(t)W_1(t) + S_1(t)W_2(t)]^4\} \quad (42)$$

式(18)から q_h の確率特性(2~4次モーメント)と V のそ

れらとの関係は、次式のように与えられる。

$$\sigma_V^2 = (k_2 \beta_2)^2 \sigma_{q_h}^2 \quad (43)$$

$$\mu_{V3} = (k_2 \beta_2)^3 \mu_{q_h^3} \quad (44)$$

$$\mu_{V4} = (k_2 \beta_2)^4 \mu_{q_h^4} \quad (45)$$

式(8),(9)の4つの係数($\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$), ならびに $F(t), H(t), I(t), C_1(t), S_1(t), W_5(t), W_6(t)$ は決定論的関数とみなされる。一方、式(32)~(35)で与えられた W_1, W_2, W_3, W_4 は確率変数である。したがって、式(40)~(42)を解く際、それらを展開して得られる $E\{W_1^m W_2^n\}$ (n, m : 整数; $2 \leq n+m \leq 4$)を必要とする。式(32)~(35)を用いて $E\{W_1^m W_2^n\}$ を求めるのだが、式(34),(35)の強制項(右辺)に含まれた確率変数 $\tilde{r}(t)$ によって、降雨量 $r(t)$ の2~4次のキュームラント関数($E\{\tilde{r}(t_1)\tilde{r}(t_2)\}, E\{\tilde{r}(t_1)\tilde{r}(t_2)\tilde{r}(t_3)\}, E\{\tilde{r}(t_1)\tilde{r}(t_2)\tilde{r}(t_3)\tilde{r}(t_4)\}$)を与えておく必要がある。しかし、この時間的に連続な関数として定義された(連続的)降雨量 $r(t)$ の確率特性を推定することは容易ではない。田中、藤田ら⁴⁾は、観測降雨量資料の統計的解析に基づいて、 $r(t)$ の1~4次のキュームラント関数の推定を以下のように行っている。観測された(離散的)降雨量 $r_{d,i}$ は、(連続的)降雨量 $r(t)$ と次式で結ばれている。

$$r_{d,i} = \frac{1}{\Delta t} \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} r(\tau) d\tau \quad (46)$$

Δt : (離散的)降雨量の観測間隔

$r_{d,i}$ も確率変数であるため、平均値 $\bar{r}_{d,i}$ とそれからの偏差 $\tilde{r}_{d,i}$ で表される。

$$r_{d,i} = \bar{r}_{d,i} + \tilde{r}_{d,i}, \quad E(\tilde{r}_{d,i}) = 0 \quad (47)$$

式(6)および式(46),(47)から、次式が得られる。

$$\bar{r}_{d,i} = \frac{1}{\Delta t} \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} \bar{r}(\tau) d\tau \quad (48)$$

$$\tilde{r}_{d,i} = \frac{1}{\Delta t} \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} \tilde{r}(\tau) d\tau \quad (49)$$

工藤、藤田ら⁸⁾は観測降雨資料より $\tilde{r}_{d,i}$ を1次の自己回帰過程で近似できることを確認している。

$$\tilde{r}_{d,i} = \rho \tilde{r}_{d,i-1} + N_i \quad (50)$$

N_i : ノイズ成分; ρ : 回帰係数

ここで、 N_i は平均値が0の互いに独立な確率変数で、その2~4次モーメントは、それぞれ $\sigma_N^2, \mu_{N3}, \mu_{N4}$ で表される。式(50)から $r_{d,i}$ の2~4次のキュームラント関数($E\{\tilde{r}_{d,i}\tilde{r}_{d,j}\}, E\{\tilde{r}_{d,i}\tilde{r}_{d,j}\tilde{r}_{d,k}\}, E\{\tilde{r}_{d,i}\tilde{r}_{d,j}\tilde{r}_{d,k}\tilde{r}_{d,l}\}$)が容易に得られる。式(49)を介して $r(t)$ の2~4次のキュームラント関数は推定される。 $r(t)$ の2次のキュームラント関数に着目すると、

