

運動量方程式に基づく複断面直線開水路乱流における二次流の生成機構の考察

Generation Mechanism of Secondary Flow in a Straight Compound Open Channel
Based on Momentum Equations

佐藤弘行¹・河原能久²

Hiroyuki SATOH and Yoshihisa KAWAHARA

¹正会員 工修 建設省土木研究所ダム部フィルダム研究室 (〒305-0804茨城県つくば市大字旭1番地)

²正会員 工博 建設省土木研究所河川部都市河川研究室 (〒305-0804茨城県つくば市大字旭1番地)

Large eddy simulation of fully developed turbulent flow in a compound open channel was carried out using the Smagorinsky model. The Reynolds number based on hydraulic radius and cross sectional averaged velocity is 5300. The mechanism of secondary flow is discussed by evaluating terms in the momentum equations for mean secondary flow. To clarify the important role of pressure gradients in driving the secondary currents, pressure is decomposed into several components that account for the contributions of convection, external force, the Reynolds stresses, and the viscosity. It is found that not only the Reynolds stresses but also the pressure gradients induced by the normal and shear Reynolds stresses play a major role in generating secondary flow.

Key Words : Compound Open Channel, Turbulent Flow, Large Eddy Simulation, Smagorinsky Model, Reynolds Stress, Secondary Flow

1. はじめに

非円形断面直線開水路乱流では、レイノルズ応力に起因するいわゆるPrandtlの第二種二次流が発生する。この二次流に関する研究は、実験的にはレーザードップラー流速計などによる高精度の計測が行われている¹⁾。一方、代数応力モデルを中心として数値解析も行われており、二次流のパターンが良好に再現されている^{2),3)}。しかしながら、実験では圧力の計測が不可能であり、また解析ではモデルへの依存性が強いこと等のために、二次流の発生機構には解明すべき点が残されている。

コンピュータ能力の急速な発展により盛んに研究されるようになったLES (Large Eddy Simulation) はこのような欠点を克服できる可能性を持っている。つまり、計算格子より小さいスケール(SGS, Subgrid Scale)の運動にKolmogorovの相似則を仮定しているために汎用的なモデルを構成できる可能性を秘めていること、流れ場は計算格子で解像できるスケール(GS, Grid Scale)によりほぼ表現されるため瞬間像の検討がある程度出来ること、高次統計量などが容易に算出できること、等の長所をLESは有している。そのため、二次流の生成機構上重要であると考えら

れるレイノルズ応力についても、その輸送方程式中の高次項を評価することが出来るため、LESによりPrandtlの第二種二次流の生成機構の理解を深められることが期待できる。実際、正方形ダクト乱流に対するLESにより、渦度と運動量方程式から二次流の生成機構に関する説明がなされている⁴⁾。

LESによる複断面直線開水路乱流の解析は、既にThomas & Williamsにより行われている⁵⁾が、そこでは二次流の発生機構に関する考察はなされていない。そこで本研究では、LESの基本モデルであるSmagorinskyモデルを用いた解析結果⁶⁾に基づいて、運動量方程式中のレイノルズ応力や圧力に注目して、平均二次流の発生機構について検討を行うことを目的としている。このために高水敷先端部と、高水敷と低水路の隅角部での二次流の生成機構を検討する。

2. 基礎方程式および数値解法

連続式とNavier-Stokes方程式に空間フィルターを施し変形すると、以下のGS成分に関する方程式が得られる。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (1b)$$

$$\bar{P} = \bar{p} + \frac{2}{3} \rho q \quad (1c)$$

$$\tau_{ij} = (\overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j) - \frac{2}{3} \delta_{ij} q \quad (1d)$$

$$q = \frac{1}{2} (\overline{u_k u_k} - \bar{u}_k \bar{u}_k) \quad (1e)$$

$\bar{\phi}$ は空間平均量, u_i は i 方向の流速, g_i は重力加速度の i 方向成分, τ_{ij} はSGS応力, q はSGSの乱れエネルギーを表している. Smagorinskyモデルでは, SGS応力 τ_{ij} は以下のようにモデル化される.

$$\tau_{ij} = -2\nu_t \bar{S}_{ij} \quad (2a)$$

$$\nu_t = (C_s f \Delta)^2 (2\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{1/2} \quad (2b)$$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2c)$$

$$\Delta = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3} \quad (2d)$$

$$f = 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{25}\right) \quad (2e)$$

$$y^+ = \frac{u_* y}{\nu} \quad (2f)$$

f は壁面付近での渦粘性係数の減少を表現するためのVan Driest型減衰関数である. Smagorinsky定数 C_s の値は, 通常の壁乱流の解析に用いられる0.1を用いた.

