

急激な水面変動を伴う流速場の Lagrange型数値解析

LAGRANGIAN APPROACH TO FLOW-VELOCITY FIELD
UNDER THE EXISTENCE OF THE DRASTIC CHANGE OF WATER SURFACE

後藤仁志¹・酒井哲郎²・芝原知樹³

Hitoshi GOTOH, Tetsuo SAKAI and Tomoki SHIBAHARA

¹正会員 工博 京都大学助教授 工学研究科土木工学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

²フェロー 工博 京都大学教授 工学研究科土木工学専攻 (同上)

³学生会員 京都大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (同上)

The Lagrangian concept of the discretization of the Navier-Stokes equation, or the MPS method, which is generally called the Particle Method, is applied to the unidirectional flow with the periodic boundaries at its upstream and downstream ends. The MPS method is less affected by the numerical diffusion due to the convection term than the Eulerian methods, namely it has a superiority in the accurate calculation of the complicated behavior of water surface. The characteristics of the pool-and-weir fishway is investigated by using MPS method as the typical flow situation with the complicated behavior of water surface and the applicability of the periodic boundary condition. The plunging flow and the streaming flow, which are known as the two sub-modes of the flow in the pool-and-weir fishway, are reproduced well. The complicated unsteady behavior of the flow under the plunging flow mode is numerically investigated by the present simulation.

Key Words: Particle method, MPS method, Periodic boundary condition, Pool-and weir fishway, Plunging flow, Velocity profile

1. 緒 言

河川構造物周辺の流れは、断面の急激な変化を伴う急変流であり、跳水や越流水脈の自由落下など激しい水面変動に特徴付けられる流況が頻繁に出現する。さらに、近年、生態系に配慮した河川構造物への要請が急速に高まり、魚道の設計が注目を集めているが、魚道は比較的短距離で上下流の落差を接続するため必然的に急勾配となり、水面の時間的・空間的変動は不可避である。また、この種の急変流区間は人工的構造物の周辺以外にも存在する。例えば、溪流河川では巨礫がステップを形成し、ステップとプールが交互に繰り返される階段状の河床形態が生じることが知られている。

この種の急変流区間では流況が複雑で、非定常性が顕著であり、水面形が時間的に大きく変動するため、流速場の詳細な計測には膨大な時間と労力を要する。さらに、跳水や落下水脈などを伴う場合には

気泡の混入が生じるため LDV 等の新しい技術に基づく計測面からのアプローチも困難である。

一方、数値解析については、 $k-\epsilon$ モデルに限らず、高次の乱流モデルや LES が、一般性のある複雑な境界条件で適用されている現状であるが、多くの場合、水面は鏡のような平坦な面として取り扱われるか、あるいは外的な条件として与えられ、複雑な水面変動についての直接的な取り扱いには、あまり例がない。急変流の解析手法として知られる MAC 法は、マーカーに依存した水面判定法を採用しているため、水面の不鮮明化を招きやすく、特に、水塊の分裂・合体を伴う激しい変化に対応するにはアルゴリズムの複雑化を余儀なくされる。この問題は、流体のセル内体積占有率を新たな変数として導入した VOF 法 (Hirt ら¹⁾) が提案されたことにより、ある程度改善され、最近では、水工学上の諸問題への VOF 法の適用が活発となり (例えば、米山ら²⁾)、一般的な手法となりつつある。さらに、移流項の差

分の高精度化を目的としたCIP法の適用も開始されており、中山ら³⁾は山地河川の常・射流遷移区間の解析を行っている。

上記の手法は、何れも、計算領域を格子に分割して、空間に固定された計算格子を用いて基礎式の離散化を行う Euler 的な手法であり、計算格子の形状が時々刻々変化するような状況に対応するには、格子の再配置と更新された格子点における変数推定（補間操作）が必要となり、計算手続きが複雑化する。VOF 法では、格子の再配置は行わず、各格子が流体に満たされている程度を示す変数を導入して水面判定を行っているが、この場合、予め水面形状が複雑になる領域に格子を集中配置しないと水面の追跡精度が低下する。すなわち、この種の手法では、ある程度結果を予測して格子配置を決定することが計算精度の確保上重要と言える。