$$E\{\tilde{r}_{d,i}\tilde{r}_{d,j}\} = \sigma_{r_d}^2 \rho^{i-j}, \quad i \geq j \quad (51)$$

$$E\{\tilde{r}_{d,i}\tilde{r}_{d,j}\} = \frac{1}{\Delta t^2} \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} \int_{(j-1)\Delta t}^{j\Delta t} E\{\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\} d\tau_2 d\tau_1 \quad (52)$$

$\sigma_{r_d}^2$: $r_{d,i}$ の分散

が与えられ、 $E\{\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\}$ は、式(51),(52)を満足するように推定される。結果のみを示すが、 $r(t)$ の1~4次のキュームラント関数は、以下のように与えられる。(詳細は、原論文を参照されたい。)

$$\bar{r} = \bar{r}_d \quad (53)$$

$$E\{\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\} = \frac{\Delta t}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{r_d}^2 \times A \delta(\tau_1 - \tau_2 - n\Delta t) e^{-\gamma(\tau_1 - \tau_2)} \quad (54)$$

$$E\{\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\tilde{r}(\tau_3)\} = \frac{\Delta t^2}{c^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^m \mu_{r_d^3} \times A \delta(\tau_1 - \tau_2 - n\Delta t) \times \delta(\tau_2 - \tau_3 - (m-n)\Delta t) e^{-\gamma(\tau_1 + \tau_2 - 2\tau_3)} \quad (55)$$

$$E\{\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\tilde{r}(\tau_3)\tilde{r}(\tau_4)\} = \frac{\Delta t^3}{c^3} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{n=0}^m B \times \delta(\tau_1 - \tau_2 - n\Delta t) \delta(\tau_2 - \tau_3 - (m-n)\Delta t) \times \delta(\tau_3 - \tau_4 - (l-m)\Delta t) \times \left\{ (\mu_{r_d^4} - 3\sigma_{r_d}^4) e^{-\gamma(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - 3\tau_4)} + 2\sigma_{r_d}^4 e^{-\gamma(\tau_1 + \tau_2 - \tau_3 - \tau_4)} + \sigma_{r_d}^4 e^{-\gamma(\tau_1 - \tau_2 + \tau_3 - \tau_4)} \right\} \quad (56)$$

ここで、

$$A = \begin{cases} 1 & (\rho > 0) \\ (-1)^n & (\rho < 0) \end{cases}, \quad B = \begin{cases} 1 & (\rho > 0) \\ (-1)^{l+m+n} & (\rho < 0) \end{cases}$$

$$\gamma = -\frac{\log|\rho|}{\Delta t}, \quad \tau_1 \geq \tau_2 \geq \tau_3 \geq \tau_4$$

c : 大きさ1の時間の次元を持つ定数;

$\delta(t)$: デルタ関数; $\mu_{r_d^3}, \mu_{r_d^4}$: $r_{d,i}$ の3,4次モーメント
式(54)~(56)を用いと、 $E\{W_1^m W_2^n\}$ は次式を解くことで得られる。

$$\frac{dU_i}{dt} + 2FU_i = \Delta t \left(\sigma_{r_d}^2 C_1^{3-i} S_1^{i-1} + U_f^2 Y_i \right), \quad i=1 \sim 3 \quad (57)$$

$$\begin{cases} \frac{dU_{i+3}}{dt} + (F+H)U_{i+3} = W_5 U_i + W_6 U_{i+1} \\ \quad \quad \quad + \Delta t U_h Y_{i+3} \\ \frac{dU_{i+5}}{dt} + (F+H)U_{i+5} = W_6 U_i - W_5 U_{i+1} \\ \quad \quad \quad + \Delta t U_h Y_{i+5} \end{cases}, \quad i=1, 2 \quad (58)$$

