

Galerkin 法による傾斜プルーム連行則の近似解析

An approximated solution of the entrainment law for the inclined plume by Galerkin method

石川忠晴¹・長尾正之²

Tadaharu Ishikawa and Masayuki Nagao

¹フェロー 工博 東京工業大学教授 大学院総合理工学研究科 (〒226-8502 横浜市緑区長津田町 4259)

²正会員 工修 東京工業大学助手 大学院総合理工学研究科 (〒226-8502 横浜市緑区長津田町 4259)

The aim of this paper is to obtain a series of approximate relation between the Richardson number (Ri) and the entrainment coefficient (E) for inclined plume. There are two types of entrainment law for inclined plume based on data from laboratory experiments. One is a widely-accepted power law and its modification (Type I). The other is a group of empirical formulae with which E is quickly decreased when Ri approaches to a critical value (Type II). But for the lack of data with very mild slope and high Reynolds number, it is still unknown which is an appropriate law for the inclined plume.

Firstly, according to a pioneer work by Fukushima, a series of non-dimensional differential equations were deduced from the $k-\varepsilon$ model under similarity hypothesis of vertical profiles. Secondly, a set of algebraic equations for overall values were obtained to integrate the non-dimensional formulae by Galerkin method. A series of curves of Ri and E calculated from roots of the equations shows that it has same tendency of type II entrainment law.

Key Words : Entrainment law, Entrainment coefficient, Richardson number, Galerkin method, inclined plume, $k-\varepsilon$ model

1. 序論

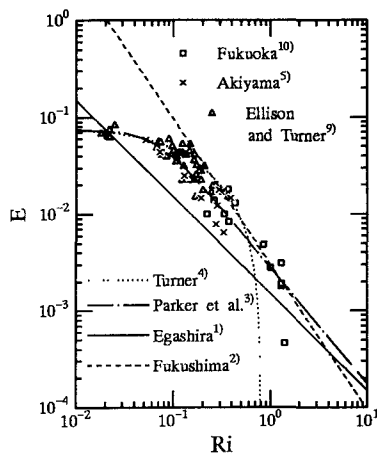
周囲と密度の異なる流体が斜面に沿って上昇または下降する現象は、傾斜プルームと呼ばれている。傾斜プルームは自然界での熱や物質の輸送に重要な役割を果たしていると考えられ、その運動を規定する「連行則」について古くから実験的研究が進められてきた。

その結果として提案されている経験式の式形は2種類に大別される。一つは、連行係数がリチャードソン数のべき乗で表現される「べき乗則」^{1),2)}またはその変形³⁾である。今一つは、リチャードソン数の増加に伴って連行係数が加速度的に減少するものであり^{4),5)}、この場合は、リチャードソン数に実質的な上限(~ 1)が存在する。ここでは、便宜的に、前者をI型の連行則、後者をII型の連行則と呼ぶことにする。

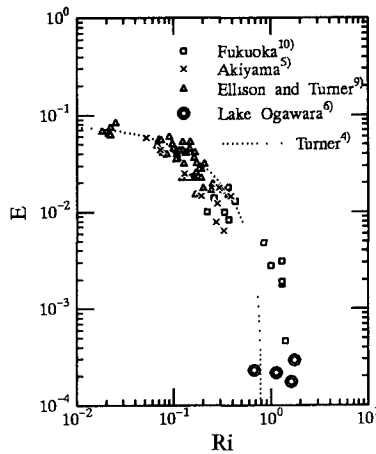
さて、これらの連行則のどちらが適当であるかは、今のところ十分確かめられていない。というのは、その根拠と

なる従来の室内実験結果の範囲が、装置規模等の制約により限られており、その範囲ではどちらの連行則も概ね適合しているように見えるからである。すなわち、従来規模の室内実験を拠る所にする限り、両者の妥当性を区別することは難しいと考えられる。