以上の基礎方程式を, 有限体積法により離散化した. 空間差分には2次精度中心差分, 時間差分に関しては移流項と拡散項にAdams-Bashforth法, 圧力勾配項に完全陰解法を用いた. 連続式とNS方程式の連成解法にはHSMAC法を用いた. 解析対象は, Tominaga & Nezuの実験¹⁾を参考として, 片側のみに高水敷を有する複断面直線開水路の発達した乱流とした. 水深を H として, 水路全幅が $5H$, 高水敷高さが $0.5H$, 高水敷幅が $2.5H$ である. 解析領域の流下方向の長さは計算時間の制約より $4H$ とした. 格子点数は, 主流方向75, 水深方向79, スパン方向220とした. 境界条件は, 自由水面では水面を変動しない平面と仮定し, 水面に垂直な流速成分がゼロ, その他の成分は剪断応力がゼロとし, 壁面ではNo-Slip条件, 主流方向には周期条件とした. 座標系は図1のように設定した.

3. 高水敷先端部における斜昇流の生成機構に関する考察

図2, 図3に高水敷先端部近傍における二次流の計算結果とTominaga & Nezuによる実験結果¹⁾を示す. 高水敷先端部近傍の斜昇流は良好に再現されているが, 低水路内の渦の大きさが違うなどの差異も認め

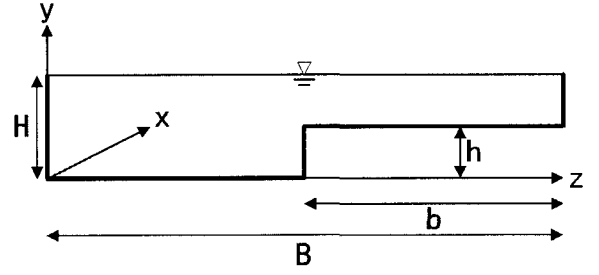


図1 座標系

られる. そこでまず, 比較的良好に一致している高水敷先端部の斜昇流の生成機構から考察する.

横断面内の連続式と運動量方程式は以下の通りである.

$$\frac{\partial \langle v \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle w \rangle}{\partial z} = 0 \quad (3a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle v \rangle \langle v \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle v \rangle \langle w \rangle}{\partial z} = & -g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial y} - \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial y} - \frac{\partial \langle v' w' \rangle}{\partial z} \\ & + \nu \left(\frac{\partial^2 \langle v \rangle}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \langle v \rangle}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (3b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle v \rangle \langle w \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle w \rangle \langle w \rangle}{\partial z} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial z} - \frac{\partial \langle v' w' \rangle}{\partial y} - \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial z} \\ & + \nu \left(\frac{\partial^2 \langle w \rangle}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \langle w \rangle}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (3c)$$

$\langle \phi \rangle$ は時間平均量, ϕ' はそれからのずれを表している. 式(3a)~(3c)はGS成分とSGS成分の和に対する時間平均量の式であるが, これを直接計算することのできるGS成分の時間平均量のみで評価する. いま次の記号を用いてレイノルズ応力の垂直成分と剪断成分の二次流に及ぼす影響を検討する.

$$\overrightarrow{R_N} = \left(-\frac{\partial \langle \bar{v}'^2 \rangle}{\partial y}, -\frac{\partial \langle \bar{w}'^2 \rangle}{\partial z} \right) \quad (4a)$$

$$\overrightarrow{R_S} = \left(-\frac{\partial \langle \bar{v}' w' \rangle}{\partial z}, -\frac{\partial \langle \bar{v}' w' \rangle}{\partial y} \right) \quad (4b)$$

図4は高水敷先端部付近でのレイノルズ応力の寄与を示している. これより, レイノルズ応力が高水敷先端部より斜め上方へ流れを駆動させる力として作用していることが確認できる.

図5は圧力勾配の効果 $\overrightarrow{P_T}$ を表している. $\overrightarrow{P_T}$ は次式のように定義されるが, 静水圧 $p_{sta} = \rho g_2 (y - H)$ の影響を含まない圧力勾配である.

$$\overrightarrow{P_T} = \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\langle \bar{P} \rangle - p_{sta})}{\partial y}, -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\langle \bar{P} \rangle)}{\partial z} \right) \quad (5)$$

図5と図4を比較すると, 圧力勾配はレイノルズ応力の効果とはほぼ反対向きに働いている.