元来、Euler 的な手法では、第一に計算対象領域を設定して、計算格子によって計算領域を小領域に分割し、相互に隣接する個々の小領域間の関係として保存則を離散化する方法が採られるから、計算対象領域自体が激しく変化する状況（例えば水塊の分裂・合体などが生じるような流況）に対する柔軟性に欠ける。この問題を克服するには、根本的な発想の転換が不可欠である。

Lagrange 的解析法は、流体計算手法としては Euler 的な手法ほど一般的ではないが、計算領域の格子分割を導入せず、流体粒子の運動を追跡する方法である。Lagrange 的解析法では、相互干渉を伴う粒子群の移動を全て追跡するため、膨大な繰り返し計算が必要となり、従来は計算機の演算性能上の制限から実用性が疑問視されてきた。しかし、近年の著しい計算機の演算性能の進歩と低廉化が、この状況を変化させつつある。この種の手法の積極的利用は、計算力学の分野でも最近開始されたばかりであるが、流体計算以外の領域でも計算格子に依存しないグリッドレス解析が、その柔軟性と汎用性の面から次第に注目を集めつつある。

流体計算手法としての Lagrange 的解析法は、粒子法と呼ばれているが、Koshizuka ら⁴⁾は、従来の粒子法に見られた数値的不安定性の問題を大幅に改善し、広範囲な計算条件で安定して機能する MPS 法 (moving particle semi-implicit method) のアルゴリズムを開発した。この方法は、水工学ではまさに萌芽的段階にあり、適用例としては、著者ら⁵⁾による、一様勾配斜面上の巻き波型碎波の遡上過程のシミュレーションがあるのみである。

本研究では、河川工学上の諸問題への適用を念頭に、流出入境界が周期境界である場合への MPS 法の適用を図り、階段式魚道を例に、流況の詳細な把握に有用な瞬間流速ベクトル場を計算して、急変流区間における

粒子法の有効性を示す。

2. 粒子法

(1) 粒子法の構成

連続式と Navier-Stokes 式

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F} \quad (2)$$

は Koshizuka ら⁴⁾の MPS 法に基づいて以下に示す方法で離散化される（越塚⁶⁾）。ここに、 $\mathbf{u}$ ：流速ベクトル、 p ：圧力、 ρ ：流体の密度、 $\mathbf{F}$ ：外力ベクトル、 ν ：渦動粘性係数である。

MPS 法では、粒子（流体素子）の運動を通じて流体運動が記述される。均一な粒子の総数が一定で、個々の粒子の質量が変化しない条件下では、質量保存（連続式）は自動的に満足される。また、流体の密度は粒子数密度に比例するから、非圧縮条件は粒子数密度を一定値 n^0 に保つことにより満足される。

Navier-Stokes 式については、移流項、圧力項、粘性項、外力項（ここでは重力項）の各々について、粒子の持つ情報のみを用いて離散化する。まず、粒子移動の追跡計算は、移流項の計算に他ならないが、MPS 法では、逐次更新される局所流速場で粒子の移流が計算されるので、通常の Euler 的な方法では不可避な移流項の差分化に起因する数値拡散の問題を複雑な手続きなしに回避できる利点がある。

圧力項と粘性項の計算には、gradient と Laplacian の離散化を必要とする。まず、粒子 i の圧力項 (gradient) は以下のように離散化される。

$$-\frac{\langle \nabla p \rangle_i}{\rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{D_0}{n_0} \sum_{j \neq i} \left\{ \frac{p_j - p_i}{|\mathbf{r}_{ij}|^2} \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{w}(|\mathbf{r}_{ij}|) \right\} \quad (3)$$

$$w(r) = \begin{cases} (r_e/r) - 1 & \text{for } r \leq r_e \\ 0 & \text{for } r > r_e \end{cases} \quad (4)$$