$$\frac{dE\{W_1^2\}}{dt} + 2HE\{W_1^2\} = 2W_5 U_4 + 2W_6 U_5 \quad (59)$$

$$\frac{dE\{W_1 W_2\}}{dt} + 2HE\{W_1 W_2\} = W_5 (U_6 - U_5) + W_6 (U_7 + U_4) \quad (60)$$

$$\frac{dE\{W_2^2\}}{dt} + 2HE\{W_2^2\} = 2W_6 U_6 - 2W_5 U_7 \quad (61)$$

$$\frac{dU_{i+7}}{dt} + 3FU_{i+7} = \Delta t^2 \left\{ \mu_{r,3} C_1^{4-i} S_1^{i-1} + U_f^3 (Y_{i+7} + Y_{i+11} + Y_{i+15}) \right\}, \quad i=1 \sim 4 \quad (62)$$

$$\begin{cases} \frac{dU_{i+11}}{dt} + (2F+H)U_{i+11} = W_5 U_{i+7} + W_6 U_{i+8} \\ \quad + \Delta t^2 U_f U_h Y_{i+19}, \\ \frac{dU_{i+14}}{dt} + (2F+H)U_{i+14} = W_6 U_{i+7} - W_5 U_{i+8} \\ \quad + \Delta t^2 U_f U_h Y_{i+22} \end{cases}, \quad i=1 \sim 3 \quad (63)$$

$$\begin{cases} \frac{dU_{i+17}}{dt} + (F+2H)U_{i+17} = 2W_5 U_{i+11} + 2W_6 U_{i+12} \\ \quad + \Delta t^2 U_h^2 Y_{i+25} \\ \frac{dU_{i+19}}{dt} + (F+2H)U_{i+19} = 2W_6 U_{i+14} - 2W_5 U_{i+15} \\ \quad + \Delta t^2 U_h^2 Y_{i+27} \end{cases}, \quad i=1, 2 \quad (64)$$

$$\begin{cases} \frac{dU_{i+21}}{dt} + (F+2H)U_{i+21} = W_5 (U_{i+14} - U_{i+12}) \\ \quad + W_6 (U_{i+15} + U_{i+11}) + \Delta t^2 U_h^2 Y_{i+29} \end{cases} \quad (65)$$

$$\frac{dE\{W_1^2 W_2\}}{dt} + 3HE\{W_1^2 W_2\} = W_5 (2U_{22} - U_{19}) + W_6 (2U_{23} + U_{18}) \quad (66)$$

$$\frac{dE\{W_1 W_2^2\}}{dt} + 3HE\{W_1 W_2^2\} = W_5 (U_{20} - 2U_{23}) + W_6 (U_{21} + 2U_{22}) \quad (67)$$

$$\frac{dE\{W_2^3\}}{dt} + 3HE\{W_2^3\} = 3W_6 U_{20} - 3W_5 U_{21} \quad (68)$$

$$\frac{dU_f}{dt} + FU_f = 0, \quad U_f(0) = 1 \quad (69)$$

$$\frac{dU_h}{dt} + HU_h = 0, \quad U_h(0) = 1 \quad (70)$$

$$\frac{dU_{w,i}}{dt} = W_{i+4} \frac{U_f}{U_h}, \quad i=1, 2 \quad (71)$$

$$\frac{dU_{w,i,j}}{dt} = W_{i+4} \frac{U_f}{U_h} U_{w,j}, \quad i=1, 2 \quad j=1, 2 \quad (72)$$