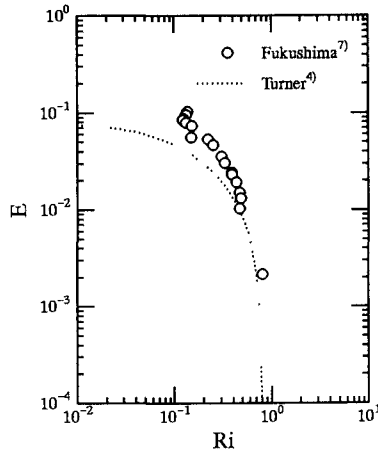
これに対して、最近、室内実験とは異なる二つのアプローチがなされている。一つは長尾ら⁶⁾による小川原湖傾斜プルームの現地観測である。その結果によれば、リチャードソン数がほぼ1に対して、連行係数がI型の連行則から推定される値よりかなり小さくなっている。この観測事実は、先に述べたII型の連行則を支持しているように思われる。二つめは福嶋⁷⁾の解析的なアプローチである。福嶋は、傾斜プルームの鉛直分布に相似性が成立すると仮定して、 $k-\varepsilon$ モデルを用いて解析し、種々の斜面角度についての連行係数とリチャードソン数の関係を示した。その結果にはII型の連行則と類似する傾向が見られる。ただし福嶋自身は論文中ではこのことに触れていない。また計算条件を必ずしも系統的に変化させていないため、連行則としての普遍性



図—1 室内実験結果^{5),9),10)}と既往の連行則^{1),2),3),4)}



図—2 小川原湖観測結果⁶⁾と室内実験結果及びTurner⁴⁾の連行則



図—3 福嶋⁷⁾の数値計算結果とTurner⁴⁾の連行則

は論じにくい形となっている。

そこで本研究では、福嶋の相似性仮説に従って導かれる $k-\epsilon$ モデルの無次元方程式について、境界層の近似解法⁸⁾と同様の手法を適用し、計算条件を系統的に変化させて多数のケースを計算することにより、II型の連行則と類似の関数形が現れるかどうかを調べた。

2. 本研究の方針

傾斜プルームも含めた密度流の連行則は、これまでは実験や観測の結果を基に経験式として提案されてきた。その多くは以下のべき乗則で整理されている。

$$E \propto E_0 \cdot Ri^n \quad (1)$$

江頭¹⁾は傾斜プルームに対して $E_0=0.0015$, $n=1$ が適合するとしている。また福嶋²⁾は $E_0=0.003$, $n=1.5$ が適当であるとしている。しかしべき乗則では $Ri \rightarrow 0$ の場合に $E \rightarrow \infty$ になってしまうことから、Parker ら³⁾は以下の式を提案している。

$$E=0.075/(1+718 \cdot Ri^{2.4})^{0.5} \quad (2)$$

式(1)と式(2)は、 Ri が1以上の範囲では、両対数紙上で概ね直線となる。このタイプの連行則を、ここではまとめて便宜的にI型の連行則と呼ぶ。

一方、Turner⁴⁾は、Ellison and Turner⁹⁾の傾斜プルームの実験結果を踏まえて、次の経験式を提示している。

$$E = (0.08 - 0.1Ri)/(1+5Ri) \quad (3)$$

この式の特長は、 Ri が増加するにつれて E が急激に減少する点にある。なお Akiyama ら⁵⁾は、自身の実験データをもとに式(3)の係数を若干修正している。このタイプの連行則を、ここでは便宜的にII型の連行則と呼ぶ。

式(2)と式(3)を既存の実験データとともに図-1に示す。実験データとの比較においては、両方とも概ね適合していると言える。これは要するに、どちらの式も実験結果にもとづく経験式であるからである。両者の違いを識別するにはより大きな Ri またはより小さな E を生じる実験を行う必

要があると考えられる。しかしながら $Ri \rightarrow$ 大、 $E \rightarrow$ 小とするためには勾配を水平に近くする必要があり、その結果として、小規模の室内実験では十分発達した乱流状態を保つことが難しくなる。

長尾ら⁶⁾は、小川原湖に発生する塩水傾斜プルームの現地観測を行い、同プルームの Ri と E を推定している。この傾斜プルームは、流動層厚が数十 cm から1 m、流速が数十 cm/sec であり、斜面勾配が0.25度という緩斜面であっても十分乱流状態であった。(一般に現地計測の精度は室内実験のそれに比べて劣ると考えられているが、同現地観測では室内実験に比して遥かに長い区間での塩分濃度変化から連行量を推算しているので、連行速度の算定精度は悪くない。少なくとも両対数紙上で大きく動くような誤差は考えられない。詳しくは文献6)を参照頂きたい。)その観測結果は図-2に◎で示すとおりであり、室内実験データと組み合わせると、式(3)に代表されるII型の連行則の傾向を示している。

