

単列砂州の形状特性値と伝播特性値の 予測手法に関する比較研究

COMPARISON OF NUMERICAL METHOD WITH ANALYTICAL METHOD FOR PREDICTING GEOMETRIC AND MIGRATION CHARACTERISTICS OF ALTERNATE BARS

竹林 洋史¹・江頭 進治²・黒木 幹男³

Hiroshi TAKEBAYASHI, Shinji EGASHIRA and Mikio KUROKI

¹学生会員 工修 立命館大学大学院 理工学研究科 (〒525-8577 滋賀県草津市野路東 1-1-1)

²正会員 工博 立命館大学教授 理工学部土木工学科 (〒525-8577 滋賀県草津市野路東 1-1-1)

³フェロー 工博 北海道大学大学院助教授 工学研究科 (〒060-0813 札幌市北区北 13 条西 8 丁目)

We have tested the suitability of two non-linear analyses of the geometric and migration characteristics of alternate bars formed between rigid vertical walls of a straight channel. The development of alternate bars were predicted. The wave height obtained by an analytical method is higher than that obtained by a finite difference method (FDM). The difference is caused by higher wave number components in the simulated flow. The difference in the migration velocity between these analyses is large, which is caused by the difference of the bed geometry structure. It is found that the secondary flow which is estimated in the FDM by the stream line curvature affects the wave height very much. The wavelength of alternate bars produced by a bed disturbance located in the upstream end of the computational domain was found to be close to the wavelength obtained by a linear analysis.

Key words: *alternate bar, analytical method, numerical analysis, geometric characteristics, migration characteristics*

1. はじめに

近年、河川環境に対する関心の高まりとともに、瀬や淵の重要性が認識され、河床形態を考慮した河川整備が進められつつある。単列砂州の形状特性値と伝播特性値を把握することは、治水面において重要であるばかりでなく、このような河川環境の整備を行う上でも重要である。

砂州の形状特性値と伝播特性値に関する解析的な研究は、河床安定論による方法が一応の成功を納めているようである。波長と伝播速度に関しては線形解析^{1), 2), 3)}、波高に関しては非線形解析^{4), 5), 6)}が行われており、平均的な値の予測は可能になっている。また、数値解析^{7), 8)}による形状特性値と伝播特

性値の予測も近年行われてきている。これらの解析法には、それぞれ特徴がある。線形解析や非線形解析のような解析的研究は、解析解が得られるため、各水理量と砂州の各特性値との関係を把握しやすい。数値解析は、場の条件を操作しやすく、解析的研究よりも複雑な現象を取り扱える。

しかしながら、これらの解析的な予測手法から得られる解と数値解析によるそれとは、必ずしも一致しない。ところが、それぞれの解析結果の相違について十分に把握されていない部分が多い。そこで、本研究では、解析的な予測手法と数値解析によるそれとの結果を比較し、両予測手法の関係を明白にしていく。また、これらの予測手法の比較検討により、それぞれの解析が、現在抱えている問題点の解決法を検討する。

2. 解析方法

(1) 基礎方程式

流れは平面二次元モデルによるものを使用する。流れの連続式、運動方程式は、慣用の記号を用いれば以下のようなものである。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) + \frac{\partial}{\partial y}(vh) = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \\ -g \frac{\partial}{\partial x}(h+z) - \frac{\tau_x}{\rho h} + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial y} \left(vh \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial}{\partial y}(h+z) - \frac{\tau_y}{\rho h} \quad (3)$$

ここに、 z は河床位、 ν は渦動粘性係数である。河床せん断力の方向は次のように表現し、流れの方向と一致させる。

$$\frac{\sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}}{\rho} = \frac{\tau_b}{\rho} = \frac{u^2 + v^2}{[6 + 2.5 \ln(h/2d)]^2} \quad (4)$$

流砂量式には、M. P. M.式⁹⁾を用い、掃流砂のみを対象にする。また、掃流力に対する流砂の遅れ距離は考慮していない。流砂の方向は、慣用の記号を用いて次のように表現する。

$$q_{bx} = q_b \cos \theta_s, \quad q_{by} = q_b \sin \theta_s \quad (5)$$

$$\theta_s = \frac{\nu}{\sqrt{u^2 + v^2}} - \sqrt{\frac{1}{\mu \mu_c} \frac{\tau_{*c}}{\tau_*} \frac{\partial z}{\partial y}} \quad (6)$$

