

鉛直方向に密度境界面を持つ流体の 混合に関する数値計算

NUMERICAL CALCULATION OF FLOW AND MIXING IN VERTICAL BOUNDARY SURFACE OF DENSITY

赤堀良介¹・清水康行²・中山卓³

Ryosuke AKAHORI, Yasuyuki SHIMIZU and Suguru NAKAYAMA

¹ 学生員 北海道大学大学院工学研究科 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)

² 正会員 工博 北海道大学大学院工学研究科助教授 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)

³ 学生員 北海道大学工学部土木工学科 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)

A numerical model is one of the useful measures to predict the characteristics of the environmental systems on the interface of different density water. In the last few years, some models were already proposed to calculate each problems like flow in the stratified closed water systems and the salt wedge, and realized beneficial results. However, these models also have some defects. For example, turbulent models are sometimes difficult to use actually because of its theoretical complexity, and simple two-dimensional models can not calculate so accurately. So in this paper, the new two-dimensional numerical model is proposed, which use CIP-scheme in the calculation of advection phase, in order to calculate density flow more accurately without using complicated models, and its availability is confirmed by the comparison between the results of the calculation and that of the experiment under the same condition.

Key words: numerical calculation, density flow, CIP.

1. はじめに

成層化された閉鎖性水域で見られる青潮や、河口部での塩水遡上、河川舟運に伴う河川と海域の境界域におけるゲート操作などにおいては、現象の理解、発生する問題の予測、対策の効果算定などが必要となり、この場合に塩淡密度流の数値計算モデルが有効な手段となる。密度流の数値計算法に関してはこれまでに数多くのモデルが提案されている。例として、道奥ら¹⁾による $k-\epsilon$ モデルでの半閉鎖水域の水理特性の研究、池永ら²⁾による多層のレベルモデルでの網走湖の密度界面の挙動の再現、細田ら³⁾による交換密度流の密度フロントの鉛直二次元流れの数値解析等が挙げられ、また他にも多くの密度流の数値計算モデルが提案され、それぞれ有益な成果が得られている。

このような密度流の数値計算においてはその境界面の挙動の把握について精度の高い解が必要とされるが、一般にNS方程式等の基礎式を差分法して計算を行った場合、移流項の数値拡散のために特にその密度境界面において拡散が進行し、計算結果の精度が低くなってしまいう事が多い。

そこで本研究においては、最近数値流体力学の分野で

注目されているCIP法⁴⁾を密度流の計算に導入し、より高精度の結果を求める事とする。実際には2次元非圧縮流体のNavier-Stokes方程式を基礎方程式とした単純なモデルを用いて直接的に計算を行うことにより、界面フロントの進行と内部セイシュの再現を試みた。乱流は本質的には3次元的な運動であり、またその計算のためには乱流モデルやDNSが必要とされるが、本論文の計算条件の下では2次元的な運動と近似できると考え、さらに本研究がPC上で計算可能なモデルを構築することに主眼を置くため、簡単のためにも2次元数値計算モデルを用いた。

CIP法とはスプライン法を単純化させた計算法であり、移流項において計算格子点間の物理量のプロファイルを三次式と仮定し、既知の格子点上の値から推定する方法である。風上差分より界面を精度よく捉える事が可能な計算法であり、土木分野での応用例としては渡辺ら⁵⁾が、CIP法を密度関数法と併用することにより、2次元断面における海岸での砕波の現象を直接数値計算で再現する事に成功している。このように本研究で用いるモデルは非常に単純なモデルではあるが、計算精度は高いものと期待される。

この単純なモデルの精度を検討するために、計算と同

様の条件で単純な密度流の実験を行い、計算結果との比較を行う。この結果、モデル自体は単純でも CIP 法という高精度の手法を用いることにより、数値計算量が比較的少ないにもかかわらず実験結果にほぼ一致する計算結果が得られることが示され、この手法の有効性が明らかとされた。