一方、福嶋⁷⁾は、 $k-\epsilon$ モデルにもとづいて傾斜プルームの連行則を解析的に推定するという画期的な試みを行っている。すなわち、傾斜プルーム内の物理諸量 S_i が次式で表される変数分離型の相似関数を持つと仮定して $k-\epsilon$ モデルの式を展開し、相似関数 $f_i(\eta)$ の連立微分方程式を導出し数値的に解析した。

$$S_i \propto x^p f_i(\eta) \quad (4)$$

ここに $\eta=y/x$, x は流下距離, y は斜面に垂直な座標, p は定数である。

従来の連行則が実験結果にもとづく経験的な手法によっていたのに対し、福嶋の研究はほとんど実験に依存しない解析的手法によっているという点で高く評価できる。その結果は図-3に○で示すとおりであり、II型の連行則と同様の傾向を示している。(ただし、福嶋自身は論文の中ではこの点に言及していない。)

以上の事柄を総合し、筆者らは次のように考えた。すなわち、①傾斜プルームの連行則は、せん断密度流について広く受け入れられている¹⁰⁾I型(すなわちべき乗則)と異な

り, Turner⁴⁾や Akiyama ら⁵⁾が提示しているII型の式に従う可能性がある。②そのII型の連行則の傾向は, k-ε モデル等の乱流モデルにおいて計算条件を系統的に変化させることにより, 数値的に導出できるかもしれない。

以下の解析では, 福嶋と同様に, まず相似分布の仮定にもとづいて k-ε モデルの無次元方程式を導き, 種々の条件下での解を求める。その結果を Ri~E 面にプロットして, 両者の関係の特徴を調べる。ただし本研究の方法は, 以下の点で福嶋の方法と異なる。一つは, 福嶋が無視している「圧力偏差項」を考慮する点である。(ただしこの項の影響はそれほど大きくない。) 今一つは, 微分方程式を離散化して詳細な解を求めるのではなく, 境界層の近似解法⁸⁾と同様の手法で, 積分型のマクロな解析を行うことである。k-ε モデルの式は高次の非線形項を含むので, 詳細な解を求めようとするとかかなりの労力を要し, 多数の条件下での計算をこなすのは大変になる。しかし, 本研究で知りたいものは, 流速分布等の詳細ではなく, 連行則というマクロな関係式であるから, 積分型の近似解法でも十分求められると考えた。

3. 解析方法

(1) 基礎方程式

解析の基礎方程式は以下のとおりである。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = eg \sin \theta - g \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} \int_y^\infty e dy + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (6)$$

$$u \frac{\partial (eg)}{\partial x} + v \frac{\partial (eg)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu}{\sigma_g} \frac{\partial (eg)}{\partial y} \right) \quad (7)$$

$$u \frac{\partial k}{\partial x} + v \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \cos \theta \frac{\nu}{\sigma_g} \frac{\partial (eg)}{\partial y} - \varepsilon_d \quad (8)$$

$$u \frac{\partial \varepsilon_d}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon_d}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon_d}{\partial y} \right) + C_1 \frac{\varepsilon_d}{k} \left\{ \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + (1 - C_3) \cos \theta \frac{\nu}{\sigma_g} \frac{\partial (eg)}{\partial y} \right\} - C_2 \frac{\varepsilon_d^2}{k} \quad (9)$$

$$\nu = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon_d} \quad (10)$$

ここに, x: 斜面に沿って流下する方向に取った座標, y: 斜面に垂直で上向きに取った座標, e: 相対密度差, u, v: x 方向, y 方向の流速, k: 乱流運動エネルギー, ε_d: 逸散率, g: 重力加速度, θ: 壁面の傾斜角度, ν: 渦動粘性係数である。また, 係数 σ_g, σ_k, σ_ε, C_μ, C₁, C₂には, 標準値として次の値を与えた。

$$\sigma_g = 1/1.2, \sigma_k = 1.0, \sigma_\varepsilon = 1/0.77,$$

$$C_\mu = 0.09, C_1 = 1.44, C_2 = 1.92$$

また C₃は, 0~1 の間で色々な設定の事例があるが¹²⁾ 本研究では 0 から 1 の間で変化させ, 計算結果への影響を見ることにした。

(2) 相似分布を仮定した無次元方程式

福嶋⁷⁾の研究成果を参考に, 各変数を次のように置く。これらの式形は, 式(4)の相似関数を仮定して式(5)~(10)に代入することにより必然的に定まるものである。