ここに、 μ は動摩擦係数、 μ_c は静止摩擦係数である。河床位方程式は次のようである。

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial q_{bx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{by}}{\partial x} \right) = 0 \quad (7)$$

ここに、 λ は砂の間隙率である。

(2) 解析方法

a) 解析解

解析方法は、黒木ら⁹⁾と同様の摂動法による非線形解析である。(1)で非定常項を含んだ流れの支配方程式を示したが、解析解ではこれらの項を無視する。河床形状は主要な二つのモードの和である次式を用いて表す。

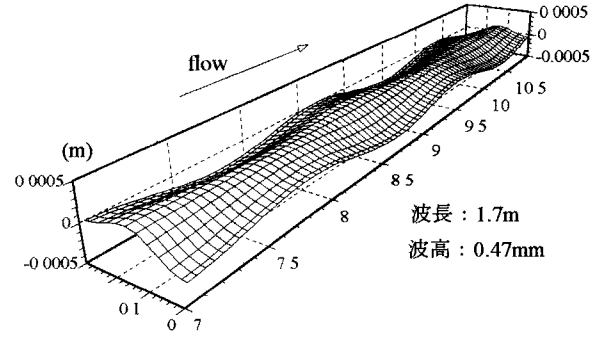


図1 初期河床形状

表1 解析条件

流量	平均水深	無次元掃流力	平均粒径	河幅
0.75 l/s	7.20 mm	0.12	0.43 mm	30cm

$$z = a_1 \cos(kx) \cos(ly) - a_2 \cos(2ly) \quad (8)$$

ここに、 k 、 l はそれぞれ流下方向、横断方向の波数、 a_1 、 a_2 は各モードの振幅である。初期河床形状を図1に示す。ここで、各振幅の初期値として波高が平均粒径程度となる $a_1 = a_2 = 0.15\text{mm}$ を用いている。各振幅の初期値は、初期の発達過程に影響を与えるが平衡値には影響を与えない。ここで、流下方向の波数には、線形解析から得られる「振幅の初期増幅率が極大になるもの（本解析では波長は1.7m）」を用いている。この点については後述するが、「初期増幅率が極大」の波長と砂州が平衡状態の波長との間にほとんど差がないためである。摂動のパラメータには、河床形状の第一成分の振幅 a_1 を採用する。また、 a_1 のオーダーと a_2 のオーダーを同程度と見なし、 a_1^2 のオーダーまで解析を行う。

b) 数値解

砂州上の流れは、水理条件により常流と射流が混在した流れになる。そのため、流れの支配方程式は、TVD-MacCormack scheme¹⁰⁾により離散化する。黒木ら¹¹⁾によると、上流に伝播する単列砂州は理論的には存在するが、本条件では、砂州は下流に伝播する領域である。そのため、河床位方程式の離散化には、風上差分を用いる。

初期河床形状には、解析解と同様に式(8)で表される河床形状を与えている。ここで、各振幅の初期値を図1の1/100とした計算も試みたが、平衡値に影響はなかった。波長には、解析解と同様に、線形解析から得られるものを与えている。

c) 解析条件

水理条件と河床材料を表1に示す。水路は、幅30cm、勾配0.014の直線矩形水路である。これらの条件は、長谷川¹²⁾によるものであり、黒木ら³⁾によると単列砂州の発生領域である。また、河床材料には一様砂を用いている。