ここに、 $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$ 、 D_0 ：次元数、 $w(r)$ ：重み関数 (r ：粒子間距離) であり、式(4)は Koshizuka ら⁴⁾により計算の安定化と高速化に配慮して推奨された関数形である。この重み関数を用いて粒子数密度は、

$$\langle n \rangle_i = \sum_{j \neq i} w(|\mathbf{r}_{ij}|) \quad (5)$$

と定義される。

次に、Laplacian は、物理的には拡散に対応した演算であることから、当該粒子から近傍の粒子への物理量の配分としてモデル化され、このとき、粘性項は以下のように離散化される。

$$v\langle \nabla^2 \mathbf{u} \rangle_i = \frac{2vD_0}{n_0\lambda} \sum_{j \neq i} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) w(|\mathbf{r}_{ij}|) \quad (6)$$

$$\lambda = \sum_{j \neq i} w(|\mathbf{r}_{ij}|) |\mathbf{r}_{ij}|^2 / \sum_{j \neq i} w(|\mathbf{r}_{ij}|) \quad (7)$$

ここに係数 λ は、式(6)に基づいた物理量の配分により生じる分散の増分が、非定常拡散方程式から評価される分散の増分と一致するために導入された補正係数であり、式(6)のプロセスの反復で得られる結果が Gauss 分布に収束することを保証している。

(2) 計算手続き

各ステップは、2段階のプロセスから成る。第1段階は、粘性項と重力項を与えて粒子の速度（流速）を更新する陽的なプロセスである。粘性項と外力項のみを考慮した Navier-Stokes 式から、この段階での速度修正値は、

$$\Delta \mathbf{u}_k^* = \mathbf{F}_{k-1} \Delta t + (\nu \nabla^2 \mathbf{u})_{k-1} \Delta t \quad (8)$$

となり、仮流速、仮の粒子位置はそれぞれ

$$\mathbf{u}_k^* = \mathbf{u}_k + \Delta \mathbf{u}_k^* ; \quad \mathbf{r}_k^* = \mathbf{r}_k + \Delta \mathbf{u}_k^* \cdot \Delta t \quad (9)$$

と書ける。なお、式中の Δt は計算時間ステップ、添字 k は計算ステップを表す。この過程が、移流項の計算に相当する。換言すれば、移流項は粒子の移動の追跡を通じて自動的に計算される。この移流に伴う粒子位置の修正後に再度、仮の粒子数密度 n_k^* を算出する。

第1段階で得られた仮の場では、質量保存（粒子数密度が一定値 n^0 に一致）が満足されていないから、第2段階では、数密度を再修正し、速度を再更新する。第1段階で除外した圧力項を導入し、陰的な Navier-Stokes 式は、

$$\Delta \mathbf{u}_k^{**} = -\frac{1}{\rho} \nabla p_{k+1} \cdot \Delta t \quad (10)$$

と書けて、速度と数密度の第2段階修正量 $\mathbf{u}_k^{**}, n_k^{**}$ が質量保存則を満足するから

$$\frac{1}{n_0} \Delta n_k^{**} + \nabla \cdot (\Delta \mathbf{u}_k^{**}) \cdot \Delta t = 0 \quad (11)$$

なる関係が成立する。また、第2段階修正量 $n_k^{**}, \mathbf{u}_k^{**}$ は、以下の関係を満足することが必要である。

$$n_k^* + \Delta n_k^{**} = n_0 ; \quad \mathbf{u}_k^* + \Delta \mathbf{u}_k^{**} = \mathbf{u}_{k+1} \quad (12)$$

