

非線形 $k-\varepsilon$ モデルによる角柱周辺流れの 3次元解析

NUMERICAL ANALYSIS OF FLOWS AROUND SQUARE CYLINDER
BY MEANS OF NON-LINEAR $k-\varepsilon$ MODEL

木村 一郎¹・細田 尚²
Ichiro KIMURA and Takashi HOSODA

¹正会員 工博 四日市大学講師 環境情報学部環境情報学科 (〒512-8512 三重県四日市市萱生町1200)

²正会員 工博 京都大学助教授 工学研究科土木工学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

The non-linear $k-\varepsilon$ model is applied to 3-D computation of unsteady flows around a square cylinder in open channels. Applicability of the non-linear $k-\varepsilon$ model to the Karman vortices in the 2-D flow field is firstly investigated through the comparison of calculated results with experimental ones conducted in the closed water section by Lyn and the model constants are adjusted. Then, the 3-D computations of unsteady flows around a square cylinder in open channels are carried out focusing on the Karman vortices and the horseshoe vortices generated in the upstream region of a cylinder. The effects of the depth to the 3-D flow structures are also investigated through the comparison of the numerical results under the conditions of the different depths.

Key Words : 3D numerical model, non-linear $k-\varepsilon$ model, open channel flow, Karman vortex, horseshoe vortex

1. はじめに

橋脚や水制等, 水中に設置された構造物周辺では, 一般に流れが強い3次元性と非定常性を示す. 例えば, 流れに垂直に立てられた円柱, あるいは角柱周辺では, カルマン渦の発振や馬蹄渦の形成等, 複雑な3次元流れ構造が見られる. これらの流れは, 構造物の強度を考える上で重要であるだけでなく, 周辺の河床変動や流れの抵抗等にも影響を及ぼす. したがって, このような流れ構造の解明は, 防災と環境の両面において重要な課題と位置づけられる.

3次元性の強い流れ場を数値解析的に再現するためには, 当然3次元モデルの適用が必要となる. 近年, パーソナルコンピュータの高速化が進み, これまでスーパーコンピュータによらざるを得なかった大規模な3次元計算も, パソコンである程度こなせるようになってきた. しかしながら, DNSやLES等が手軽に行えるには至っていない. 現在のところ, 計算精度と計算機負荷のバランスのとれた解析モデルとしては, レイノルズ平均乱流モデル, 中でも $k-\varepsilon$ モデルをはじめとする2方程式モデルであると考えられる.

ところで, カルマン渦等の非定常な渦現象の数値シミュレーションにおいては, 乱流モデルの選択に特に留意する必要がある. 例えば, 標準型 $k-\varepsilon$ モデルでは, カルマン渦の発振が再現できないことがKato・Launder¹⁾らによって指摘されている. また, 横流入部の渦運動や複断面開水路流れにおける水平渦運動等のせん断不安定に起因する渦運動においても, 標準型 $k-\varepsilon$ モデルによる再現性が悪いことが報告されている²⁻⁴⁾. これらの非定常渦運動を再現するためには, 渦動粘性係数にかかる係数 c_μ を定数とおかず, ストレイン・パラメータやローテーション・パラメータの関数で与える必要がある点が指摘されている^{2), 3)}. この点に留意して, 本研究では構成則に2次の非線形項を考慮し, かつストレイン・パラメータの効果を導入した非線形 $k-\varepsilon$ モデルにより, 角柱周辺の流れの解析を試みる.