図6はレイノルズ応力の効果と圧力勾配の効果の和を示している. 高水敷先端部からの斜め上向きの力とともに, 斜昇流を2つに分けようとする力も働いていることが読み取れる.

次に, レイノルズ応力の垂直成分と剪断成分が,

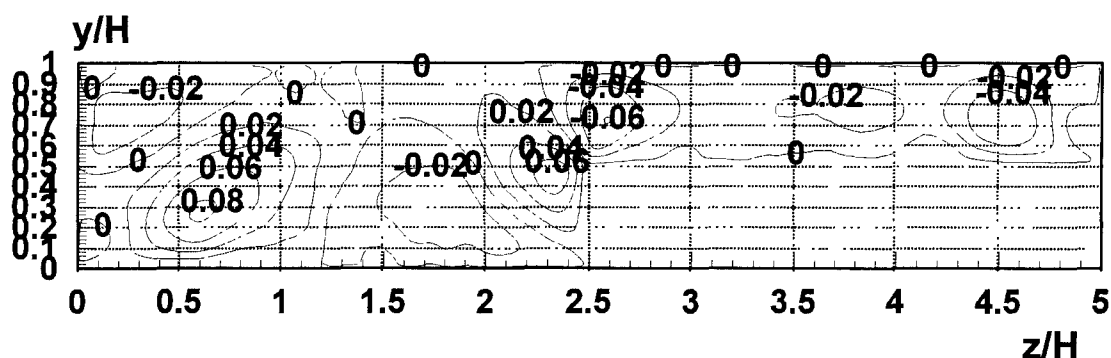


図2 平均二次流分布（計算結果⁶⁾，流れ関数表示， u_*H で無次元化）

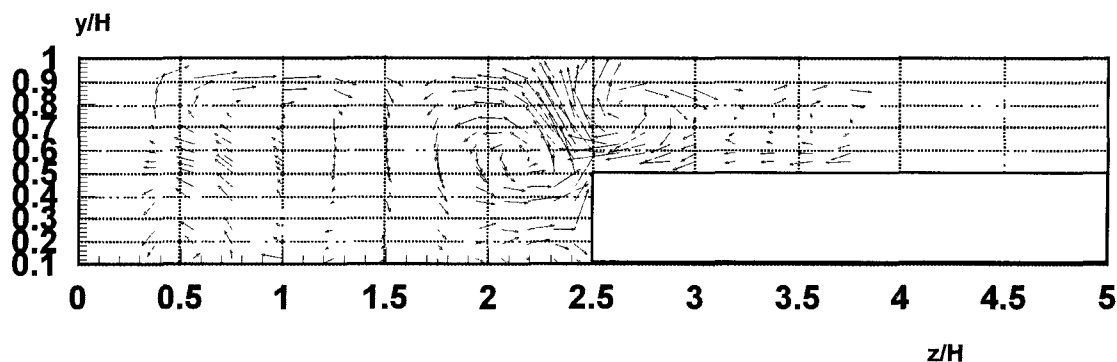


図3 平均二次流分布（Tominaga & Nezu¹⁾ による実験結果）

それぞれ高水敷先端部における斜昇流の生成機構にどのような影響を与えているのかを，梶島らの方法⁴⁾に従い，圧力を分解して考察することにする。

式(3a)～(3c)の3つの式から以下の圧力に関するポアソン方程式が得られる。

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \langle p \rangle}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \langle p \rangle}{\partial z^2} \right) = - \left(\frac{\partial^2 \langle v'^2 \rangle}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \langle w'^2 \rangle}{\partial z^2} \right) - 2 \frac{\partial^2 \langle v'w' \rangle}{\partial y \partial z} - \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \langle v \rangle \langle v \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle v \rangle \langle w \rangle}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \langle v \rangle \langle w \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle w \rangle \langle w \rangle}{\partial z} \right) \right] \quad (6)$$

ここで，圧力に対する運動方程式中の各項の作用を明確にするために，圧力を次のように移流項(Convection)，重力項(Gravity)，レイノルズ応力の垂直成分(Normal stress)，レイノルズ応力の剪断成分(Shear stress)，粘性項(Viscosity)の各項に対応する成分に分解することを考える。

$$\langle p \rangle = \langle p_C \rangle + \langle p_G \rangle + \langle p_N \rangle + \langle p_S \rangle + \langle p_V \rangle \quad (7)$$