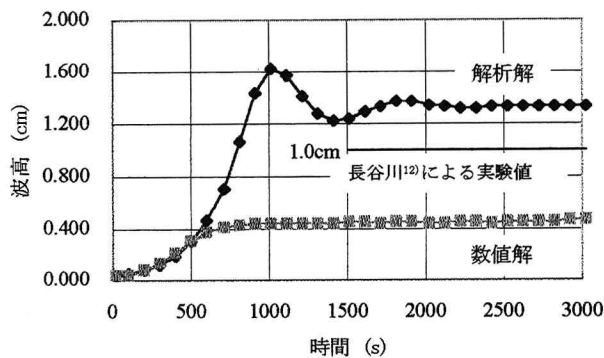


図2 波高の時間的変化

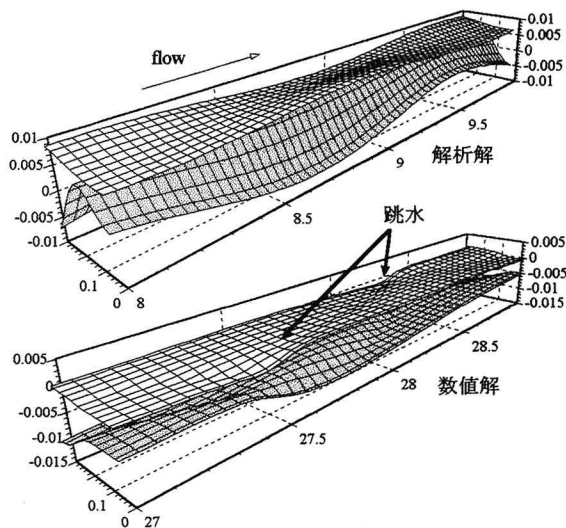


図3 平衡河床形状と水面形

3. 解析結果の比較

(1) 波高

両解析の波高の時間的変化を図2に示す。まず、波高の平衡値についてみると、両解析の差は極めて大きい。そこで、河床形状と水面形を比較してみる(図3)。解析解による河床形状は、式(8)で与えられるため、クレストに対して上下流で対称となっているが、数値解析によるものは、式(8)の形状に比べ、クレスト上流側がなだらかで、下流側が急な勾配となっている。また、解析解は、数値解に比べ水路中心部が大きく盛り上がり、式(8)の a_2 の値が大きいことが予想される。水面形状は、クレスト周辺で水深が浅く、トラフで水深が深くなっている点では共通している。しかし、数値解では、クレスト下流部で跳水が生じている。解析解では、河床形状とともにその他の水理量も式(8)のように主要な二つのモードの和で表現しているため、数値解で表現されている河床形状や水面形の不連続は表現できない。

そこで、砂州上の流れの再現性の違いが河床形状に与える影響を検討するため、解析的に得られた河

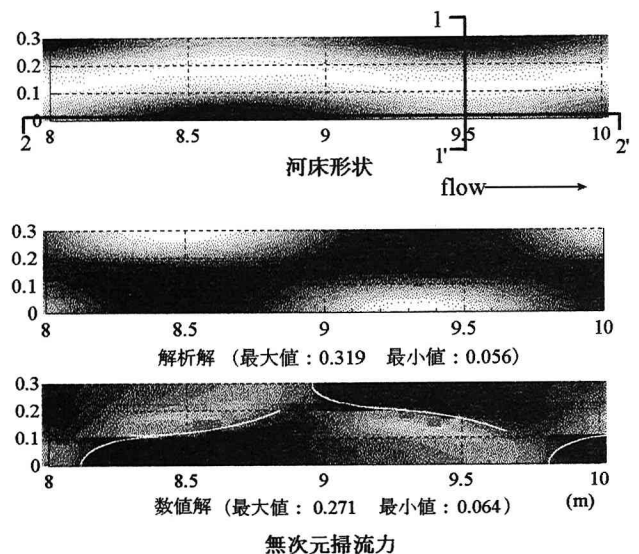


図4 河床形状と無次元掃流力分布(白い部分が大きい値、黒い部分が小さい値を示す。)

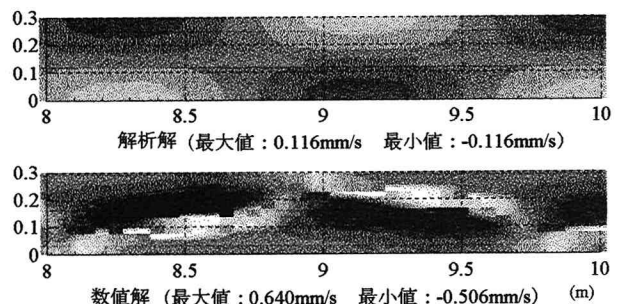


図5 $\partial z / \partial t$ の分布(白い部分が大きい値、黒い部分が小さい値を示す。)

床形状上の流れを数値解析で求め、解析解と比較する。

図4に無次元掃流力分布を示す。解析解に比べ、数値解では、掃流力の大きい領域が水路中心部に生じている。また、跳水が図中の白線で示す位置に生じており、跳水下流で無次元掃流力が減少していることがわかる。

これらの無次元掃流力分布の違いが河床形状に与える影響を検討するため、河床位方程式から得られる $\partial z / \partial t$ の値の分布を調べる。図5に $\partial z / \partial t$ の分布を示す。解析解では、下流へ伝播する式(8)の a_1 のモードが示す形状により分布が形成されている。しかし、数値解では、河床位の高い領域で洗掘、跳水部分とその下流で堆積が生じている。