2. 基礎式

二次元非圧縮流体の鉛直断面における密度流の計算に当たって、基礎式として以下の連続の式 (1), Navier-Stokes 方程式 (2),(3), 密度に関する方程式 (4) を用いる。(4) 式は、塩分濃度 c を用いた移流、拡散を伴う物質連続式に、濃度と密度 ρ の関係式 ($c = (\rho - \rho_w)/\rho_w$, ρ_w は水の密度) および連続式 (1) を代入して得られたものである。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - g \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} = D_x \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \quad (4)$$

ここで (x, y) は直交する座標軸, $P = p/\rho$ (p は圧力), g は、重力加速度, u, v は x および y 方向流速, t は時間, ν は粘性係数, D_x, D_y はそれぞれ x および y 方向の拡散の係数である。

本論文では、複雑な形状を持つ湖などを対象とする場合も考慮し、(1), (2), (3), (4) 式を計算するにあたり、湖底と水面を境界とする境界適合座標 (ξ, η) を用いることとする。ただし ξ および η は、それぞれ鉛直方向と、湖底及び水面にそう方向にとるものとし、 $x = x(\xi, \eta, \tau)$, $y = y(\xi, \eta, \tau)$, $t = \tau$ とする。

直交座標と境界適合座標の二つの座標は以下のように関係づけられる。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\xi & y_\xi \\ x_\eta & y_\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (6)$$

これらの関係式 (5),(6) より、(1)~(4) 式を座標変換すると、(8),(9),(10),(11) 式が (7) で定義される座標上の新たな基礎式として得られる。

$$\tau = t, \quad \xi = x, \quad \eta = (y - z)/h \quad (7)$$

ここで、 z は湖底の基準面からの高さ, $h = H - z$ (H は水位, h は水深) である。

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(hu) + \frac{\partial}{\partial \eta}(v_1) = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v_2 \frac{1}{h} \frac{\partial u}{\partial \eta} = - \left(\frac{\partial P}{\partial \xi} - \frac{\Omega}{h} \frac{\partial P}{\partial \eta} \right) + \nu \Delta u \quad (9)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial \xi} + v_2 \frac{1}{h} \frac{\partial v}{\partial \eta} = - \frac{1}{h} \frac{\partial P}{\partial \eta} + \nu \Delta v - g \quad (10)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + v_2 \frac{1}{h} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} = D_x \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi^2} - 2\Omega \frac{1}{h} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi \partial \eta} \right) + D_y \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \eta^2} \quad (11)$$

ただし

$$v_1 = v - u\Omega, \quad v_2 = v_1 - \eta \frac{\partial h}{\partial \tau}, \quad \Omega = \eta \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \quad (12)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 2\Omega \frac{\partial^2}{h \partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{h} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (13)$$

3. CIP 法について⁴⁾

ここで前述した CIP 法についてその概要を述べる。ただし実際の計算では二次元断面上での Navier-Stokes 方程式の移流項に CIP 法を用いたが、ここでは簡単のため一次元の波動方程式 (14) を例にとって説明する。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (14)$$

これはある物理量 C が、そのままの分布で流速 V によって x 軸上を運ばれていくことを示している (図-1)。

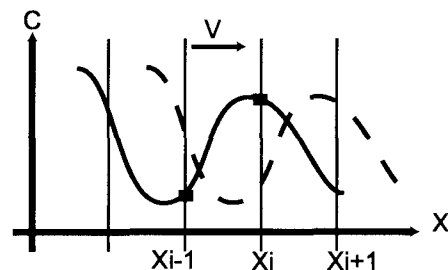


図-1 物理量 C の移流

このように C の値はあるプロフィールを保ちながら移動していくが、計算においては各格子点上の値しか知ることができない。そのため、次の時刻のある点での C の値を得るためには、現在の時刻における格子間の C のプロフィールを推定する必要がある。

ここでは式 (15) によって表わされる三次曲線によって、それぞれの格子間のプロフィールを仮定する。

$$F_i(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + C_i'(x-x_i) + C_i \quad (15)$$