式(10)より $\Delta \mathbf{u}_k^{**}$ の発散を求めて、式(12)とともに式(11)に代入すると、圧力に関する Poisson 方程式

$$\nabla^2 p_{k+1} = \frac{\rho}{(\Delta t)^2} \frac{n_k^* - n_0}{n_0} \quad (13)$$

が導ける。このようにして得られた圧力に関する

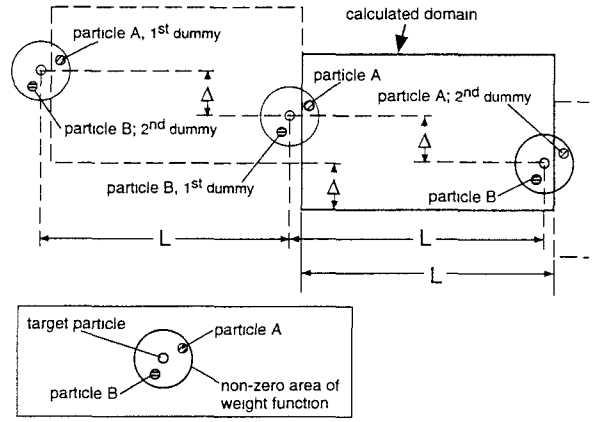


図-1 周期境界条件

Poisson 方程式を陰的に解いて圧力場を更新し、式(10)から流速の修正量を求めて流速場および粒子の位置を修正する。

計算時間ステップ Δt については、Koshizuka and Oka⁷⁾ に習い、Courant の安定条件を考慮して、以下のよう調整する。

$$\Delta t = \min(\alpha_{dt} d_0 / v_{\max}, 1.0 \times 10^{-3}) \quad (14)$$

ここに、 α_{dt} : 時間ステップと Courant 数の比 ($\alpha_{dt}=0.1$ とする) d_0 : 粒子径, $v_{\max}$: 各ステップにおける流体粒子の最大速度である。

(3) 境界条件

壁面境界条件は、座標の更新を行わない固定粒子により設定される。壁面は数列の粒子で構成され、流体粒子と直接する壁面粒子に関しては、圧力と粒子数密度の更新計算が行われ、壁面付近に流体粒子が集中すると圧力が上昇して流体粒子が跳ね返される。なお、流体と直接する壁面粒子の外部に数列の粒子を配置するのは、流体と接する壁面粒子に関して数密度の計算を行う際に適切な値が得られるようにするためであり、これらの粒子は数密度計算の際にのみ参照されるダミー粒子で、圧力、流速など物理量の計算の対象ではない。ダミー粒子の配列幅は、重み関数の閾値 r_c に相当する幅で充分である。また、壁面の流速に関しては近似的 non slip 条件として、固定壁粒子の速度をゼロとした。

自由水面では粒子の圧力に関する境界条件 ($p=0$) を与える必要があるが、自由水面の判定は粒子数密度が一定値 βn_0 以下になる条件、

$$n_i^* < \beta \cdot n_0 \quad (15)$$

により行った。この条件は水面形状に依存しないので、水塊の分裂など複雑で激しい水面の挙動に対しても容易に適用できる利点を有している。

図-1 は、粒子法における周期境界条件について、

模式的に示したものである。粒子法の計算では、粒子間相互作用の計算が離散化の基本であるが、相互作用の計算には近接粒子（当該粒子との相互作用が生じる粒子）の判定が不可欠である。勾配および Laplacian の計算から明らかなように、離散化の過程では、重み関数が重要な役割を演じる。ここでは、Koshizuka⁴⁾により推奨された関数形（式(4)）を用いているが、この関数形では、重み関数の非ゼロ領域が有限であるので、相互作用項の計算の対象粒子も有限個に制限される。すなわち、相互作用は当該粒子から一定の半径の円の内部に存在する粒子との間でのみ考慮される（図中の凡例参照）。側方境界での周期境界条件に対応するには、当該粒子の他に2個のダミー粒子を導入し、例えば相互作用の有無の判定に際しては、非周期境界条件では、

$$|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_p| < r_e \quad (16)$$

が用いられるのに代わって、周期境界条件では、

$$\text{Min} [|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_p|, |\mathbf{x}_i + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_p|, |\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_p|] < r_e \quad (17)$$