まず, モデルの適用性の検証とモデル定数の同定を行うため, Lynによって行われた実験⁵⁾(矩形断面管路における実験)と同条件で計算を行い, 2次元的な流れ特性について, 解析結果と実験結果の比較を行う. 次に, 開水路流れにおける角柱周辺の流れについて水理実験の再現計算を行い, 流れの非定常性と3次元特性について検討を行う. さらに, 水深の異なる条件で計算を行うこと

表-1 モデル定数の値

$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	σ_k	σ_ε	C_1	C_2	C_3	A_1	A_2
1.44	1.92	1.0	1.3	0.4	0	-0.13	0.45	0.3

により、水深が流れ構造に及ぼす影響について考察する。

2. 基礎式と数値解析法

(1) 基礎式

本研究で用いる基礎式は、3次元流れにおける連続式、運動方程式、 k -方程式、 ε -方程式から構成される。これらの基礎式を以下に示す。

[連続式]

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

[運動方程式]

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial U_j U_i}{\partial x_j} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial -\overline{u_i u_j}}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} \quad (2)$$

[k -方程式]

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k U_j}{\partial x_j} = & -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \varepsilon \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\frac{D_t}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

[ε -方程式]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon U_j}{\partial x_j} = & -C_{\varepsilon 1} \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\frac{D_t}{\sigma_\varepsilon} + \nu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

ここに、 (x, y, z) ：空間座標、 t ：時間、 (U, V, W) ：アンサンブル平均流速ベクトル、 P ：アンサンブル平均圧力、 (u, v, w) ：乱れ速度ベクトル、 ν ：動粘性係数、 ρ ：流体の密度、 k ：乱れエネルギー、 ε ：乱れエネルギー散逸率、 D_t ：渦動粘性係数を表わす。添え字 i, j は1, 2, 3の値をとり、それぞれ1は x 方向、2は y 方向、3は z 方向を表わす。また、添え字 i, j に関しては総和の規則を用いている。

一方、レイノルズ応力の構成則としては、次の式(5)に示される2次の非線形項を考慮した非線形 k - ε モデルを用いている⁶⁻⁸⁾。

[Reynolds応力]

$$\begin{aligned} -\overline{u_i u_j} = & D_t S_{ij} \\ & - \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \frac{k}{\varepsilon} D_t \sum_{\beta=1}^3 C_\beta \left(S_{\beta ij} - \frac{1}{3} S_{\beta \alpha \alpha} \delta_{ij} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

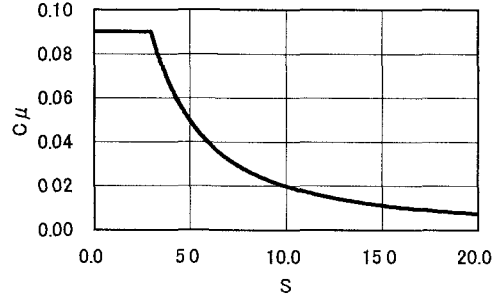


図-1 ストレイン・パラメータと C_μ の関係

$$S_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}, \quad D_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad S_{lij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_r} \frac{\partial U_j}{\partial x_r},$$

$$S_{2ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_r}{\partial x_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_r} + \frac{\partial U_r}{\partial x_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_r} \right), \quad S_{3ij} = \frac{\partial U_r}{\partial x_i} \frac{\partial U_r}{\partial x_j} \quad (6)$$

式(5)の右边第3項が2次の非線形項となっている。さらに、 C_μ を定数とした k - ε モデルでは、せん断不安定に起因する非定常な渦運動が再現できず、この点を改良するためには、渦動粘性係数に対するストレイン・パラメータ S の影響を考慮する必要性が指摘されている^{2),3)}。Gatski・Spezialeの理論⁹⁾では、 C_μ はストレイン・パラメータとローテーション・パラメータの関数になるが、モデルの簡単化のためまずストレイン・パラメータのみを考慮する。

S の定義を式(7)に示す。また、本研究では C_μ と S の関係式としてKato・Launder¹⁾がカルマン渦の解析に用いた式(8)を用いる。

$$S = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)^2} \quad (7)$$

$$C_\mu = \min \left[0.09, \frac{A_2}{1 + A_1 (\min[20, S])^{1.5}} \right] \quad (8)$$

式(5)中の非線形項のモデル定数 $C_1 \sim C_3$ 、および式(8)中のモデル定数 A_1, A_2 については、3. で述べるLynの実験を対象とした計算を通じて同定を行った。その他のモデル定数については従来の値をそのまま用いている。これらのモデル定数の値をまとめて表-1に示した。図-1には、 A_1, A_2 に表-1に示す値を用いた場合のストレイン・パラメータ S と C_μ の関係を示した。