ここで未知数は a_i , b_i , C_i' の 3 つである。CIP 法では、まず各格子点で値が連続であるという条件と、その一階微分が連続という 2 つの条件式 (16), (17) から式 (18), (19) を得る。

$$F_i(x_{i-1}) = F_{i-1}(x_{i-1}) \quad (16)$$

$$dF_i(x_{i-1})/dx = dF_{i-1}(x_{i-1})/dx \quad (17)$$

$$a_i = \frac{C_i' + C_{i+1}'}{\delta x^2} - 2 \frac{C_{i+1} - C_i}{\delta x^3} \quad (18)$$

$$b_i = 3 \frac{C_{i-1} - C_i}{\delta x^2} + \frac{2C_i' + C_{i-1}'}{\delta x} \quad (19)$$

以上から a_i, b_i が C, C' によって決定されることがわかる。しかしこの 2 つの式だけでは 3 つの未知数を求めることができないため、もう一つ条件を与える必要がある。

そこで CIP 法では C_i の一階微分の C_i' も同様に移流していると仮定することにより、(14) 式において C が $C(x, t) = C(x - \delta t, t - \delta t)$ を満たすように、(20) 式において C' が $C'(x, t) = C'(x - \delta t, t - \delta t)$ を満たすと考ええる。

$$\frac{\partial C'}{\partial t} + V \frac{\partial C'}{\partial x} = 0 \quad (20)$$

ここで C, C' を既知数として与えろと式 (18), (19) より a_i, b_i が得られる。この a_i, b_i を用いて式 (21), (22) から次の時刻の C^{new}, C'^{new} を求めていくこととする。

$$C_i^{new} = F_i(x_i - V\delta t) = [(a_i\xi + b_i)\xi + C_i']\xi + C_i \quad (21)$$

$$C_i'^{new} = \frac{F_i(x_i - V\delta t)}{\delta x} = (3a_i\xi + 2b_i)\xi + C_i' \quad (22)$$

ただし $\xi = (-V\delta t)$ である。

実際の計算にあたってはこれらの考え方を二次元化し、基礎式中の移流項について分離解法を用いて適用した。

4. 計算方法

今回の計算では CIP 法を用いるに当たり、Navier-Stokes 方程式と密度に関する方程式を分離解法で計算する事とした。

まず式 (9), (10), (11) を差分化し、移流項とそれ以外の項に分離する。式 (9), (10) についてはさらに二段階分離解法によって、同一の時間ステップでの流速を、圧力項と粘性項とに分離して段階的に求める。この際圧力項の圧力の値は、連続式 (8) を満足させるように SOR 法を用いてポアソン方程式を計算することによって求められるが、分離解法を用いると圧力項を含む式には移流項と拡散項が含まれない事になり、ポアソン方程式が簡単な形となる。この後、移流項の解を CIP 法によって求め、次の時間ステップの流速と密度が得られる。これらの手順を繰り返す事により、逐次的に流速、密度を求めていく。

なお境界条件であるが、底面と壁面において、それぞれの近傍では計算格子が本来必要とされる大きさよりも大きいので、安定のために底面と壁面に平行な流速成分に対し、各壁面、底面とそこから 1 つ目の計算格子の間に対数則が成り立つとして流速を与えた。また水面は自由水面であるが、今回は水位の変化が十分に小さく、常に一定であると近似できるとする。

5. 実験概要

次に実験概要について図-2 に示し、簡単に述べる。

長さ 1.0(m)、高さ 0.3(m)、奥行き 0.4(m) の透明なアクリル水槽を中央で仕切り板によって分割し、水深 0.155(m) で、左側には密度 1000.0(kg/m³) の淡水、右側にはメチレンブルーによって着色された密度 1033.0(kg/m³) の塩水を満たす。実験開始と同時にこの仕切り板を取り外し、この様子をデジタルビデオカメラで撮影する。撮影した映像はコンピューターに取り込み静止画像化し、数値計算による計算結果との比較、検証に用いることとする。

また、実際に界面フロントの進入が観察されるような状況においては断面両端は開放された状態として考えられるが、筆者らのモデルは主に閉鎖水域での適用を目的とし、本論の実験はあくまでもその妥当性を検証するための物であるため、今回は計算、実験ともに閉じた系を想定して行った。