ここで，Prandtlの第二種二次流は乱流において発生することから，二次流の発生機構に関しては本質的にレイノルズ応力が重要であると考え，式(6)中のレイノルズ応力の垂直成分と剪断成分に対応する圧力のポアソン方程式を解くこととする。

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \langle p_N \rangle}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \langle p_N \rangle}{\partial z^2} \right) = - \left(\frac{\partial^2 \langle v'^2 \rangle}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \langle w'^2 \rangle}{\partial z^2} \right) \quad (8a)$$

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \langle p_S \rangle}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \langle p_S \rangle}{\partial z^2} \right) = - 2 \frac{\partial^2 \langle v'w' \rangle}{\partial y \partial z} \quad (8b)$$

式(8a)と(8b)を，直接計算されたGS成分の流速成

分から解いた。式(8a)と(8b)の境界条件は，式(3b)と(3c)から，水面と壁面において垂直勾配がゼロであることである。また，図7から図14の記号の意味は以下の通りである。

$$\overline{P_N} = \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \overline{P_N} \rangle}{\partial y}, -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \overline{P_N} \rangle}{\partial z} \right) \quad (9a)$$

$$\overline{P_S} = \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \overline{P_S} \rangle}{\partial y}, -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \overline{P_S} \rangle}{\partial z} \right) \quad (9b)$$

$$\overline{D_N} = \overline{R_N} + \overline{P_N} \quad (9c)$$

$$\overline{D_S} = \overline{R_S} + \overline{P_S} \quad (9d)$$

ここで， $\langle \overline{P_N} \rangle$ と $\langle \overline{P_S} \rangle$ は，それぞれ式(8a)と(8b)をGS成分の流速成分で解いた時の解である。図5と図7を見ると，両者はよく似ており，圧力勾配 $\overline{P_T}$ がレイノルズ応力に関わる圧力の勾配 $\overline{P_N} + \overline{P_S}$ に起因していると考えられる。そのため，圧力も含めたレイノルズ応力の効果 $\overline{D_N} + \overline{D_S}$ を表している図8は，レイノルズ応力と圧力勾配の和を表している図6とよく似ている。図8では，図6と同様に，高水敷先端からの斜め上向きの力と，斜昇流を分けようとする力が作用していることを確認することができる。

次に，図8の $\overline{D_N} + \overline{D_S}$ の中で，圧力も含めたレイノルズ応力の鉛直成分の効果 $\overline{D_N}$ と，圧力も含めたレイノルズ応力の剪断成分の効果 $\overline{D_S}$ とがどのようなになっているのかを考えるために，図9に $\overline{D_N}$ ，図10に $\overline{D_S}$ を示す。これによると， $\overline{D_N}$ は高水敷先端部から離れた場所で斜昇流とそれを分けようとする起動力となっており，

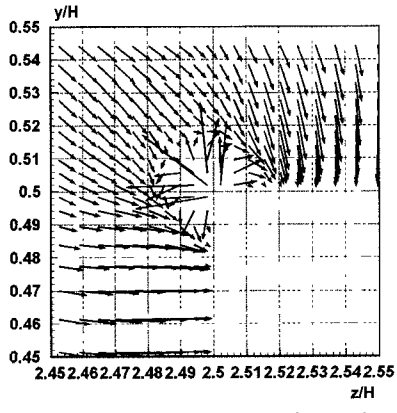


図4 高水敷先端での $\overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_S}$

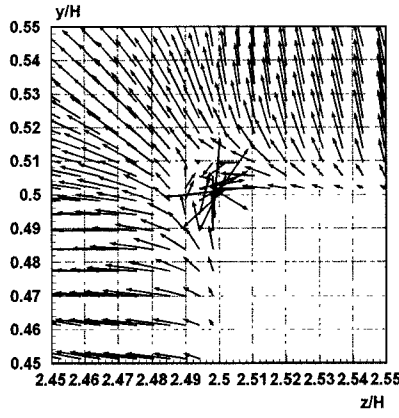


図5 高水敷先端での $\overrightarrow{P_T}$

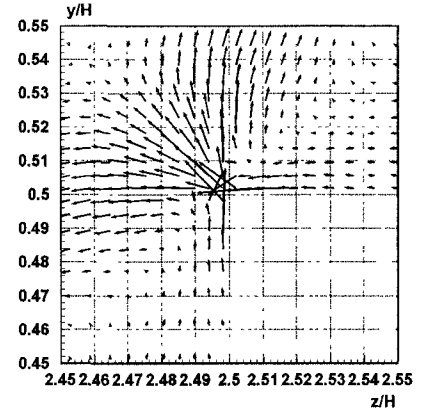


図6 高水敷先端での $\overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_S} + \overrightarrow{P_T}$