ただし,

$$Y_1 = 2Z_1(1, 1), \quad Y_2 = Z_1(1, 2) + Z_1(2, 1), \quad Y_3 = 2Z_1(2, 2)$$

$$Z_1(n, m) = \begin{cases} 0 & [t/\Delta t] < 1 \\ \sigma_{r,d}^{-2} \sum_{i=1}^{[t/\Delta t]} \rho^i u_n(t) u_m(t-i\Delta t) & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$u_1(t) = \frac{C_1(t)}{U_f(t)}, \quad u_2(t) = \frac{S_1(t)}{U_f(t)}$$

$$\begin{cases} Y_{i+3} = C_1^{2-i} S_1^{i-1} \{Z_2(1, 1) + Z_2(2, 2)\} \\ Y_{i+5} = C_1^{2-i} S_1^{i-1} \{Z_2(2, 1) - Z_2(1, 2)\} \end{cases}, \quad i=1, 2$$

$$Z_2(n, m) = \begin{cases} 0 & [t/\Delta t] < 1 \\ \sigma_{r,d}^{-2} \sum_{i=1}^{[t/\Delta t]} \rho^i X_n(t, i) u_m(t-i\Delta t) & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$X_i(t, n) = U_{w,i}(t) - U_{w,i}(t-n\Delta t), \quad i=1, 2$$

$$Y_8 = 3Z_3(1, 1, 1), \quad Y_9 = Z_3(1, 1, 2) + 2Z_3(1, 2, 1),$$

$$Y_{10} = 2Z_3(1, 2, 2) + Z_3(2, 2, 1), \quad Y_{11} = 3Z_3(2, 2, 2),$$

$$Y_{12} = 3Z_4(1, 1, 1), \quad Y_{13} = Z_4(2, 1, 1) + 2Z_4(1, 1, 2),$$

$$Y_{14} = 2Z_4(2, 1, 2) + Z_4(1, 2, 2), \quad Y_{15} = 3Z_4(2, 2, 2),$$

$$Y_{16} = 6Z_5(1, 1, 1), \quad Y_{17} = 2\{Z_5(1, 1, 2) + Z_5(1, 2, 1) + Z_5(2, 1, 1)\},$$

$$Y_{18} = 2\{Z_5(1, 2, 2) + Z_5(2, 1, 2) + Z_5(2, 2, 1)\}, \quad Y_{19} = 6Z_5(2, 2, 2)$$

$$Z_3(n, m, l) = \begin{cases} 0 & [t/\Delta t] < 1 \\ \mu_{r,d}^{-3} \sum_{i=1}^{[t/\Delta t]} \rho^{2i} u_n(t) u_m(t) u_l(t-i\Delta t) & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$Z_4(n, m, l) = \begin{cases} 0 & [t/\Delta t] < 1 \\ \mu_{r,d}^{-3} \sum_{i=1}^{[t/\Delta t]} \rho^i u_n(t) u_m(t-i\Delta t) u_l(t-i\Delta t) & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$Z_5(n, m, l) = \begin{cases} 0 & [t/\Delta t] < 2 \\ \mu_{r,d}^{-3} \sum_{i=2}^{[t/\Delta t]} \sum_{j=1}^{i-1} \rho^{2i-j} u_n(t) u_m(t-j\Delta t) u_l(t-i\Delta t) & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_{3i+17} = 2C_1 y_{2i-1} \\ Y_{3i+18} = C_1 y_{2i} + S_1 y_{2i-1}, \\ Y_{3i+19} = 2S_1 y_{2i} \end{cases}, \quad i=1, 2$$

$$y_1 = Z_6(1, 1, 1)/2 + Z_7(1, 1, 1) + Z_8(1, 1, 1) + Z_9(1, 1, 1) \\ + Z_6(2, 1, 2)/2 + Z_7(2, 1, 2) + Z_8(2, 2, 1) + Z_9(2, 1, 2)$$

$$y_2 = Z_6(1, 2, 1)/2 + Z_7(1, 2, 1) + Z_8(1, 1, 2) + Z_9(1, 2, 1) \\ + Z_6(2, 2, 2)/2 + Z_7(2, 2, 2) + Z_8(2, 2, 2) + Z_9(2, 2, 2)$$