$$u = U_0 f_u(\eta) \quad (11a)$$

$$v = V_0 f_v(\eta) \quad (11b)$$

$$eg = E_0 x^{-1} f_e(\eta) \quad (11c)$$

$$k = K_0 f_k(\eta) \quad (11d)$$

$$\varepsilon_d = \varepsilon_{d0} x^{-1} f_\varepsilon(\eta) \quad (11e)$$

$$\nu = \nu_{d0} x f_\nu(\eta) \quad (11f)$$

ここに, ηは y/x であり, f_u, f_v, f_e, f_k, f_εはそれぞれ u, v, e, k, ε に対する相似関数である。式(11)を式(5)~(10)に代入して整理すると以下の無次元方程式が得られる。

$$\eta f'_u - f'_v = 0 \quad (12)$$

$$\eta f_u f'_u - f_v f'_u + f_e - \cot \theta \eta f'_e + (f_\nu f'_u)' = 0 \quad (13)$$

$$f_e f_u + \eta f_u f'_e - f_v f'_e + \frac{1}{\sigma_g} (f_\nu f'_e)' = 0 \quad (14)$$

$$\eta f_u f'_k - f_v f'_k + \frac{1}{\sigma_k} (f_\nu f'_k)' + f_\nu f_u'^2 + \frac{1}{\sigma_g} (\cot \theta f_\nu f'_e) - f_\varepsilon = 0 \quad (15)$$

$$f_u f_\varepsilon + \eta f_u f'_\varepsilon - f_v f'_\varepsilon + \frac{1}{\sigma_\varepsilon} (f_\nu f'_\varepsilon)' + C_1 \frac{f_\varepsilon}{f_k} f_\nu f_u'^2 + C_1 (1 - C_3) \frac{1}{\sigma_g} \cot \theta f_\nu f'_e - C_2 \frac{f_\varepsilon^2}{f_k} = 0 \quad (16)$$

ここで, ' (プライム) は η で微分することを示す。また, f_ν は無次元の渦動粘性係数であり, 次式で定義される。

$$f_\nu = C_\mu f_k^2 / f_\varepsilon \quad (17)$$

なお, この導出過程では, 各物理量のスケールファクターの間に以下の関係を設定している。

$$\frac{E_0 \sin \theta}{U_0^2} = 1, \frac{\nu_{d0}}{U_0} = 1, \frac{K_0}{U_0^2} = 1, \frac{\varepsilon_{d0}}{U_0^3} = 1 \quad (18)$$

式(13)の下線を施した項は圧力勾配項であり, 福嶋の式では省略されているが本研究では考慮している。ただし結果に対しての寄与はさほど大きくない。

境界条件については次のように取り扱う。まず η→∞ では ν を除く全ての変数がゼロに漸近する。すなわち,

$$\eta = \infty \text{ で, } f_u = 0, f_e = 0, f_k = 0, f_\varepsilon = 0 \quad (19)$$

次に η=0 では, u, e, k, ε のフラックスと流速 v は 0 とする。

$$\eta = 0 \text{ で, } f'_u = 0, f'_v = 0, f'_e = 0, f'_k = 0, f'_\varepsilon = 0 \quad (20)$$

すなわち本研究では、福嶋⁷⁾と異なり、壁面上での境界層を考慮せず、壁面での摩擦力も 0 とする。その理由は以下のとおりである。第一に、境界層の速度分布形は壁面の粗さによって変化するはずだから、傾斜プルームの上部と下部の両方を含んだ一般的な相似性が成り立つことは期待できない。第二に、底面摩擦を与えると壁面せん断層で乱れエネルギーが生成され、連行速度に影響を及ぼすはずである。その結果として、連行速度(E)とリチャードソン数(Ri)の間に一価関係を期待できなくなるであろう。実はそれが現実であると言える。つまり、壁面粗度の粗さの違いによっても連行速度は変化する。したがって逆に、E と Ri の一価関係としての連行則を議論するためには、界面でのせん断による乱れが壁面せん断による乱れに卓越する状況を設定せざるを得ないのである。そこで本研究では、斜面上の摩擦応力を 0 とする。この操作に対して「非現実的だ」との批判があるかもしれない。しかし、壁面の粗滑の自由度を消去して内部界面の乱流混合を純粋に評価することを目的とした、一つの思考実験と考えていただきたい。