図4に示す河床形状を初期河床形状として、数値解析により100s間河床変動計算を行い、初期河床形状と比較したものを図6に示している。これによれば、波高が低くなり、河床形状が歪んでいるのが判る。ここで、図4の数値解析による無次元掃流力分布を二重Fourier級数展開し、各波数成分の振幅の値を求め、図7に示す。図7より、河床形状が二つのモードから構成されているにも関わらず、その

他の成分がかなり含まれている。また、無次元掃流力の a_2 の値は小さく、同程度、もしくはそれ以上の成分が他に存在する。図8に図4に示す河床形状を初期河床形状として、数値解析により、300s 間河床変動計算した後の河床形状が持つ各波数成分の振幅の値を示す。図7と比較すると、同一の波数成分の振幅の値が大きくなっていることが判る。これは、流れ（無次元掃流力分布）の中の a_1 と a_2 以外の波数成分が、河床の a_2 成分を減衰させるとともに、 a_1 と a_2 以外の波数成分を発達させ、平衡波高の違いに影響を与えていると考えられる。

波高の定義も結果に影響を与える。これを調べるため、波高の定義として(1)横断面の高低差の同一砂州における最大値、(2)同一砂州の最高点と最低点の差の二つ考える。解析解では、(1)と(2)は同じ値を取る。しかし、数値解では(1)よりも(2)の方が必ず大きくなる。これは、主モード以外の波数成分が河床形状に含まれることにより、河床形状が歪み、同一砂州の最高点と最低点が同一断面に生じないためである。このように、(1)の定義は砂州形状を正しく評価しないと適用が難しいと思われるため、本研究では(2)の定義を用いている。定義(1)を用いると、両解析の波高差はいっそう広がる。

平衡波高に到達する過程も両解析で異なっている。解析解では、平衡値に達する前に一度ピークを持つ。このようなピークは、 a_1 と a_2 の相互作用により生じるものであり、 a_2/a_1 の減少とともにこのピークは消えていく。今回の条件では、解析解で $a_2/a_1=0.98$ であるが、数値解では、 $a_2/a_1=0.16$ と小さい。そのため、数値解析では、 a_1 と a_2 の相互作用が小さくなり、ピークが見られない。

(2) 伝播速度

表2に両解析の伝播速度の値を示す。両解析の差は大きい、この差は、 a_2 の値の違いによる。解析解では、伝播速度 V_s は次の様に表される。

$$V_s = (C_1 + C_2 a_2) / k \tag{9}$$

ここに、 C_1 と C_2 は定数である。本条件では、 C_2 は正であり、 a_2 の値が大きければ伝播速度が大きくなる。 a_2 の値の違いが伝播速度の違いにどの程度影響を与えているかを検討するため、数値解析から得られる a_2 の値を式(8)に用いた値も表2に解析解2として示している。この結果から、伝播速度の違いは、 a_2 の値の違いによることがわかる。また、図として表現していないが、数値解において、伝播速度は波高発達過程においてほぼ一定である。ここで、式(9)において $a_2 = 0$ とすれば、伝播速度は振