$$y_3 = Z_6(2, 1, 1)/2 + Z_7(2, 1, 1) + Z_8(2, 1, 1) + Z_9(2, 1, 1) \\ - Z_6(1, 1, 2)/2 - Z_7(1, 1, 2) - Z_8(1, 2, 1) - Z_9(1, 1, 2)$$

$$y_4 = Z_6(2, 2, 1)/2 + Z_7(2, 2, 1) + Z_8(2, 1, 2) + Z_9(2, 2, 1) \\ - Z_6(1, 2, 2)/2 - Z_7(1, 2, 2) - Z_8(1, 2, 2) - Z_9(1, 2, 2)$$

$$Z_6(n, m, l) = \begin{cases} 0 & [t/\Delta t] < 1 \\ \mu_{r,d}^{-3} \sum_{i=1}^{[t/\Delta t]} \rho^{2i} X_n(t, i) u_m(t) u_l(t-i\Delta t) & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$Z_7(n, m, l) = \begin{cases} 0 & [t/\Delta t] < 1 \\ \mu_{r,d}^{-3} \sum_{i=1}^{[t/\Delta t]} \rho^i X_n(t, i) u_m(t-i\Delta t) u_l(t-i\Delta t) & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$Z_8(n, m, l) = \begin{cases} 0 & [t/\Delta t] < 2 \\ \mu_{r,3} \sum_{i=2}^{[t/\Delta t]} \sum_{j=1}^{i-1} \rho^{2i-j} X_n(t, j) u_m(t-j\Delta t) u_l(t-i\Delta t) & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$Z_9(n, m, l) = \begin{cases} 0 & [t/\Delta t] < 2 \\ \mu_{r,3} \sum_{i=2}^{[t/\Delta t]} \sum_{j=1}^{i-1} \rho^{2i-j} X_n(t, i) u_m(t-j\Delta t) u_l(t-i\Delta t) & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_{2i+24} = C_1 y_{i+4}, & i=1 \sim 3 \\ Y_{2i+25} = S_1 y_{i+4} \end{cases}$$

$$y_5 = 2\{Z_{10}(1, 1, 1, 1) + Z_{11}(1, 1, 1, 1) + Z_{12}(1, 1, 1, 1) \\ + Z_{10}(1, 2, 1, 2) + Z_{11}(1, 2, 2, 1) + Z_{12}(1, 2, 1, 2) \\ + Z_{10}(2, 1, 2, 1) + Z_{11}(2, 1, 1, 2) + Z_{12}(2, 1, 2, 1) \\ + Z_{10}(2, 2, 2, 2) + Z_{11}(2, 2, 2, 2) + Z_{12}(2, 2, 2, 2)\}$$

$$y_6 = 2\{Z_{10}(2, 2, 1, 1) + Z_{11}(2, 2, 1, 1) + Z_{12}(2, 2, 1, 1) \\ - Z_{10}(2, 1, 1, 2) - Z_{11}(2, 1, 2, 1) - Z_{12}(2, 1, 1, 2) \\ - Z_{10}(1, 2, 2, 1) - Z_{11}(1, 2, 1, 2) - Z_{12}(1, 2, 2, 1) \\ + Z_{10}(1, 1, 2, 2) + Z_{11}(1, 1, 2, 2) + Z_{12}(1, 1, 2, 2)\}$$