(3) Galerkin 方程式

式(12)～(16)は高次の非線形微分方程式であり、数値解を厳密に得るには労力を要する。そこで、本研究では、Galerkin 法を用いて微分方程式を積分することにより、代数方程式に直して近似解を求める。 $f_u \sim f_v$ の各関数を次のように設定する。

$$f_u = u_0(1 - \xi) \quad (21a)$$

$$f_v = v_0\xi \quad (21b)$$

$$f_e = e_0(1 - \xi) \quad (21c)$$

$$f_k = k_0f(\xi) \quad (21d)$$

$$f_\varepsilon = \varepsilon_0f(\xi) \quad (21e)$$

$$f_\nu = \nu_0f(\xi) \quad (21f)$$

ここに $u_0, v_0, e_0, k_0, \varepsilon_0, \nu_0$ は定数、 $\xi = \eta / \delta$ 、 δ はプルーム層厚であり、 $f(\xi)$ は次式で表される関数である。

$$f(\xi) = \begin{cases} 2\xi & (0 < \xi < \frac{1}{2}) \\ 2(1 - \xi) & (\frac{1}{2} < \xi < 1) \end{cases} \quad (22)$$

なお、これらの試験関数の設定にあたっては、福嶋⁷⁾の計算結果を参考にしている。

式(21)の試験関数は式(20)の自然境界条件を満足していない。Galerkin 法では、次に述べる数学的操作で境界残差を残すことにより、自然境界条件のもとでの近似解を得られる。式(21)を式(12)～(16)に代入し、重み関数を乗じて $\eta=0 \sim \infty$ まで積分する。ただし、各変量の試験関数を対応する方程式の重み関数とする。すなわち、

式(12)の重み関数 $\leftarrow \xi$

式(13), (14)の重み関数 $\leftarrow (1 - \xi)$

式(15), (16)の重み関数 $\leftarrow f(\xi)$

また、二階微分項については部分積分を行い、式(20)の中

$$\int_0^\infty (\eta f'_u - f'_v) w_v d\eta = 0 \quad (23)$$

$$\int_0^\infty (\eta f_u f'_u - f_v f'_u + f_e - \cot \theta \eta f_e) w_u d\eta - \int_0^\infty f_\nu f'_u w_u d\eta + |f_\nu f'_u w_u|_0^\infty = 0 \quad (24)$$

$$\int_0^\infty (f_e f_u + \eta f_u f'_e - f_v f'_e) w_e d\eta - \frac{1}{\sigma_g} \int_0^\infty f_\nu f'_e w'_e d\eta + \frac{1}{\sigma_g} |f_\nu f'_e w_e|_0^\infty = 0 \quad (25)$$

$$\int_0^\infty (\eta f_u f'_k - f_v f'_k + f_\nu f_u'^2 + \frac{\cot \theta}{\sigma_g} f_\nu f'_e - f_e) w_k d\eta - \frac{1}{\sigma_k} \int_0^\infty f_\nu f'_k w'_k d\eta + \frac{1}{\sigma_k} |f_\nu f'_k w_k|_0^\infty = 0 \quad (26)$$

$$\int_0^\infty \{ f_u f_e + \eta f_u f'_e - f_v f'_e + C_1 \frac{f_e}{f_k} f_\nu f_u'^2 + C_1(1 - C_3) \frac{\cot \theta}{\sigma_g} f_\nu \frac{f_e}{f_k} f'_e - C_2 \frac{f_e^2}{f_k} \} w_e d\eta - \int_0^\infty f_\nu f'_e w'_e d\eta + \frac{1}{\sigma_e} |f_\nu f'_e w_e|_0^\infty = 0 \quad (27)$$

その結果、多少の演算の後に式(21)の係数 $u_0, v_0, k_0, \varepsilon_0, \nu_0$ について、以下の代数方程式を得る。

$$\frac{v_0}{u_0} = -\frac{2}{3}\delta \quad (28)$$

$$\frac{\nu_0}{u_0} = \frac{\sigma_g}{9}\delta^2 \quad (29)$$

$$\frac{e_0}{u_0^2} = \frac{7 + 2\sigma_g}{3(4 - \cot \theta \delta)} \quad (30)$$

$$-\frac{1}{9}(1 + 2\frac{\sigma_g}{\sigma_k})(\frac{k_0}{u_0^2}) + \frac{\sigma_g}{27} - \frac{\cot \theta}{27}(\frac{e_0}{u_0^2})\delta - \frac{3C_\mu}{\sigma_g}(\frac{k_0}{u_0^2})^2\frac{1}{\delta^2} = 0 \quad (31)$$