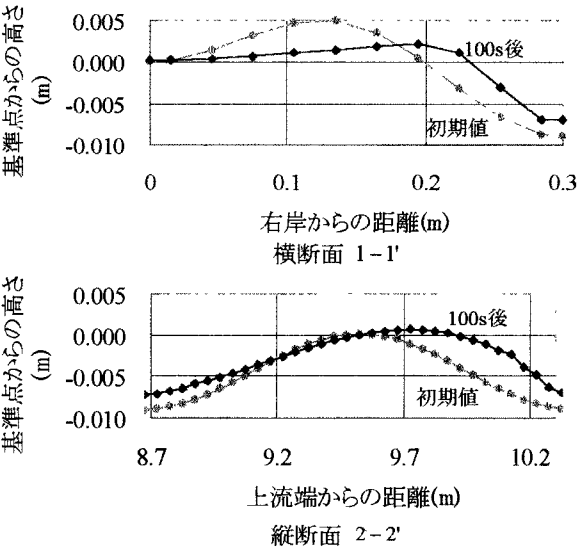


図6 流れの高波数成分による河床形状の変化（各断面の位置は、図4に示されている。100s後の値は、砂州の伝播を考えて、初期値と位相を合わせている。）

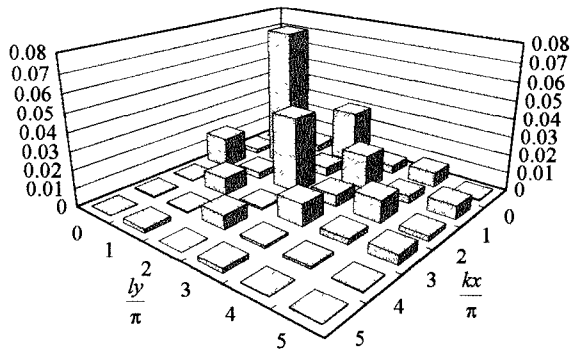


図7 数値解析により得られた無次元掃流力分布が持つ各波数成分の振幅

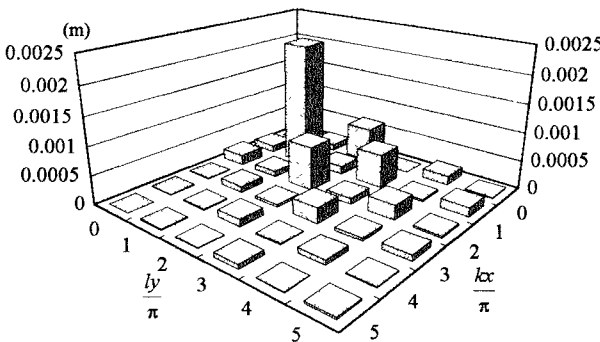


図8 300s後の河床形状が持つ各波数成分の振幅

表2 伝播速度と a_2			
	解析解1	数値解	解析解2
伝播速度 (cm/s)	0.73	0.40	0.45
a_2 (mm)	4.24	0.32	0.32

幅に依存しない。数値解において a_2 が小さいことを考えれば、伝播速度が波高発達過程において一定となることは、式(9)を用いて説明できそうである。

4. 解析手法の問題点

(1) 渦動粘性係数

上記のように、本条件では両解析結果に違いが見られた。これらの違いの主な原因は、 a_2 の算定法にあると思われる。本解析では、渦動粘性係数 $\nu = rU_*H$ の中で、無次元渦動粘性形数として黒木ら⁹⁾と同様に、 $r=10$ を用いている。ここで、 U_* と H は、それぞれ平均流での摩擦速度と等流水深である。しかし、平面二次元解析で一般的に用いられる $r = \kappa/6$ の値と比較すると、約 150 倍の値である。これは、解析解では、無次元渦動粘性係数として $r = \kappa/6$ を用いると、 a_2 の値が発散してしまうためである。つまり、渦動粘性係数として極端に大きい値を用いることによって、 a_2 の発達を抑制していることになる。しかし、もともと $r=10$ という値そのものに理論的根拠がないためか、本条件では、 a_2 の値が抑制されていない。また、数値解析の結果を考え合わせると、主モード以外の流れの波数成分による a_2 の抑制を表現できれば、無次元渦動粘性係数として $r = \kappa/6$ を用いても平衡波高が得られそうである。図 9 に、 $r = \kappa/6$ を用いて数値解析を行ったときの波高と a_1 、 a_2 の時間的变化を示す。この図からもわかるように $r = \kappa/6$ を用いても a_2 は平衡値を得る。

(2) 二次流と側壁粗度

数値解析による平衡波高は、水路実験の値と比較するとかなり小さい。これには、以下のような理由が考えられる。

① 流砂の方向を算定するとき水深平均流速を用いている。

② 側壁粗度の影響を考慮していない。
ここで、②に関しては、従来注目されていないが、Shen¹³⁾らにより側壁粗度が大きくなると波高が高くなるという報告がある。

これらの影響を検討するために表 3 に示す 3 ケースの数値解析を行う。まず、Case1 として、水深平均流速の流線の曲率より予測した河床近傍の流速の方向を流砂の方向を決定するとき用いるとともに、側壁において $\tau_{21} = \rho u_*^2$ として計算を行う。河床近傍の流速は以下のようにして求める。

$$u_b = 8.5u_*, \quad v_b = v + v_b', \quad v_b' = -N_* \frac{h}{R} u_b \quad (10)$$