を用いることとなる。ここに、 $\mathbf{x}_p$ ：当該粒子の位置、 $\mathbf{x}_i$ ：周囲粒子の位置、 $\boldsymbol{\xi}$ ：周期境界壁の相対位置を表すベクトル（ $\boldsymbol{\xi} = (L, -\Delta)$ ）であり、図中の記号は、 L ：計算領域の幅、 Δ ：計算領域の鉛直方向シフト量（後述する階段式魚道の例では、1段の落差）である。特に、図中に示すように、当該粒子の位置が、相互作用の計算対象領域が計算領域の境界線と重なる位置にあるときには、相互作用を計算する粒子の位置によって相互作用の計算対象がダミー粒子となる場合（図中の粒子A）と実在粒子となる場合（図中の粒子B）があるので注意を要する。

3. 階段式魚道内流速場への適用

(1) 階段式魚道の流況

切欠きや潜孔のない基本形の階段式魚道の流況は図-2に示す落下流状態と表面流状態の2種に大別される（Clay⁸⁾、廣瀬・中村⁹⁾）。落下流状態は、流量が少ない場合や隔壁の間隔が大きい場合に生じる状態で、隔壁頂部で形成された落下流が湛水池内に潜入り湛水池内に反時計回りの循環流を生じる。一方、表面流状態は、流量が多い場合や隔壁の間隔が小さい場合に生じる状態で、隔壁頂部で流れが連なり連続した表面流が形成される状態である。2つの状態を区分する指標としては、シャープクレストを用いた Rajaratnam^ら¹⁰⁾の実験による式

$$\hat{Q}_t = q / (SL_p^{3/2} \sqrt{g}) < 0.25 \quad \text{for plunging flow} \quad (18)$$