(2) 数値解析法

数値解析法として、圧力、 k および ε を直方体格子の中央で、流速ベクトルの成分を側面で定義するスタッガード格子の有限体積法を用いた。運動方程式の移流項にはQUICKスキームを用い、 k および ε 方程式の移流項には一次精度の上流差分法を用いている。また、圧力は収束計算で求めている。

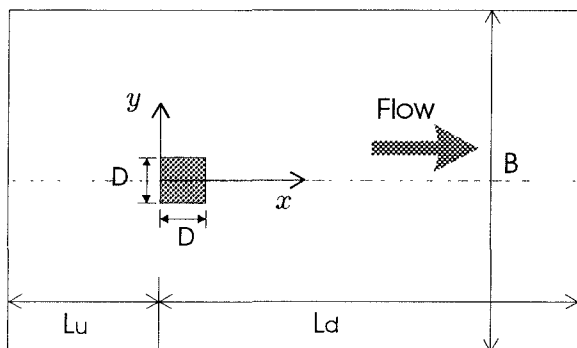


図-2 対象とする流れ場の平面図

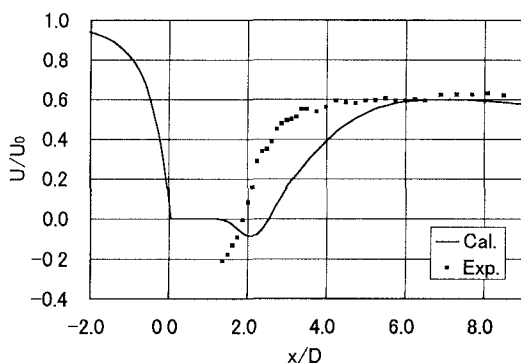


図-3 中心線上の時間平均流速分布

3. 数値計算法の検証

(1) 対象実験の概要

数値解析法の検証を行うため、Lynらによる角柱周辺の流れに関する実験⁹⁾と同条件で計算を行い、計算結果と実験結果の比較を行う。この実験は56cm(幅方向)×39cm(高さ方向)の長方形断面の管路で行われた。角柱の断面形状は一辺の長さ $D=4\text{cm}$ の正方形であり、角柱の高さは39cmである。また、角柱一辺の長さ D を代表長さとした場合のレイノルズ数は $Re = 2.2 \times 10^4$ である。

流速の計測は角柱に垂直な平面内においてLDVを用いて行われている。結果は、カルマン渦の1周期分を20の位相に分割し、それぞれの位相において流速とレイノルズ応力の分布がアンサンブル平均値として整理され、データベース化されている⁹⁾。

本実験を対象とした数値計算としては、2次元計算による乱流モデルの検討や^{10), 11)}、LESによる計算例^{12), 13)}などが報告されている。

(2) 数値計算の条件

計算対象領域の平面図を図-2に示した。この図で、 $B=56\text{cm}$ 、 $D=4\text{cm}$ 、 $Lu=196\text{cm}$ 、 $Ld=200\text{cm}$ としている。また、鉛直方向は、流れの対称性を仮定し、角柱の高さの半分の19cmとした。計算格子は可変直交格子(最小格子幅4mm)とし、格子数は、主流方向(x 方向)が94、横断