$$-\frac{1}{2\sigma_g}(1 - 4\frac{\sigma_g}{\sigma_e})(\frac{k_0}{u_0^2}) + \frac{C_1}{3}\frac{1}{3}C_1(1 - C_3)\frac{\cot \theta}{\sigma_g}(\frac{e_0}{u_0^2})\delta - 27\frac{C_2C_\mu}{\sigma_g}(\frac{k_0}{u_0^2})^2\frac{1}{\delta^2} = 0 \quad (32)$$

5本の方程式に対して6個の未知数があるが、そのうち1つは任意に指定できる。というのは、式(18)が4本であるために、一つの変量についてはスケールリングが自由だからである。そこで、 $u_0=1$ とおくと次式となる。

$$v_0 = -\frac{2}{3}\delta \quad (33)$$

$$\nu_0 = \frac{\sigma_g}{9}\delta^2 \quad (34)$$

$$e_0 = \frac{7 + 2\sigma_g}{3(4 - \cot \theta \delta)} \quad (35)$$

$$-\frac{1}{9}(1 + 2\frac{\sigma_g}{\sigma_k})k_0 + \frac{\sigma_g}{27} - \frac{\cot \theta}{27}e_0\delta - \frac{3C_\mu}{\sigma_g}\frac{k_0^2}{\delta^2} = 0 \quad (36)$$

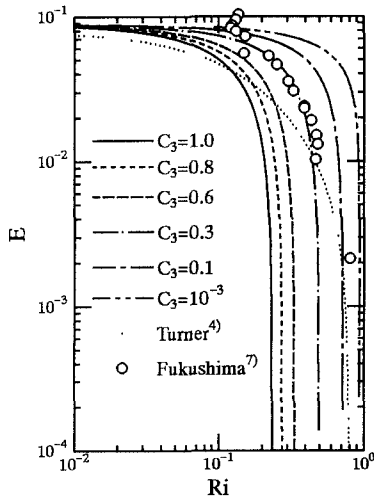


図-4 E と Ri の計算結果

$$-\frac{1}{2\sigma_g}(1-4\frac{\sigma_g}{\sigma_\epsilon})k_0 + \frac{C_1}{3} - \frac{1}{3}C_1(1-C_3)\frac{\cot\theta}{\sigma_g}e_0\delta - 27\frac{C_2C_\mu}{\sigma_g}\frac{k_0^2}{\delta^2} = 0 \quad (37)$$

式(36), (37)を変形し, 式(35)により e_0 を消去すると, δ に関する四次方程式を導くことができる. 得られた δ と式(33)~(37)より, 順次 v_0 , ν_0 , e_0 , k_0 , ϵ_0 を計算することができる.

また, Ellison and Turner⁹⁾の定義に基づく Ri と E の定義は, ここでは次のように求められる. 彼らの定義する代表流速 V の式に本論文の相似関数を代入すると, 次式となる.

$$V = \frac{\int_0^\infty u^2 dy}{\int_0^\infty u dy} = \frac{2}{3}U_0 \quad (38)$$

一方, 相対密度差のフラックス A は, 次のように求まる.

$$A = \int_0^\infty egudy = \frac{E_0 e_0 U_0 \delta}{3} \quad (39)$$

したがって, リチャードソン数は, 次式で表される.

$$Ri = \frac{A \cos\theta}{V^3} = \frac{9}{8} \cot\theta \delta e_0 \quad (40)$$

一方, 連行係数は次式となる.

$$E = \frac{1}{V} \frac{d}{dx} \left(\int_0^\infty u dy \right) = \frac{3}{4} \frac{\delta}{\delta} \quad (41)$$

4. 解析結果と考察

(1) 連行係数とリチャードソン数の関係

前述したように, $k-\epsilon$ モデルの係数 C_3 の適正值は定まっていない. そこで, 種々の C_3 について式(36)と式(37)を解いて δ を求め, Ri と E を計算した. その結果を図-4 に示す. また, 図中には, 福島⁷⁾の計算例と Turner⁴⁾の連行則(式(3))も示している.