$$y_7 = Z_{10}(1, 2, 1, 1) + Z_{11}(1, 2, 1, 1) + Z_{12}(1, 2, 1, 1) \\ - Z_{10}(1, 1, 1, 2) - Z_{11}(1, 1, 2, 1) - Z_{12}(1, 1, 1, 2) \\ + Z_{10}(2, 2, 2, 1) + Z_{11}(2, 2, 1, 2) + Z_{12}(2, 2, 2, 1) \\ - Z_{10}(2, 1, 2, 2) - Z_{11}(2, 1, 2, 2) - Z_{12}(2, 1, 2, 2) \\ + Z_{10}(2, 1, 1, 1) + Z_{11}(2, 1, 1, 1) + Z_{12}(2, 1, 1, 1) \\ + Z_{10}(2, 2, 1, 2) + Z_{11}(2, 2, 2, 1) + Z_{12}(2, 2, 1, 2) \\ - Z_{10}(1, 1, 2, 1) - Z_{11}(1, 1, 1, 2) - Z_{12}(1, 1, 2, 1) \\ - Z_{10}(1, 2, 2, 2) - Z_{11}(1, 2, 2, 2) - Z_{12}(1, 2, 2, 2)$$

$$Z_{10}(n_1, n_2, m, l) = \begin{cases} 0 & [t/\Delta t] < 1 \\ \mu_{r,3} \sum_{i=1}^{[t/\Delta t]} \rho^i X_{n_1, n_2}(t, i, i) \\ \times u_m(t-i\Delta t) u_l(t-i\Delta t) & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$Z_{11}(n_1, n_2, m, l) = \begin{cases} 0 & [t/\Delta t] < 2 \\ \mu_{r,3} \sum_{i=2}^{[t/\Delta t]} \sum_{j=1}^{i-1} \rho^{2i-j} X_{n_1, n_2}(t, j, j) \\ \times u_m(t-j\Delta t) u_l(t-i\Delta t) & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$Z_{12}(n_1, n_2, m, l) = \begin{cases} 0 & [t/\Delta t] < 2 \\ \mu_{r,3} \sum_{i=2}^{[t/\Delta t]} \sum_{j=1}^{i-1} \rho^{2i-j} X_{n_1, n_2}(t, j, i) \\ \times u_m(t-j\Delta t) u_l(t-i\Delta t) & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$X_{i,j}(t, k_1, k_2) = U_{w,i,j}(t) - U_{w,i,j}(t-k_1\Delta t) \\ - \{U_{w,i}(t) - U_{w,i}(t-k_1\Delta t)\} U_{w,j}(t-k_2\Delta t) \\ i=1, 2 \quad j=1, 2$$

なお、 $E(W_1^m W_2^n) (n+m=4)$ に関しては、 $n+m=2, 3$ の場合と同様に導けるため、紙面の都合上省略した。

3. シミュレーション法による検証と確率密度関数の推定

2章で述べてきたように、本論文の理論展開においては、指数型の確率変数($q_h^{p_1}, q_h^{p_2}$)に近似式(8),(9)を採用し、 $r(t)$ の2~4次のキュームラント関数として近似式(54)~(56)を採用している。これらの妥当性を検証するため、シミュレーション法を用いる。シミュレーション法を行う際、星, 山岡ら⁹⁾による無次元変量で記述された式(73),(74)を採用する。

$$\frac{dS}{dT} + Q = R \quad (73)$$

$$\text{モデルH: } S = K_1 Q^{p_1} + K_2 \frac{dQ^{p_2}}{dT} \quad (74)$$

図-1は、計算結果を示している。(連続的)降雨量の平均値の波形が式(75)で表される場合、式(74)の各係数は、星, 山岡ら⁹⁾が以下のように与えている。

$$p_1 = 0.6, K_1 = \frac{1}{1+p_1}, p_2 = 0.4509, K_2 = 0.09608$$

$$\bar{R} = \begin{cases} 0.5+2T & 0 \leq T \leq 1 \\ 4.5-2T & 1 \leq T \leq 2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (75)$$