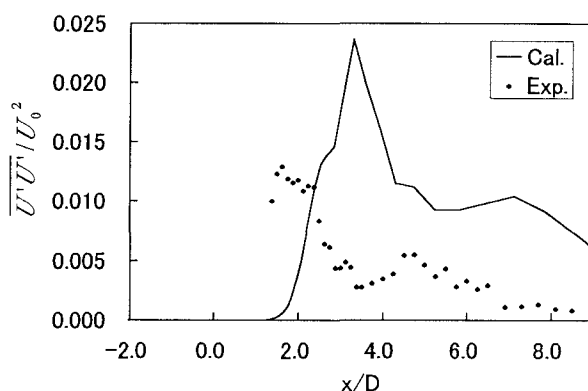


図-4 x 軸上の $\overline{U'U'}/U_0^2$ の比較

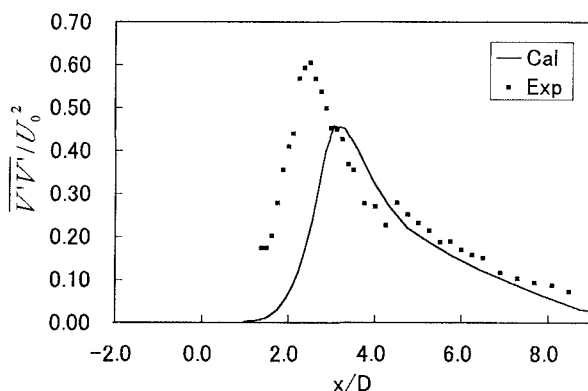


図-5 x 軸上の $\overline{V'V'}/U_0^2$ の比較

方向(y 方向)が54、鉛直方向(z 方向)が10である。

計算の境界条件は、上流端では主流流速 $U_0=55\text{cm/s}$ を一樣に与え、下流端では勾配0の条件を用いている。また、壁面の k と ε はWall Function法で与えた。

計算の初期条件としては、全領域において、 $U=U_0=55\text{cm/s}$ 、 $V=W=0$ を与えた。上流端の k については、Lynの実験結果をもとに、乱れ速度が主流流速の約0.02%となるように与えた。上流端の ε については、Boschら¹¹⁾にならい、 $D_t/\nu=10$ 程度となるように与えた。ただし、 k と ε の入口条件と、その計算結果への影響についてはさらに検討を行う必要がある。

(3) 数値解析結果の考察

初期条件より約60秒間の計算を行った時点で、流れが定常過程に達したと判断された。この状態からさらに20秒間の計算を行い、計算結果を0.05秒間隔で出力した。これらのデータをもとに、以下の比較を行う。

図-3は、 x 軸上の主流方向の流速の時間平均値を実験結果と比較したものである。計算結果は実験結果に比べて角柱背後の逆流域の流速が小さく、また流速の立ち上がりも若干遅いことがわかる。しかし、 x/D の大きいところで無次元流速が0.6に収束する特性は実験結果と一致する。計算結果の流速の立ち上がりが遅い原因としては、角柱周辺の格子幅を4mmと比較的大きくとしていることが一因と考えられるが、乱流モデルの妥当性につい

表-2 水理実験の条件

h_0 (cm)	U_0 (cm/s)	B/D	Re	Fr
1.14	18.18	5	8400	0.54

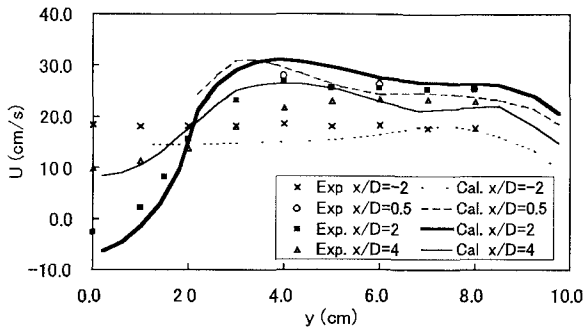


図-6 時間平均流速分布

てもさらに検討を進める必要がある。

図-4および図-5は、それぞれ、 $\overline{U'U'}/U_0^2$ 、 $\overline{V'V'}/U_0^2$ の x 軸上の分布を比較したものである ($U_0=55\text{cm/s}$:主流流速)。ここに、 $U'=U-U_t$ 、 $V'=V-V_t$ (U_t 、 V_t :時間平均値)である。図-4、5ともに、計算結果のピークの位置が実験結果よりも下流側にずれていることがわかる。特に、図-4では計算結果と実験結果の適合性がわるく、ピーク値については計算値が実験値の約1.7倍の値となっている。しかし、ピークが2箇所現れている点など、定性的特性にはある程度の一致がみられる。図-5においてはピーク値が逆に過小評価されており、計算値が実験値のおよそ75%の値となっている。計算値のピークの下流側 ($x/D>3$) では、計算結果と実験結果は良好に適合している。