得られた曲線群は, Ri が 0 に近づくとき E が一定値 (0.85) に漸近する. この値は, 密度効果のない場合の連行係数の値に近い. また, Ri が増加すると E は急激に減少する傾向

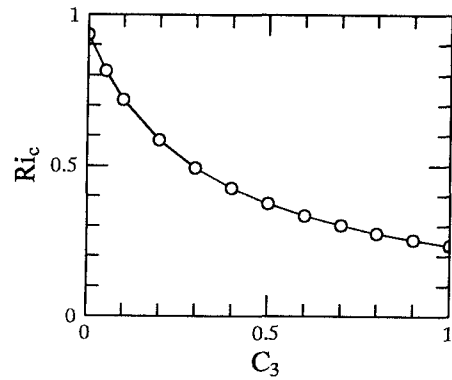


図-5 C_3 と Ri_c の関係

が見られる. すなわち, Turner らが提示している II 型の連行則と同様の特性を示す. ただし, E が急減する Ri の値は, C_3 の値によって異なる. また, Turner の連行則及び既存の実験結果に比べると, 曲線勾配の変化が急である. これが近似計算の精度の限界によるものか, $k-\epsilon$ モデルの性質によるものかは明確でない. しかし, 福島の計算例が同様の曲線に概ね沿っていることから, $k-\epsilon$ モデルの性質によっているのではないかと筆者らは考えている.

さて, 図-4 に示した計算結果では, Turner⁴⁾が提案した連行則と同様に Ri の上限が存在する. この限界状態は斜面勾配 (θ) がゼロになる場合に対応し, その値 (Ri_c) は, 図-5 に示すように, C_3 が 0 に近づくとき約 1 になる. この限界リチャードソン数 $Ri_c(\max)$ は, 式(8)に示した乱流運動エネルギー (TKE) の式からも概略推定できる.

式(8)の右辺第二項は TKE の生産率を表し, 第三項が乱流混合によるポテンシャルエネルギー変化率 (に負号を付けた量) を表す. 両者の大小関係は局所的には変化するが, プルーム層全体としては, 前者が後者より大きくならない. そこで, プルームの代表流速を U , 代表相対浮力を E , プルーム厚さを δ として, 上述の大小関係を層平均的に記述すれば, $\theta=0$ に対して次式を得る.

$$\nu \frac{U^2}{\delta^2} > \frac{\nu}{\sigma_g} \frac{Eg}{\delta} \implies Ri' (= \frac{Eg\delta}{U^2}) < \sigma_g \sim 1 \quad (42)$$

ただし, 概算であるため, 上式の Ri' は式(40)の Ri と多少異なる. 紙面の制約のために式の詳細をここでは記述できないが, 式(40)で定義される Ri に対しては, 若干の計算の後, 次式を得る.

$$Ri < \frac{9}{8}\sigma_g = 0.94 \quad (43)$$

本研究では Galerkin 法を用いて近似解を求めているので, その解は試験関数の設定の影響を受けるわけだが, Galerkin 法は層平均的バランスを重視した解法であるから, 上に述べた解の基本特性が変化することはないと考えられる.

(2) 分布形状の比較

近似解法の精度を見るために, 福島の数値計算例との比

較を行う。図-6 に、福島⁷⁾の論文に掲載されている Fig. 6 から、 $\theta = 10, 20^\circ$ の結果を抜粋した。この計算例では $C_3=0.6$ が採用されている。そこで福島と同様に式(13)中の下線を引いた項を省略し、 C_3 を 0.6 にした場合について、本論文の方法で計算した結果も示している。ただし、福島⁷⁾の計算例と比較できるように、福島と同じ無次元パラメータを採用している。

この図からわかるように、両者の無次元プルーム層厚は概ね一致している。また、各無次元量の大きさも、ほぼ一致している。したがって、積分量のレベルでの釣り合い関係は、二つの解析でそれほど大きな差がないと言える。