実線が模擬的に発生された降雨量 $R_d(T)$ (式(76))を式(73),(74)に代入し、標本平均により得られた流出量 Q の確率特性を、破線が本論文で提案された Q の理論的な確率特性をそれぞれ表している。ここで、 $\bar{R}_{d,i}$ は無次元変量で表された式(48)に式(75)を代入することで得られ、 $\sigma_{R_d}^2, \mu_{R,3}, \mu_{R,4}$ は一定である。さらに、図-1は、式(77)により(離散的)降雨量の分散 $\sigma_{R_d}^2$ を一定として、降雨量の持続性(回帰係数: ρ)が流出量の確率特性に与える影響についても示している。

$$\begin{cases} R_{d,i} = \bar{R}_{d,i} + \tilde{R}_{d,i} = \frac{1}{\Delta T} \int_{(i-1)\Delta T}^{i\Delta T} \{R(\tau) + \tilde{R}(\tau)\} d\tau \\ R_d(T) = \sum_i R_{d,i} \{U(T-(i-1)\Delta T) - U(T-i\Delta T)\} \end{cases} \quad (76)$$

ただし、 $\Delta T = 0.1$

$$\sigma_{R_d}^2 = \frac{\sigma_N^2}{1-\rho^2} = \begin{cases} 0.25 & 0 \leq T \leq 2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (77)$$

$$f(N) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(N-\frac{1}{\lambda})} & -\frac{1}{\lambda} \leq N \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad \lambda: \text{const.} \quad (78)$$

$$E(N) = 0, \sigma_N^2 = \frac{1}{\lambda^2}, \mu_{N3} = \frac{2}{\lambda^3}, \mu_{N4} = \frac{9}{\lambda^4}$$

$f(N)$ は、無次元変量で表された式(50)にあるノイズ成分の確率密度関数を表す。なお、シミュレーション法では、式(77)が示すように、 $0 \leq T \leq 2$ の範囲で $\sigma_{R_d}^2$ を一定にしているため、 ρ の値を変化させると σ_N^2 の値も変化するので、理論計算に必要なパラメータ

表-1 各パラメータの値

ρ	σ_N^2	λ	$\mu_{R,3}$	$\mu_{R,4}$
-0.3	0.2275	2.097	0.2113	0.5006
0.0	0.2500	2.000	0.2500	0.5625
0.3	0.2275	2.097	0.2230	0.5006

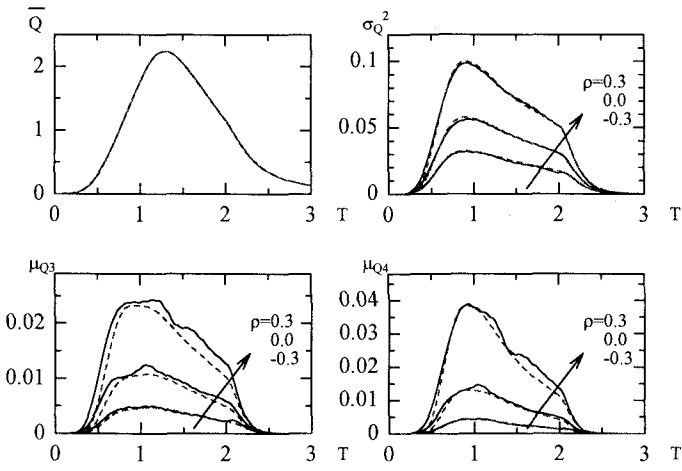


図-1 シミュレーション結果

の値を表-1に示しておく。(なお、 $\rho=0$ は、降雨量が互いに独立な確率変数の場合を表す。)シミュレーション結果と理論値との適合度は良好と言える。また、流出量の確率特性は降雨量の平均値の波形に強く依存し、2~4次モーメントは、 ρ の増加とともに大きくなる。図-2は、図中に示す β_{x1} - β_{x2} 平面上で、平均降雨量波形 $\bar{R}$ のピーク時刻が異なる場合における平均流出量 $\bar{Q}$ のピーク時刻での確率密度関数を推定した結果を表す。なお、計算に用いたパラメータ(K_2, p_2)は降雨波形により異なる。ここでは、星、山岡ら⁵⁾により与えられたものを用いた。図-2から、平均流出量 $\bar{Q}$ のピーク時刻における流出量の確率密度関数が、ガンマ分布もしくは対数正規分布で表されることがわかり、かつ、確率分布のパラメータも決定できる。なお、平均流出量 $\bar{Q}$ のピーク時刻以外での確率密度関数の推定についても同様な結果を示したが、紙面の都合上省略した。