このように、計算結果では角柱直後の領域 ($1<x/D<3$ 付近) の流れ特性を十分再現できていない。この点については、乱流モデルと計算格子の両面から、さらに検討を行う必要がある。しかしながら、流れの定性的特性はある程度再現されており、本モデルの角柱周辺の流れに対する適用性が示されたと考えられる。

4. 開水路流れにおける角柱周辺の流れの非定常3次元特性

(1) 対象とする流れ場と格子分割

実験は、長さ30m、幅20cmの長方形断面の開水路中で行われている。角柱は正方形断面で、一辺の長さは $D=4\text{cm}$ である。実験における水理条件等は表-2に示した。計算格子は可変直交格子とし、格子数は、主流方向が120、横断方向が36、鉛直方向を10とした。

(2) 自由水面の取り扱い

数値解析法は、3. とほぼ同様である。ここでは、自由水面の取り扱いについてのみ述べる。

表層の連続式と運動方程式に関しては、基礎式(1)お

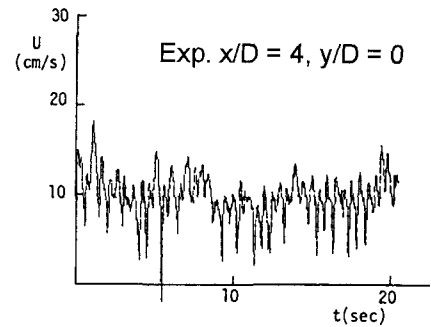
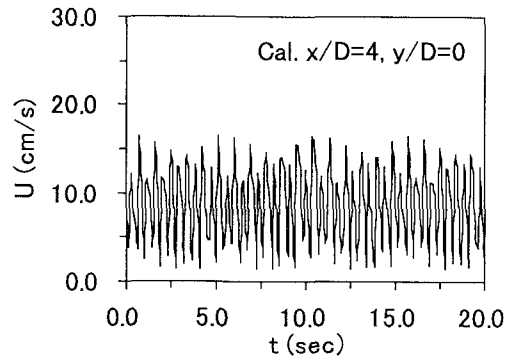


図-7 (a) 流速変動の比較 ($x/D=4$, $y/D=0$)

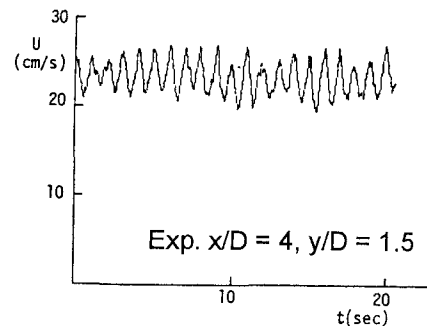
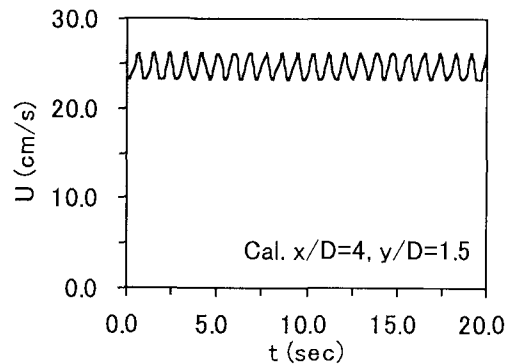


図-7 (b) 流速変動の比較 ($x/D=4$, $y/D=1.5$)