5. おわりに

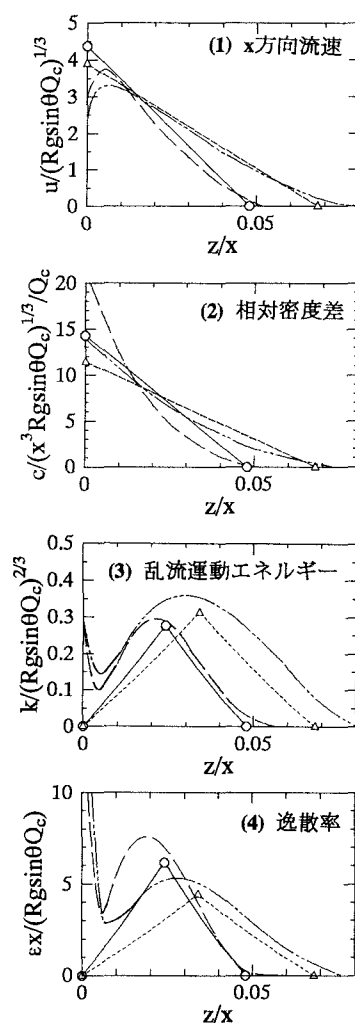
傾斜プルームに関する従来の研究の多くは、室内実験データを拠り所としていた。その結果として、 Ri と E の関係がベキ関数で表現される I 型と、 Ri の増加とともに E が急減する II 型の連行則が提案されているが、どちらも同様の実験データに依っているため、その優劣は明確でなかった。これに対して福島は、 $k-\epsilon$ モデルと相似仮説から連行則を解析的に導くという画期的な手法を提示した。

筆者らは、福島の研究に触発され、同様の立場に立ちながらやや異なる手法で検討を行った。すなわち、相似仮説に基づく $k-\epsilon$ モデルの無次元微分方程式を Galerkin 法によって代数方程式化し、パラメーターを系統的に変化させて多数の条件での解を求め、それを $Ri-E$ 面にプロットすることにより、I 型と II 型の連行則のいずれの傾向が現れるかを調べた。その結果は Turner や Akiyama らが提案している II 型の連行則と同様の傾向を示した。

ただし、これをもって II 型の連行則が正しいと結論付けるのは適当でない。福島や筆者らが採用した $k-\epsilon$ モデル自体が、普遍的に正しい乱流モデルとは言えないからである。連行則の適否は、最終的には実験及び現地観測によって確認されるべきものである。しかしながら、実験実測データが十分でない現在、このような解析が提供する資料が連行則を推測する上で有益であると言える。

参考文献

- 1) 江頭進治: 密度成層場の流れと混合に関する基礎的研究, 京都大学学位論文, p17, 1980.
- 2) 福島祐介: 成層化した貯水池に流入する濁水の流動機構に関する基礎的研究, 東京大学学位論文, p.77, 1981.
- 3) Parker, G., Garcia, M., Fukushima, Y. and Yu, W.: Experiments on turbidity currents over an erodible bed, J. Hydraulic Res., IAHR, Vol.25, No.1, 123-147, 1987.
- 4) Turner, J.S.: Turbulent entrainment: the development of the entrainment assumption, and its application to geophysical flows, J. Fluid Mech., Vol.173, pp.431-471, 1986.
- 5) Akiyama, J., Ura M. and Wongs S.: Unsteady numerical model of two-dimensional starting plumes traveling downslope, J.



—○— Present Study($\theta=10^\circ$) —△— Fukushima⁷⁾ $\theta=10^\circ$
 - - - Present Study($\theta=20^\circ$) - - - Fukushima⁷⁾ $\theta=20^\circ$

図-6 福島⁷⁾の相似関数との比較 ($\theta = 10^\circ, 20^\circ$)

- Hydroscience and Hydraulic Eng., Vol.12, No.2, pp.17-30, 1994.
- 6) 長尾正之, 石川忠晴, 長島伸介: 小川原湖に発生する傾斜プルームの現地観測と連行係数の推算, 土木学会論文集, Vol.579/II-41, pp.105-114, 1997.
 - 7) 福島祐介: 乱流モデルによる傾斜壁面密度噴流の解析, 土木学会論文集, Vol.399/II-10, pp.65-74, 1988.
 - 8) Schlichting, H.: Boundary Layer theory, McGraw-Hill, pp.238-265, 1955.
 - 9) Ellison, T.H. and Turner, J.S.: Turbulent entrainment of stratified flows, J. Fluid Mech., Vol.6, pp.423-448, 1959.
 - 10) 福岡捷二, 福島祐介, 中村健一: 2次元貯水池密度流の潜り込み水深と界面形状, 土木学会論文報告集, No.302, pp.55-65, 1980.
 - 11) 玉井信行: 連行概念の統一化と連行係数の評価法, 土木学会論文集, No.381/II-7, pp.1-11, 1987.
 - 12) 数値流体力学編集委員会編: 乱流解析, 東京大学出版会, p.229, 1995.

(1998. 9. 30 受付)