がある。ここに、 q ：単位幅流量(m^2/s)、 s ：勾配、

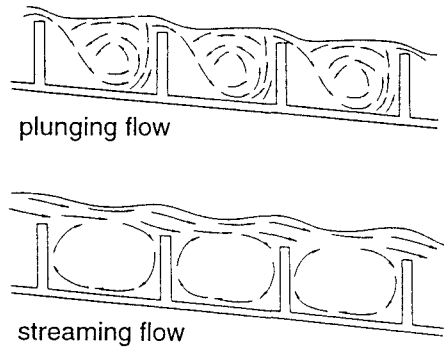


図-2 階段式魚道の流況（Clay⁸⁾）

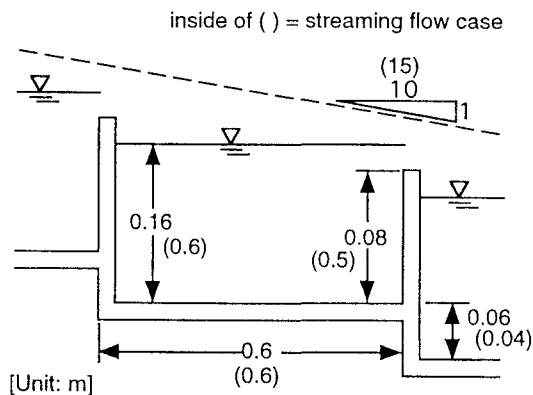


図-3 計算領域

L_p ：プール長(m)である。

(2) 計算領域・計算条件

計算領域を図-3に示す。図中の括弧外の数字は落下流状態の諸元を、括弧内の数字は表面流状態の諸元を示している。計算粒子数は、落下流状態で約960個、表面流状態で約3590個であり、上・下流境界は周期境界条件とした。平均勾配は、落下流状態で1/10、表面流状態で1/15である。また、計算は静止状態から開始するので、図中には湛水池の初期水深を表示している。なお、流れが充分に発達した際に、隔壁上での流速を計算し断面平均流速を求めれば、流量が計算できるから、Rajaratnam^らの指標（式(18)）によって、計算条件の流れが、表面流状態、落下流状態の何れに属しているか確認できる。ここで示した条件に関して Rajaratnam^らの指標を算出したところ、落下流状態について $\hat{Q}_t = 0.24$ 、表面流状態に関して $\hat{Q}_t = 1.48$ となり、指標に応じた流れの状態が出現していることが確認できた。

なお、モデル定数については、Koshizuka^ら⁴⁾による標準値： $r_e = 2.1d_0$ for gradient, $r_e = 4.1d_0$ for Laplacian, $\beta = 0.97$ を用いた。