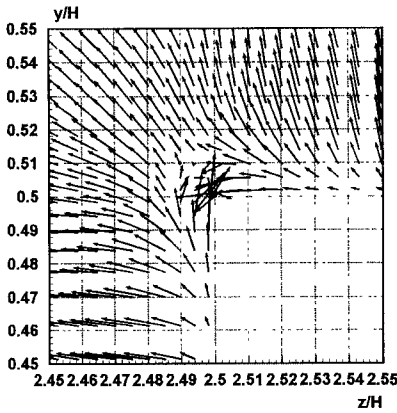


図7 高水敷先端での $\overrightarrow{P_N} + \overrightarrow{P_S}$

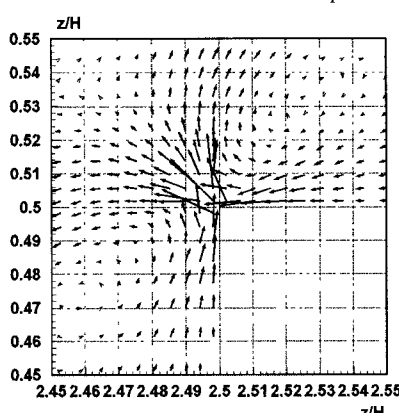


図8 高水敷先端での $\overrightarrow{D_N} + \overrightarrow{D_S}$

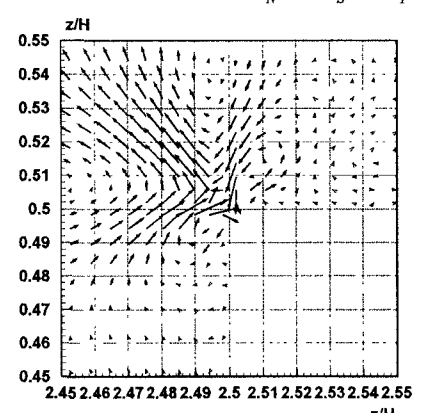


図9 高水敷先端での $\overrightarrow{D_N}$

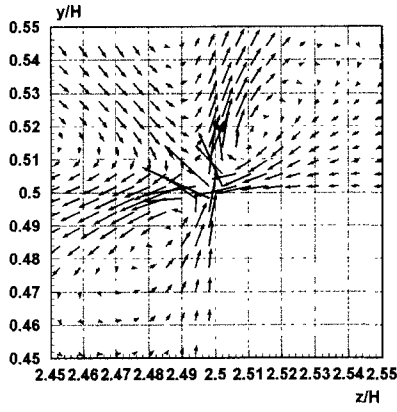


図10 高水敷先端での $\overrightarrow{D_S}$

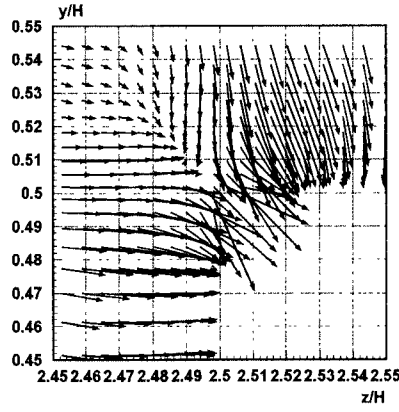


図11 高水敷先端での $\overrightarrow{R_N}$

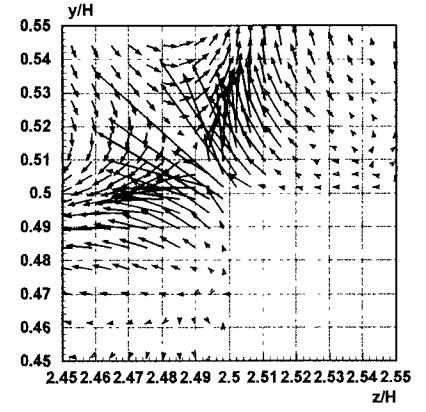


図12 高水敷先端での $\overrightarrow{R_S}$