よび(2)を自由水面を考慮して表層のコントロール・ボリュームで積分した式を用い¹⁴⁾、水面変動も計算している。

また、 $k-\varepsilon$ モデルにおいて自由表面近傍での鉛直方向乱れの減衰を考慮する方法として、水面の k を対称条件で計算した k の0.8倍程度とする補正の方法¹⁵⁾、渦動粘性係数に水面近傍で減衰する関数を乗じる方法¹⁶⁾等があるが、本研究ではより簡単に、表層から一つ下の格子の k の0.8倍を表層の k とした。

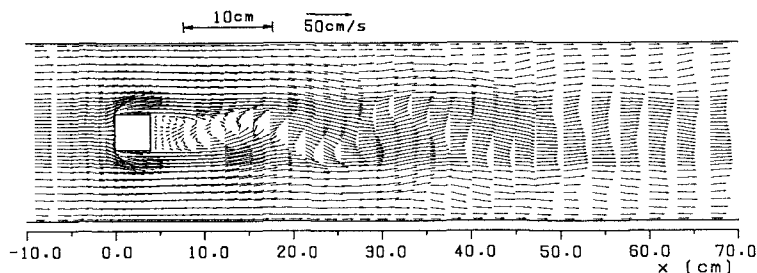


図-8 平面流速ベクトル ($h/D=0.285$)

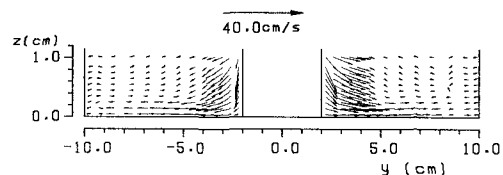


図-9 横断面内の流速ベクトル ($h/D=0.285$)

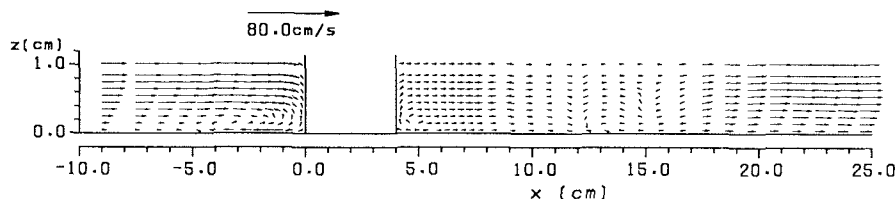


図-10 縦断面内の流速ベクトル ($h/D=0.285$)

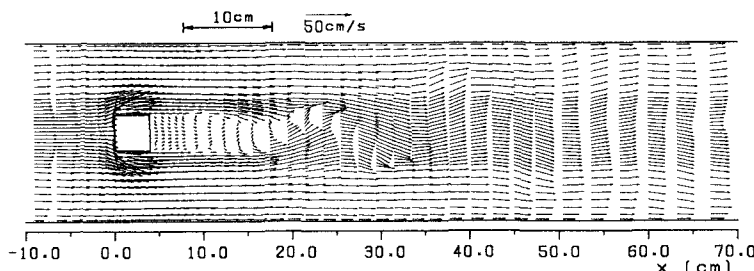


図-11 平面流速ベクトル ($h/D=0.855$)

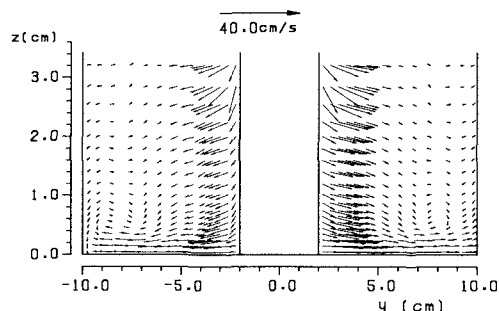


図-12 横断面内の流速ベクトル ($h/D=0.855$)