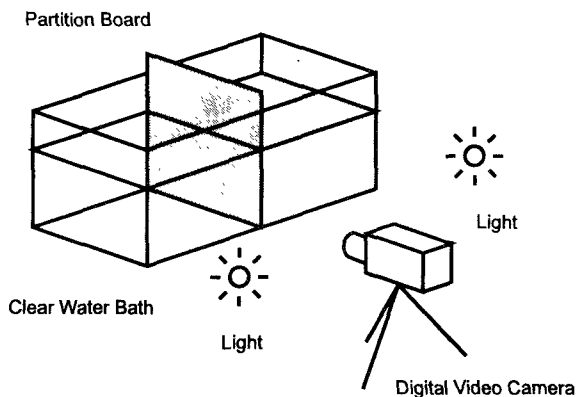


図-2 実験方法

6. 実験結果

実験結果についてビデオから得られた時刻ごとの画像を図-3に示し、観測された流れの様子について簡単に述べる。

時刻 $t=0.0(\text{sec})$ に仕切りが外されると同時に比重の大きい液体の方が比重の軽い液体に潜り込むようにして、界面フロントが進行し始める。その後、界面フロントが進行していくに連れ、先端部と中央部に大きな二つの膨らみ(図-3 中矢印)が発達して行く様子が確認できる。これは密度界面に働くせん断力による渦であると思われる、界面の拡散もその渦のやや後方で進行している。フロント部はおよそ6秒後に下端壁面に達し、密度界面自体は、フロントの進行に対しての下流側で時刻 $t=12.0(\text{sec})$ 前後で最上部に達する。その後、密度界面は周期およそ $24(\text{sec})$ で内部セイシュを行い、やがて収束する。

7. 数値計算の初期条件

数値計算に当たっての初期条件を図-4に示す。

実際には実験の条件に準じた以下に示された初期条件の下で数値計算を行い、前述の条件下で行われた水理実験の結果と比較する事によりモデルを検証する。

計算断面は高さ $0.155(\text{m})$ 、長さ $1.0(\text{m})$ で、始め仕切りによって左右に分割され、それぞれ密度の異なる液体によって満たされている(密度 $\rho_1 = 1000.0 (\text{kg/m}^3)$, $\rho_2 = 1033.0 (\text{kg/m}^3)$)。時刻 $t=0.0(\text{sec})$ と同時にこの仕切りは取り外され、左右の液体は自由に移動できるようになるとする。

また粘性係数は実験時の水温を摂氏 20 度とし $\nu = 0.000001 (\text{m}^2/\text{s})$ 、拡散係数は $D_x = D_y = 0.000001 (\text{m}^2/\text{s})$ 、計算メッシュは縦 30 、横 100 とする。