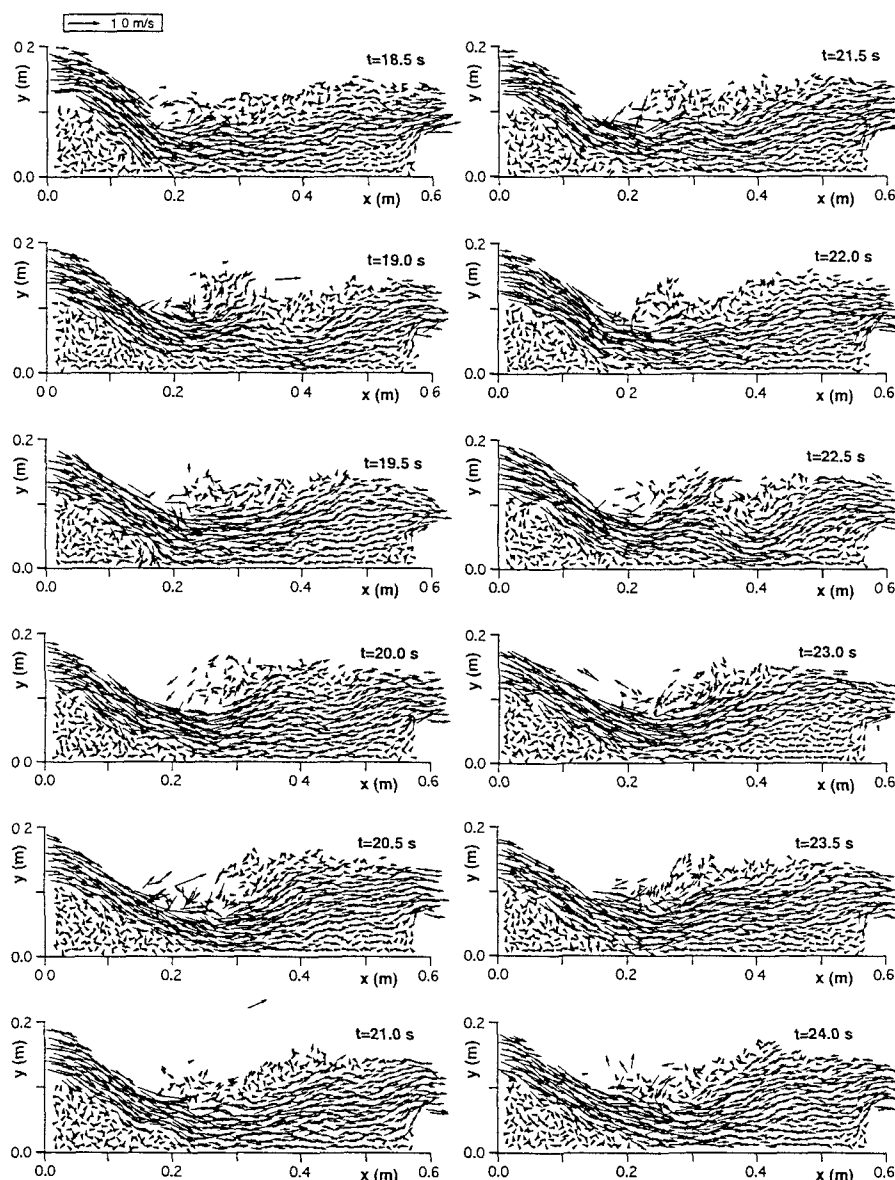


図-4 落下流状態の流速場

(3) 階段式魚道の非定常流速場

図-4 は、落下流状態について流れが十分に発達したと判断される $t=18.5$ s における流速場から 0.5 秒間隔で $t=24.0$ s までの瞬間流速場を示したものである。時刻 $t=18.5$ s では、落下水脈は $x=0.2$ m 付近で底面に衝突した後、上下に緩やかなうねりを示しつつ、下流側隔壁の頂部に向かう上昇流となる。落下流と上流側隔壁の間には、時計回りの循環流が生じ、下流側の水表面付近 ($0.2 < x < 0.5$ m) には複数の水平渦が生じている。時刻 $t=19.0$ s には、 $x=0.3$ m 付近に有意な上昇流が生じており、湧き上がるような水表面の盛り上がりが生じている。また、この上昇流により、時刻 $t=18.5$ s では水底に達していた落下水脈が底面壁から離れていることが分かる。次に、時刻

$t=19.5$ s には、落下水脈は $x=0.2$ m 付近で底面に衝突した後、暫く底面に沿って流れ、下流側隔壁の頂部に向かう上昇流となる。また、時刻 $t=18.5$ s で見られた上昇流の上下方向への緩やかなうねりは、この時刻にはさほど顕著ではない。時刻 $t=20.0$ s になると、上下方向のうねりが顕在化し始めるが、 $x=0.35$ m 付近に小規模な水面の盛り上がりが生じて水面に飛沫 ($0.2 < x < 0.3$ m の範囲に見られる左斜め下向きの離散的粒子の動き) が上がり、時刻 $t=20.5$ s には一旦、うねりが沈静化している。その後、時刻 $t=21.0$ s から $t=21.5$ s にかけて、上昇流の上下方向のうねりが次第に発達し、時刻 $t=22.0$ s から $t=22.5$ s にかけて $x=0.3$ m 付近に大規模な上昇流が生じる。時刻 $t=23.0$ s には、うねりは沈静化し、落下水脈は $x=0.2$ m 付近