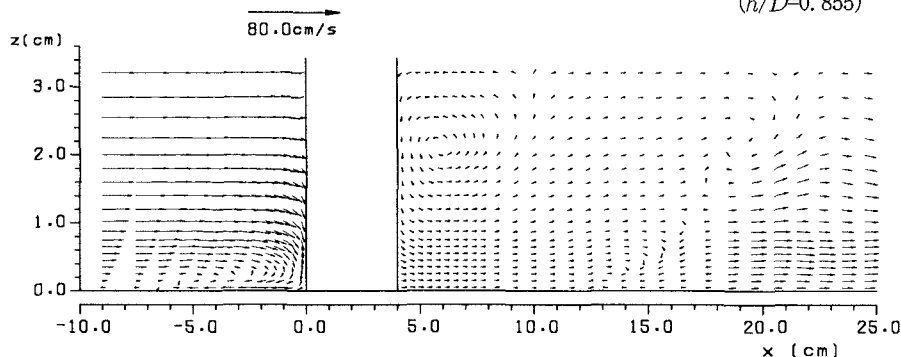


図-13 縦断面内の流速ベクトル ($h/D=0.855$)

表層の ε は杉山¹⁷⁾が提案する次式を用いた。

$$\varepsilon_s = \frac{C_{\mu 0}^{3/4} k_s^{3/2}}{0.4 \Delta y_s}, \quad (C_{\mu 0} = 0.09) \quad (9)$$

上式中、添字 s は表層の値を、 Δy_s は水面からの距離を表す。

(3) 数値解析結果の考察

a) 時間平均流速分布の比較

図-6は、実験結果と数値解析結果の時間平均流速分布を x/D の異なる4つの断面について比較したものであり、水路の右側半分について示している。この図より、数値

解析結果の流速分布は、角柱周辺の平均流特性をほぼ再現していることがわかる。

b) 流速変動の時系列

図-7(a), (b)は、流速変動の時系列を実験結果と計算結果で比較したものであり、横断方向の位置の異なる2点について示している。数値計算の周期は実験の周期とほぼ適合し、水路中央付近では、1/2周期の振動がみられる点も実験結果と一致する。

c) 非定常3次元流れ構造の解明

図-8は、水深の半分の位置における平面流速ベクトルを示したものである。カルマン渦の発振がみられる。ストローハル数 ($St = fD/U_0$) は、実験結果が $St=0.231$,

計算結果が $St=0.253$ であり、計算結果の方が10%程度大きい値となっている。

図-9は、角柱を横切る横断面内の流速ベクトルを示したものである。角柱の両側には斜め下方へ向かう流れがみられ、この流れが底面に衝突して水路の側岸に向かう流れとなっている。また、図-10には水路中心線に沿う縦断面内の鉛直流況を示した。角柱の上流側で時計回りの渦が見られる。これは、角柱に衝突した流れが下方に回り込むためと考えられる。図-9, 10に示される流れは、角柱周辺の馬蹄渦の発生に対応するものと考えられるが、明確な馬蹄渦の形成には至っていない。

流れの3次元特性をさらに検討するため、水深を3倍($h_0=3.42\text{cm}$)とし、他の条件は変えずに数値解析を行った。ただし、この計算では鉛直方向の格子数を19としている。図-11は、水深の半分の位置における平面ベクトルを示したものである。この図と図-8を比べると、カルマン渦の発生位置が若干下流側に移動していることがわかる。図-12には角柱を横切る横断面内のベクトルを、図-13には xy 軸に沿う縦断面内のベクトルをそれぞれ示した。これらの図と図-9, 10を比較すると、断面内の渦がよりはっきりと現れている。これより、水深が大きい場合には、水深が小さい場合に比べて角柱周辺の馬蹄渦がより明確に発生することが示された。

5. おわりに

本研究は非線形 $k-\varepsilon$ モデルを用いて、角柱周辺の流れの非定常3次元特性に関する検討を行ったものである。

まず、Lynによる実験と同条件で数値計算を行い、実験結果と計算結果の2次元流れ特性を比較することによりモデルの検証を行った。この結果、角柱の直背後の領域における再現性が悪い点が指摘されたものの、流れの基本構造を定性的に再現できることが示され、本モデルの角柱周辺の流れに対する適用性が確認された。