4. まとめ

実流域での適用範囲が広い貯留型流出モデル(モデルH)を用いて、降雨量の持続性を考慮した流出高の確率特性(1~4次モーメント)を理論的に求め、その妥当性を明らかにし、流出高の確率密度関数の推定が可能となった。したがって、降雨量の確率特性が与えられると流出量の確率密度関数が推定できるので、洪水防御計画の基本となる計画流量の算定にも寄与できるものと考えられる。

謝辞: 本研究の一部は平成11年度科学研究費補助金(特別研究員奨励費)の補助を受けて行われた。記して謝意を表す。

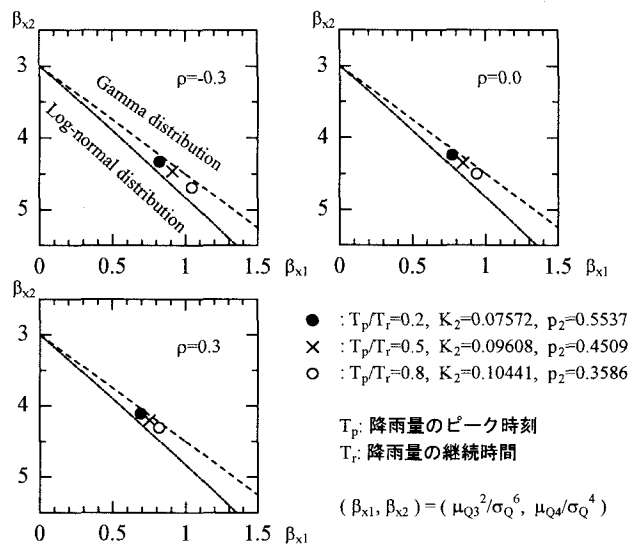


図-2 確率分布の推定

参考文献

- 1) 藤田睦博, 工藤睦信, 中尾隆, 橋本識秀: 貯留型流出モデルの確率応答に関する研究-降雨量が時間的に独立な確率過程の場合-, 土木学会論文集, No. 515/II-31, pp. 1-11, 1995.
- 2) 田中岳, 藤田睦博, 工藤睦信, 内島邦秀: Kinematic Waveモデルと貯留型流出モデルの比較-周波数特性と確率特性-, 土木学会論文集, No. 614/II, pp. 21-36, 1999.
- 3) 江藤剛治: 降雨時系列の解析, 講座-確率統計水文学4, 土木学会誌, Vol. 163, pp. 78-83, 1978.
- 4) 田中岳, 藤田睦博, 熊谷進: 貯留型流出モデルの確率応答特性, 水工学論文集, 第43巻, pp. 1-6, 1999.
- 5) 星清, 山岡勲: 雨水流法と貯留関数法との相互関係, 第26回水理講演会論文報告集, pp. 273-278, 1982.
- 6) 高棹琢馬, 宝馨, 楠橋康広: 洪水流出モデルの確率過程的評価に関する研究, 京都大学防災研究所年報, 第28号B-2, pp. 221-235, 1985.
- 7) Bras, R. L. and Georgakakos, K. P.: Real Time Nonlinear Filtering Techniques in Streamflow Forecasting -A Statistical Linearization Approach-, Third International Symposium on Stochastic Hydraulics, pp. 95-105, 1980.
- 8) 工藤睦信, 藤田睦博, 田中岳, 阿部修, 熊谷進: 貯留型流出モデルの確率応答に関する研究(2)-降雨量が互いに従属する場合-, 水工学論文集, No. 41, pp. 85-92, 1997.

(1999. 9. 30受付)