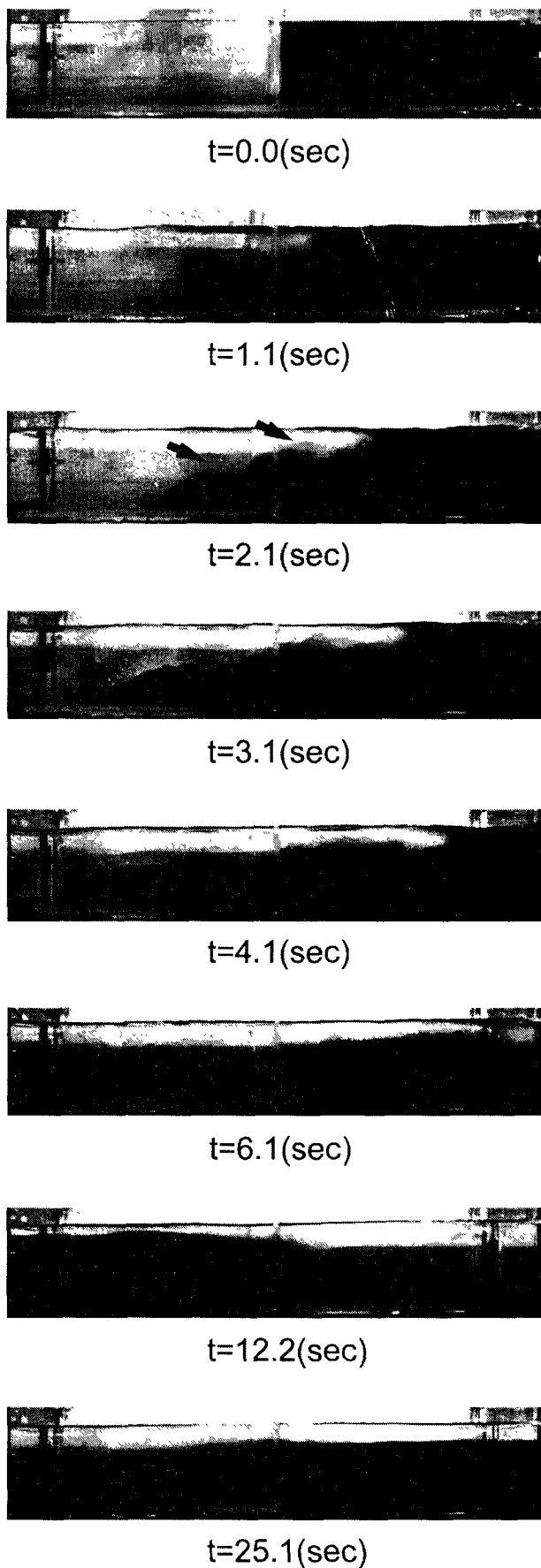


図-3 実験結果

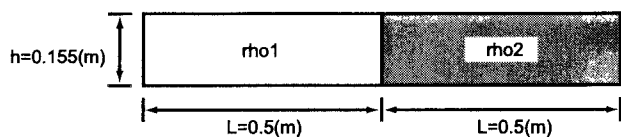


図-4 初期条件

8. 計算結果

計算結果を時刻ごとの図として図-5 に示し、実験結果と比較しつつ簡単に述べる。

本来ならば実験水槽内の流速や密度分布も計測し、それらの値との比較も行うべきであるが、実際にはそれら数値の計測は困難であり、今回は目視による比較を行う事とした。なお図中の色の濃い部分は濃度の高い部分を表わし、黒い点はトレーサーを表わしている。

時刻 $t=0(\text{sec})$ と同時に界面にはフロントが形成され、断面左端へと進行を開始する。フロントが進行していくとともに界面で生じた渦が次第に成長し、その渦の後方を主として密度の拡散が行われる。この間の経緯は実験によって観察されたものと良く一致しており、モデルの良好な再現性が確認される。また実験より得られた画像においては明確にその様子を確認できなかった連行渦の様子が計算結果においては明瞭に確認でき(図-5 中矢印)、その発生位置も実験とほぼ一致していると言える。

その後フロントは断面左端に達し、時刻 $t=12(\text{sec})$ 前後で界面水位が下流側で最も上昇した後、周期 23(sec) 程度で内部セイシュが生じ、やがて収束する。計算結果の方が収束に要する時間はかかったが、内部セイシュの様子やその周期に関しても実験とモデルの間には良好な一致が見られた。

次に過去に行われた類似の実験と計算の結果とを比較する事で、今回提案されたモデルの有効性を検証する。今回のモデルの傾向をつかむためにさらに3つの異なった水位を初期条件とした計算を行い、その結果から得られたフロント部における混合層厚、下層厚、Reynolds 数を、検討のためのデータとした。それぞれの初期条件は最初の計算から 2.0(cm) づつ水位を下げていったほかはすべて同じである。

比較の対象には第1章で述べた細田ら³⁾の交換密度流の密度フロントの計算結果と、細田ら³⁾で引用されている Simpson ら⁶⁾、および大久保⁷⁾の実験結果を用いる事とする。実験条件や初期条件が今回行った計算とは異なるため厳密な比較を行う事はできないが、フロントの形状特性のおよその傾向は確認できると考えられる。