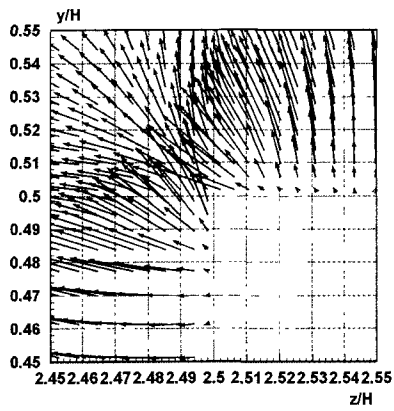


図13 高水敷先端での $\overrightarrow{P_N}$

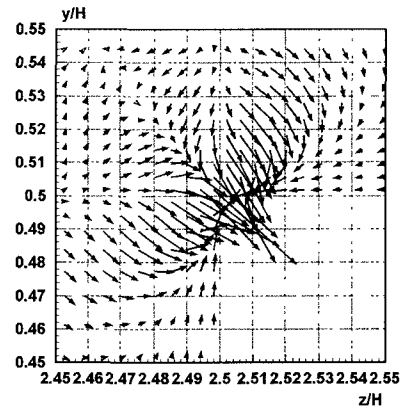


図14 高水敷先端での $\overrightarrow{P_S}$

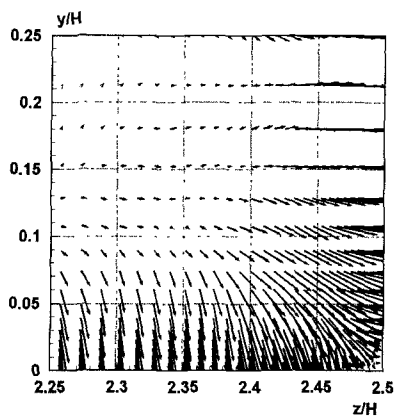


図15 隅角部での $\overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_S}$

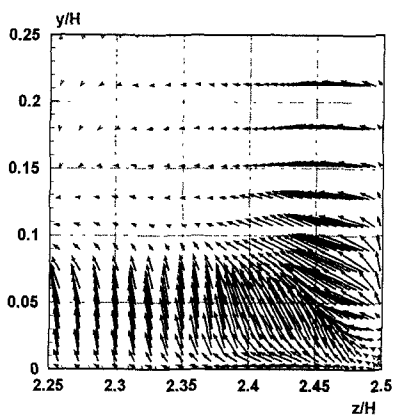


図16 隅角部での $\overrightarrow{P_T}$

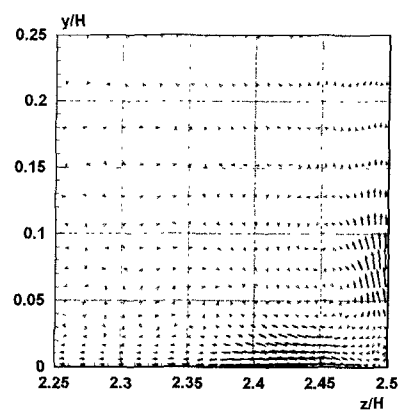


図17 隅角部での $\overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_S} + \overrightarrow{P_T}$