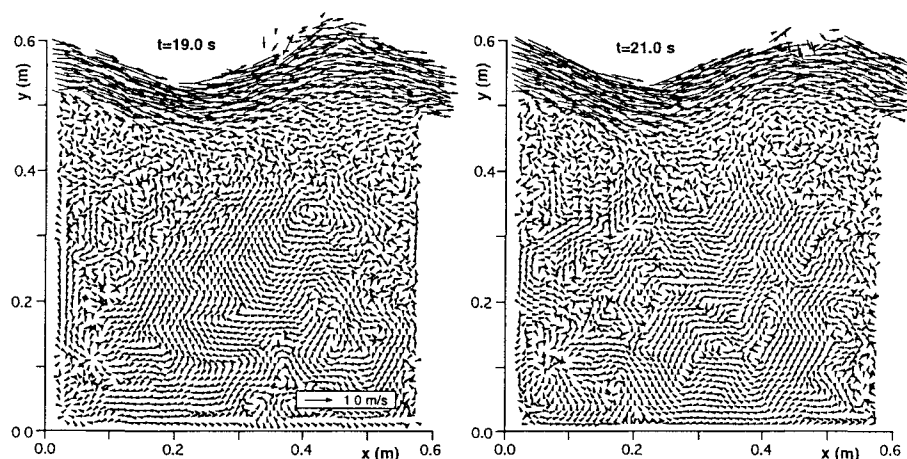


図-5 表面流状態の流速場

で底面に衝突した後、暫く底面に沿って流れ、下流側隔壁の頂部に向かう上昇流となる（時刻 $t=19.5$ s の流況と類似）。

このように、落下水脈の衝突地点から下流の隔壁頂部に向かう上昇流の不安定化と落下水脈の衝突地点付近で間欠的に生じる大規模上昇流が反復される流れ場の構造が読みとれる。流れのパターンの出現順序には一定の規則があるものの、再現期間は一定ではない点は興味深い。

次に、図-5 は、表面流状態について流れが充分に発達したと判断される時刻 $t=19.0$ s と $t=21.0$ s の瞬間流速場を示したものである。この図では、微小流速に対しても矢印の先端部のみで流向を表示しているが、実際には、 $y < 0.4$ m の領域の流速は充分に小さく、底面にまで達するような大循環は生じていない。流れが充分に発達した状態では、一旦下降した後、下流側の隔壁の直上流で水面がピークを示すような安定した水面形となり、水表面付近にのみ高速の流れが生じるいわゆる表面流状態の特徴が良好に再現されている。

4. 結 語

本研究では、MPS法を用いて階段式魚道を例に周期境界条件下の一方向流の流速場を計算力学的観点から検討した。MPS法は、落下流状態と表面流状態の基本的流況特性を良好に再現し、また、落下流状態に関しては、計算から得られる詳細な流速場の情報から、間欠的に生じる大規模上昇流が流況の変動パターンを規定する重要な要因となっていることが示された。今後は、落下流状態と表面流状態が交互に生じる遷移流の水理条件でも計算を行って、本法の有効性に関する検証を進めたい。また、粒子スケール以下の乱流の作用を如何に取り込むかについても今後の課題としたい。

謝辞：なお、本研究の遂行に際して、MPS法の開発・提唱者である東京大学助教授・越塚誠一博士より計算技術面での多くの有益なる御助言を賜ったことを付記して、謝意を表する。

参考文献

- 1) Hirt, C. and Nichols, B. D.: Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries, *Jour. Comput. Phys.* 39, pp.201-225, 1981.
- 2) 米山 望, 守屋祥一: VOF法を用いた自由液面の数値解析手法, 水工学論文集, 第39巻, pp.373-378, 1995.
- 3) 中山恵介, 佐藤圭洋, 堀川康志: CIP法を用いた浅水流方程式の数値計算手法の開発, 水工学論文集, 第42巻, pp. 1159-1164, 1996.
- 4) Koshizuka, S., Tamako, H. and Oka, Y.: A particle method for incompressible viscous flow with fluid fragmentation, *Computational Fluid Dynamics J.*, Vol. 4, No. 1, pp.29-46, 1995.
- 5) 後藤仁志, 酒井哲郎, 沖 和哉, 芝原知樹: 粒子法による巻き波型砕波を伴う斜面遡上過程の数値シミュレーション, 海岸工学論文集, 第45巻, pp.181-185, 1998.
- 6) 越塚誠一: 数値流体力学, インテリジェントエンジニアリングシリーズ, 培風館, p223, 1997.
- 7) Koshizuka, S. and Oka, Y.: Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid, *Nuclear Science and Engineering*, Vol. 123, pp.421-434, 1996.
- 8) Clay, C. H.: Design of Fishways and other Fish Facilities, Department of Fisheries of Canada, Ottawa, p.301, 1961.
- 9) 廣瀬利雄・中村中六: 魚道の設計, ダム水源地環境整備センター, p. 376, 山海堂, 1991.
- 10) Rajaratnam, N. and Katopodis, C.: Plunging and Streaming flows in pool and weir fishways, *J. Hyd. Eng., ASCE*, Vol. 114, No. 8, pp. 939-944, 1988.

(1998.9.30受付)