図-6 は混合層厚と Reynolds 数の関係を示したものである。ただし H は水深、 $h3$ は混合層厚、 $h4$ は下層厚で

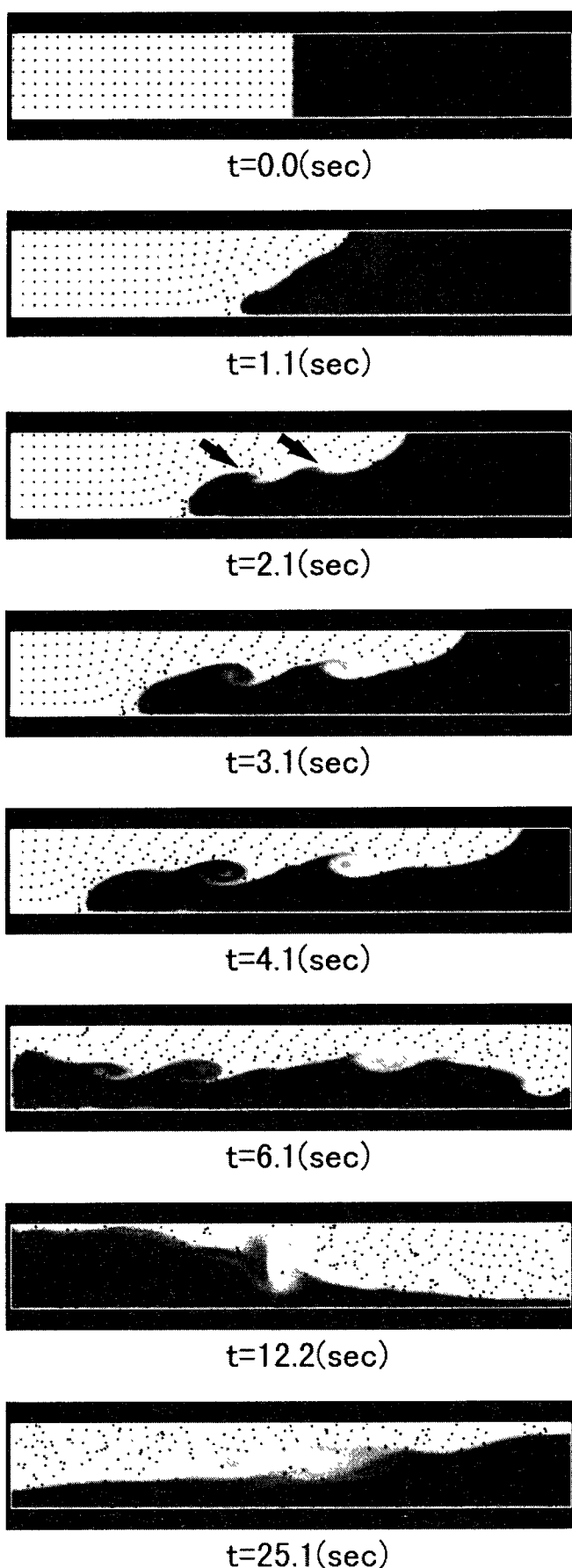


図-5 計算結果

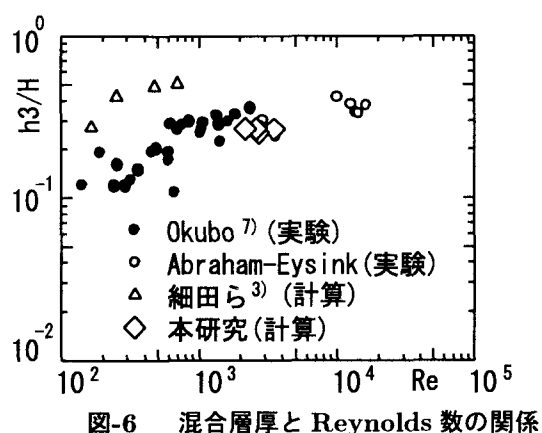


図-6 混合層厚と Reynolds 数の関係

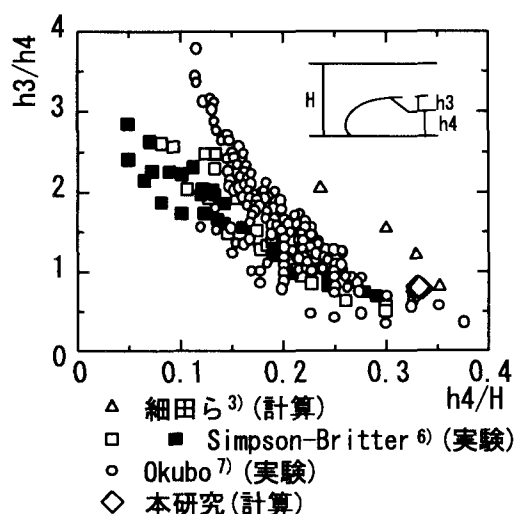


図-7 混合層厚と下層厚の関係

あり, $Re = u_2 R / \nu$, Okubo の実験においては R は下層流の径深, 計算では $H/4$ として評価する. また u_2 はフロントの伝播速度である.

この図から比較すると, 今回の計算結果は実験の観測値よりも幾分混合層厚が小さい傾向が見られるが, 実験値から大きく逸れることなく, 良好な結果を示している.

図-7 は混合層厚と下層厚の関係を示したものである. この図においても今回の計算値は実験値の範囲内であるといえる.

9. まとめ

本論文では, 比較的簡潔でかつ高精度な二次元の密度流数値計算モデルの構築を目的として, CIP 法を用いたモデルを提案し, 同条件で行われた実験や, 過去に行われた類似の実験や計算と比較する事によりその検証を行った.

まず同時に行われた実験との比較であるが, 概要的な比較方法ではあるものの, 十分良好な再現性を確認することができたと言える. 特に界面せん断力によるフロ

ント部後方での渦の発生と成長に関しては実験以上にその姿を明瞭に捉える事ができた. また成層化された閉鎖水域において問題となる内部セイシュの再現においても, 実験レベルの規模であれば周期や形状など観察された様子と比較的近い結果を得る事ができた.

次にこれまで行われた類似の実験や数値計算との比較であるが, 移流項の計算に風上差分を用いた場合や細田ら³⁾の研究等において問題とされてきた計算値の混合層が実測値よりも厚くなるという傾向に対して, CIP 法を用いた場合有効な効果が得られることが確認できた. これは界面を精度良く捉える事が可能であるという CIP 法の長所によるものであると考えられ, モデルを高精度化するに当たって重要な意味を持つと言える.