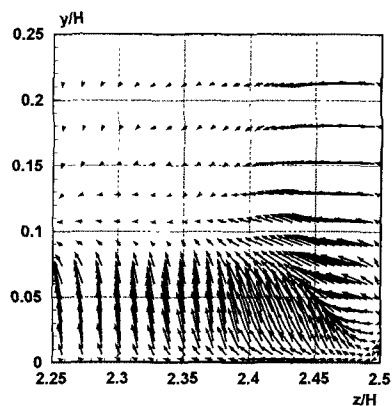


図18 隅角部での $\overrightarrow{P_N} + \overrightarrow{P_S}$

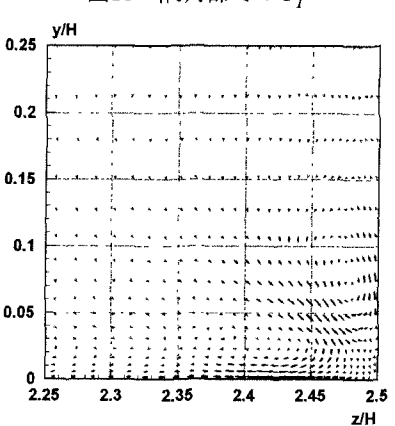


図19 隅角部での $\overrightarrow{D_N} + \overrightarrow{D_S}$

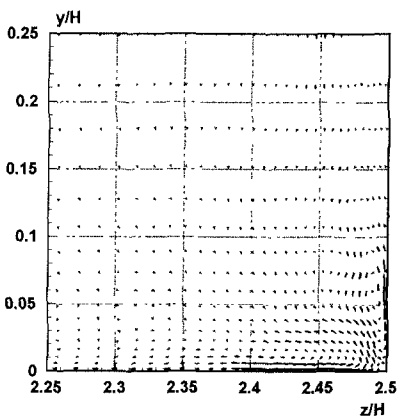


図20 隅角部での $\overrightarrow{D_N}$

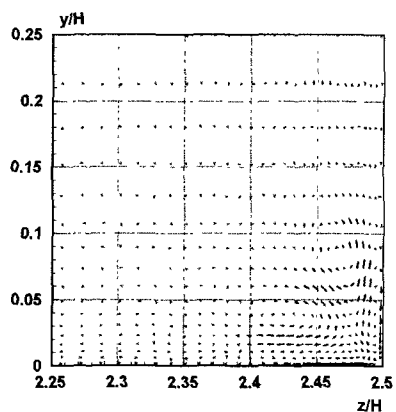


図21 隅角部での $\overrightarrow{D_S}$

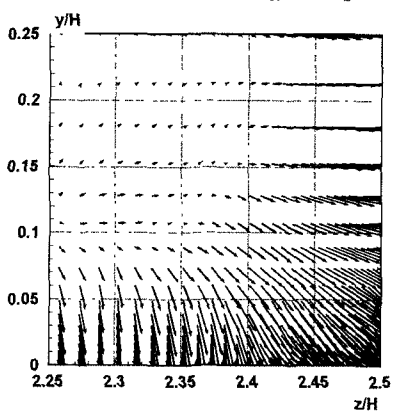


図22 隅角部での $\overrightarrow{R_N}$

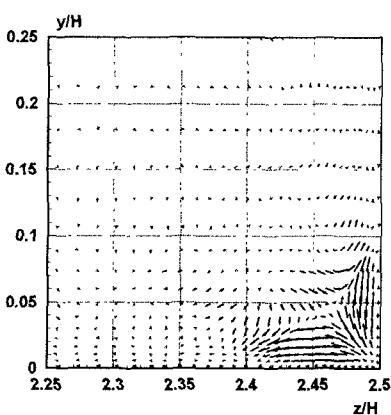


図23 隅角部での $\overrightarrow{R_S}$

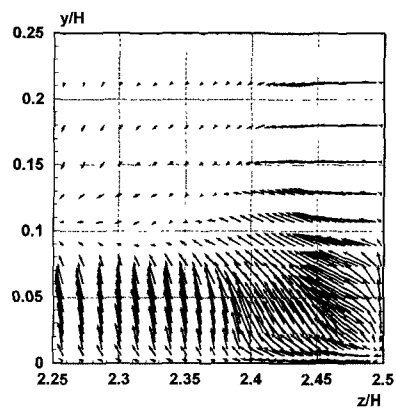


図24 隅角部での $\overrightarrow{P_N}$

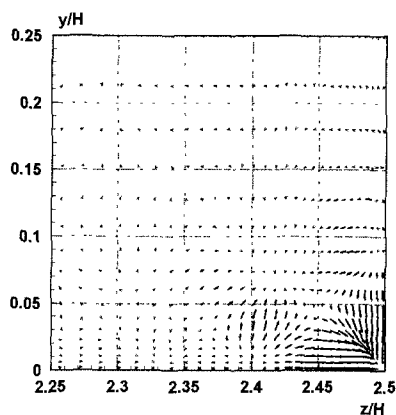


図25 隅角部での $\overrightarrow{P_S}$

$\overline{D_S}$ は高水敷先端のごく近傍の斜昇流、壁面に沿う流れ、2つに分かれる流れ、の起因力になっているものと考えられる。

さらに、 $\overline{D_N}$ 中の $\overline{R_N}$ と $\overline{P_N}$ 、および $\overline{D_S}$ 中の $\overline{R_S}$ と $\overline{P_S}$ の役割を明確にするために、図 11 から図 14 を示す。これらの図から、壁面から離れたところで斜昇流に貢献する $\overline{D_N}$ の中でも $\overline{P_N}$ の果たす役割が大きく、壁面のごく近傍の斜昇流と流れを 2 つに分ける点で大きな役割を果たす $\overline{D_S}$ の中では $\overline{R_S}$ の果たす役割が大きいものと考えられる。