ここに、 u_b と v_b は、それぞれ流下方向と横断方向の河床近傍の流速である。 N_* は Engelund¹⁴⁾ にならって $N_* = 7.0$ を用いている。 R は流線の曲率である。

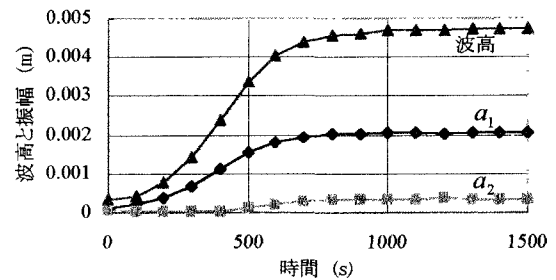


図 9 $r = \kappa/6$ での波高と振幅の時間的变化

表 3 計算条件と平衡波高

	Case1	Case2	Case3
流砂方向の 算定流速	河床近傍の 流速	平均流速	河床近傍の 流速
側壁粗度	$\tau_{21} = \rho u_*^2$	$\tau_{21} = \rho u_*^2$	$\tau_{21} = 0$
平衡波高	6.7mm	3.9mm	6.3mm

この Case1 が基本ケースとなる。Case2 は、水深平均流速の方向を流砂の方向を決定するとき用いる。Case3 は、側壁において $\tau_{21} = 0$ とする。また、全ての解析において $r = \kappa/6$ を用いているとともに式(3)と(4)に σ_{11} 、 τ_{12} 、 σ_{22} の乱流拡散成分を考慮している。各ケースの平衡波高を表 3 の最終行に示している。

流砂の方向を決定するとき平均流速を用いると波高が 58% まで低くなっている。ほとんどの線形解析では、二次元浅水流流れとして砂州上の流れを扱っている。黒木ら¹¹⁾によると、領域区分と波長に関しては、二次流の影響は小さいようであるが、波高に関しては、大きく影響している。実際に、同一条件での三次元流れによる解析では、波高は、約 8.9mm で平衡値に達している⁸⁾。側壁粗度の影響はそれほど大きくないが、粗度が大きくなると波高は高くなるようである。

(3) 波長

ここまでの解析では、解析解と数値解を比較するため、数値解析において、初期河床形状として式(8)で表される微小擾乱を計算区間全体に与えている。ここで、波長として線形解析から得られる「振幅の初期増幅率が極大」のものを採用しているが、従来からこの波長が砂州が発達した状態の波長を表しているかどうか問題となっている。そこで、二種類の数値解析を行い、砂州上の流れの非線形性が波長に与える影響を検討した。一つ目は、Case4 として、図 10 に示すように、計算区間上流部に微小擾乱を与えたものを初期河床形状とし、これにより、単列砂州を発生させ、波長の時間的变化を追跡する。二つ目は、初期河床形状は Case4 と同様であるが、式(6)の右辺第二項目の値を二倍にした計算である。この様な操作を行うと、平衡波高を低くでき、Case4 よりも非線形性の弱い流れの状態が再現でき、非線

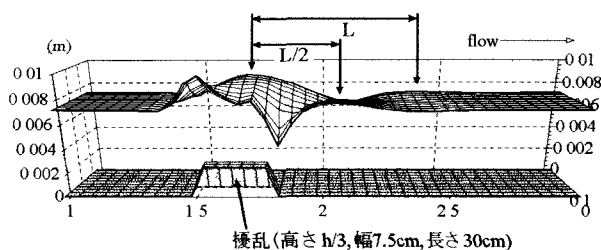


図 10 初期河床形状に与える擾乱と河床擾乱により発生する水面形 (L は定在波の波長であり、本条件では、約 0.75m である)