今回の研究を通じて, 単純なモデルを CIP 法と併用する事により, 密度流のような複雑な現象においてもある程度高精度な計算が可能である事が確認できた. 今後実際の現象を計算していくに当たっても, 今回のモデルが密度境界面の挙動の計算に関して有効な手段となることが期待される.

参考文献

- 1) 道奥康次, 辻本剛三, 宮本仁志: 半閉鎖水域における風成密度流の水質交換特性, 水工学論文集, 第 39 巻, pp.805-810, 1995.
- 2) 池永 均, 山田 正, 内島邦秀, 向山公人, 平野道夫, 井出康朗: 網走湖における吹送流の発生と成層界面の挙動に関する研究, 水工学論文集, 第 41 巻, pp.481-488, 1997.
- 3) 細田 尚, 西澤賢太郎, 福住 晃, 大久保賢治, 村本嘉雄: 交換密度流に生じる内部波に関する数値解析的研究, 水工学論文集, 第 40 巻, pp.525-530, 1996.
- 4) Yabe, T and Aoki, T.: A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation I. One-dimensional solver, Comp. Phys. Comm., Vol.66, pp.219-232, 1991.
- 5) 渡辺靖憲, 佐伯 浩: 碎波帯内の流速場のダイレクトシミュレーション, 海岸工学論文集, 第 43 巻 (1), pp.71-75, 1996.
- 6) Simpson, J. E. and Britter, R.E.: The dynamics of the head of a gravity current advancing over a horizontal surface, J. Fluid Mech., Vol.94, pp.477-495, 1979.
- 7) 大久保賢治: 湖における吹送流と密度流の発生・流動機構に関する研究, 京都大学学位論文, 1988.

(1998. 9. 30 受付)