次に、開水路に設置された角柱周辺の流れのシミュレーションを行い、非定常3次元流れ構造について検討を行った。この結果、カルマン渦の発振と、馬蹄渦の形成過程等が再現された。また、水深を変化させて計算を行った結果、水深が大きい場合ではカルマン渦の発生位置が下流側に移動するとともに、角柱周辺の馬蹄渦がより明確に発生することが示された。

今後、モデルの改良を進めるとともに、より多くの水理条件のもとで検討を進めていきたい。

参考文献

- 1) Kato, M. and Launder, B.E. : The modeling of turbulent flow around stationary and vibrating square cylinders, Proc 9th Symposium on Turbulent Shear Flows, Kyoto, Vol.1, pp.P10.4.1-10.4.6, 1993.
- 2) 木村一郎, 細田 尚, 村本嘉雄, 櫻井寿之: 開水路横流入部における渦運動の数値シミュレーション, 水工学論文集, 第41巻, pp.717-722, 1997.
- 3) Hosoda, T., Kimura, I. and Muramoto, Y.: Vortex formation processes in open channel flows with a side discharge by using the non-linear $k-\varepsilon$ model, Proc. of 11th Symposium on Turbulent Shear Flows, Grenoble, France, Vol.2, pp.19 1-19 6, 1997.
- 4) Hosoda, T., Sakurai, S., Kimura, I. and Muramoto, Y. : Unsteady flows in compound open channels with horizontal vortices and secondary currents by means of non-linear $k-\varepsilon$ model, Proc of ISFMTM '98, Tainan, Taiwan, 1998 (in printing).
- 5) Lyn, D. A. : Vortex shedding past square cylinder, ERCOFTAC Fluid Dynamics Database, Case 43, 1992
- 6) Yoshizawa, A. Statistical analysis of the deviation of the Reynolds stress from its eddy viscosity representation, Phys Fluids Vol.27, pp.1377-1387, 1984
- 7) Rubinstein, R. and Barton, J.M.: Nonlinear Reynolds stress models and the renormalization group, Phys. Fluids A 2, pp.1472-1476, 1990.
- 8) 明 賢國, 笠木伸英: 乱れの壁面漸近条件を考慮した非等方性 $k-\varepsilon$ 乱流モデルの提案, 日本機学会論文集 (B編), 56巻531号, pp.94-100, 1990
- 9) Gatski, T.B and Speziale, C.G. On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows, J. Fluid Mech, Vol.254, pp 59-78, 1993
- 10) Franke, R. and Rodi, W. : Calculation of vortex shedding past a square cylinder with various turbulence models, in F. Durst et al (eds.), Turbulent Shear Flows 8 Springer, New York, pp.1-, 1993
- 11) Bosch, G. and Rodi, W. . Simulation of vortex shedding past a square cylinder with different turbulence models, Int J Numerical Methods in Fluids, Vol 28, pp.601-616, 1998.
- 12) 野澤剛二郎, 田村哲郎: 高精度の風上差分を併用した角柱まわりの流れのLES計算, 第10回数値流体力学シンポジウム講演論文集, pp.174-175, 1996
- 13) 三浦慎一郎, 角田和彦, 登坂宣好 有限要素法による角柱まわりの流れのLES, 第11回数値流体力学シンポジウム講演論文集, pp.179-180, 1997
- 14) 岩佐義朗, 細田 尚, 平岡順次, 岡川一義: 無巻水路トンネル内の流れの抵抗則について, 京都大学防災研究所年報 第34号B-2, pp 337-353, 1991.
- 15) 瀬津家久, 中川博次: 修正 $k-\varepsilon$ モデルによる開水路乱流の数値計算, 土木学会論文集 No.387/II-8, pp 125-134, 1987.
- 16) 細田 尚: 開水路流れにおける乱流拡散機構に関する水理学的研究, 京都大学博士論文, 1990.
- 17) 杉山 均, 秋山光庸, 松原 珠: 複断面開水路内の乱流構造解析と縦渦生成に関する研究, 土木学会論文集 No.515/II-31, pp.55-65, 1995

(1998. 9. 30受付)