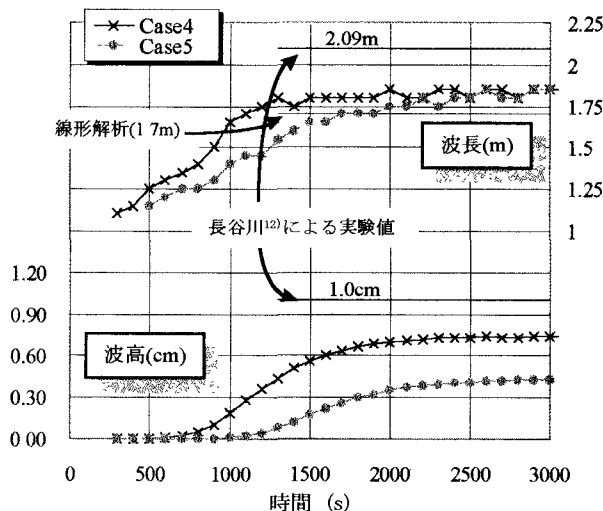


図 11 波高の高さが平衡波長に与える影響

形性が波長に与える影響を検討できる。この計算を Case5 とする。また、周期境界条件は、波長の長さがある程度決定するため、本研究の全ての数値解析において用いていない。Case4 と Case5 の波長と波高の時間的変化を図 11 に示す。両ケースの波高差は、約 2 倍あるが、波長はほとんど変わっていない。これは、砂州上の流れの非線形性が、波長にほとんど影響を与えないことを示している。また、両ケースとも時間と共に波長が伸びている。これは、図 10 に示すように、上流側の擾乱により下流側の水面に定在波が生じる。この定在波の波長が河床に砂州が現れた時の初期波長となっている。つまり、波長が伸びる過程は、水面の定在波の波長（流砂とは無関係）が砂州の波長になるまでの過程である。

5. 結論

解析解と数値解を比較することにより、両予測手法の関係を明らかにするとともに、両解析法の問題点を検討した。本研究により得られた結果をまとめると以下ようになる。

- (1) 砂州上の流れは、主要なモード以外の波数成分を含み、これらの波数成分は、特に a_2 の発達を抑制し、波高を低くしている。

- (2) 砂州の伝播速度は、解析解と数値解とで大きく異なるが、これは、 a_2 の値の違いである。
- (3) 二次流の存在は、波高をかなり高くする。
- (4) 側壁粗度が、波高に与える影響は、小さいが粗度が大きくなると波高は高くなる。
- (5) 砂州上の流れの非線形性は、砂州の波長にほとんど影響を与えない。

参考文献

- 1) Fredsøe, J.: Meandering and braiding of rivers, J. Fluids Mech., vol.84, part4, pp. 609-624, 1978.
- 2) 尾崎幸男, 林 泰造: 中規模河床波の発生と河川の卓越蛇行波長について, 土木学会論文集, 第 333 号, pp. 109-118, 1983.
- 3) 黒木幹男, 岸 力: 中規模河床形態の領域区分に関する理論的研究, 土木学会論文集, 第 342 号, pp. 87-96, 1984.
- 4) 福岡捷二, 山坂昌成: 河床形状・流れ・流砂量の非線形関係を考慮した交互砂州の平衡波高の理論, 土木学会論文集, 第 357 号, pp.45-54, 1985.
- 5) Colombini M., Seminara G. and Tubino M.: Finite-amplitude alternate bars, J. Fluid Mech. vol. 181, pp 213-232, 1987.
- 6) 黒木幹男, 石井千万太郎, 板倉忠興: 砂州波高に関する理論的研究, 水工学論文集 第 36 巻, pp.1-6, 1992.
- 7) 清水康行: 沖積河川における流れと河床変動の予測手法に関する研究, 北海道大学学位論文, 1991.
- 8) Takebayashi H., Egashira S. and Jin H. S.: Numerical simulation of alternate bar formation, Proc. of 7th ISRS, 1998 (in printing).
- 9) Meyer-Peter, E. and Müller, R.: Formulas for bed-load transport, Proc. 2nd IAHR Meeting, pp. 39-64, 1948.
- 10) D. M. Causon: High Resolution Finite Volume schemes and Computational Aerodynamics, Nonlinear Hyperbolic Equation Theory, Computation Methods and Applications, Notes on Numerical Fluid Mech., vol. 24, pp. 63-74, 1989.
- 11) 黒木幹男, 岸 力: 二次流を考慮した中規模河床形態の領域区分に関する理論的研究, 第 28 回水工学論文集, pp.769-774, 1984.
- 12) 長谷川和義: 沖積蛇行の平面および河床形状と流れに関する水理学的研究, 北海道大学学位論文, pp. 31-37, 1983.
- 13) Hsieh W. Shen and Komura S: Meandering tendencies in straight alluvial channels, Jour. Hyd. Div., Proc. ASCE, HY 4, pp. 997-1016, 1968.
- 14) Engelund, F.: Flow and Bed Topography in Channel Bends, Jour. of Hy. Div. ASCE, Vol. 100, No. HY11, 1974.

(1998. 9. 30 受付)