4. 隅角部における二次流の生成機構に関する考察

次に、低水路と高水敷との隅角部における二次流の生成機構に関する考察を行う。この部分の二次流のパターンは Tominaga & Nezu の実験結果¹⁾と若干異なり、正方形ダクト流れに似たパターンを示している。そこでここでは、正方形ダクト乱流を対象とした梶島らの結果⁴⁾と比較してみる。

図15から図25に、高水敷先端部での考察と同様の手法を用いた結果を示す。梶島らの論文⁴⁾では図16, 19, 20, 21, 22, 23に対応する結果が示されているが、本研究の結果と梶島らの結果⁴⁾のパターンはよく一致している。つまり、圧力勾配も含めたレイノルズ応力の効果 $\overline{D_N}$ と $\overline{D_S}$ を見ると、 $\overline{D_N}$ は隅角の近傍、 $\overline{D_S}$ は隅角から少し離れたところで二次流を推進する向きに働いていることが分かる。

さらに $\overline{D_N}$ と $\overline{D_S}$ をそれぞれ $\overline{R_N}$ と $\overline{P_N}$ 、 $\overline{R_S}$ と $\overline{P_S}$ に分割して考えると、 $\overline{P_N}$ と $\overline{P_S}$ はそれぞれ $\overline{R_N}$ 、 $\overline{R_S}$ と逆向きに働いている。その中で、垂直成分では $\overline{R_N}$ が隅角への二次流の推進力として働き、剪断成分では隅角から離れたところでは $\overline{R_S}$ が、隅角近傍では $\overline{P_S}$ がそれぞれ二次流の推進力として働いていることが分かる。また、壁面に沿う二次流は、 $\overline{R_S}$ と $\overline{P_N}$ が推進力となっていることがうかがえる。

図11から図14、図22から図25を各成分について比較すると、それぞれほぼ同じ方向を向いている。しかし、微妙な方向の差や、特に壁面近傍における大きさの差により、各成分を足し合わせた合力に差が生じ、その結果高水敷先端では二次流が先端部から外向きになり、低水路と高水敷の隅角部では隅角へ流れ込む二次流になるものと考えられる。

5. 結論

LESの基礎モデルであるSmagorinskyモデルの結果を用いて、十分発達した複断面開水路乱流における二次流の生成機構を運動量方程式に基づいて検討した。本研究により得られた結論は以下の通りである。

(1) 二次流の生成機構にはレイノルズ応力のみならず、圧力の寄与も重要である。これは主流方向の

渦度方程式からは議論できないことである。

(2) $\overline{P_T}$ と $\overline{P_N} + \overline{P_S}$ は高水敷先端部及び隅角部どちらにおいても良く一致した。つまり、横断面内の圧力勾配は主にレイノルズ応力に起因していると考えられる。

(3) 高水敷先端部近傍の斜昇流の生成機構に関する考察を行った。 $\overline{D_N}$ は高水敷先端部から少し離れたところで斜昇流の推進力として働き、 $\overline{D_S}$ は高水敷先端のごく近傍で斜昇流の推進力として働くとともに斜昇流を2つに分けようとする力となっている。さらに $\overline{D_N}$ の中では $\overline{P_N}$ が、 $\overline{D_S}$ の中では $\overline{R_S}$ が、高水敷先端からの斜昇流の生成に重要な役割を果たしていることが分かった。

(4) 低水路と高水敷の隅角部における二次流の生成機構に関する考察を行った。二次流の生成機構としては、正方形ダクト乱流のそれとほぼ一致した。

本研究の二次流のパターンは、Tominaga & Nezu の実験結果と若干異なっている。その原因としては、解像度、主流方向の領域の長さ、水面での境界条件などが考えられる。今後は、より細かい格子網で解析を行い、瞬間像から見た二次流の特性や、レイノルズ応力の収支などを議論して行く予定である。

謝辞

本研究にあたり、貴重な実験データを提供していただいた、名古屋工業大学工学部社会開発工学科の富永晃宏助教授に深く感謝いたします。

参考文献

- 1) Tominaga A., and Nezu I.: Turbulent structure in compound open channel flows, J. Hydraulic Eng., ASCE, vol.117, No.1, pp.21-41, 1991.
- 2) Kawahara Y., and Tamai N.: Numerical calculation of turbulent flows in compound channels with an algebraic stress turbulence model, Proc.3rd Int. Symp. on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements, Tokyo, Japan, pp.9-16, 1988.
- 3) Naot D., Nezu I., and Nakagawa H.: Calculation of compound open channel flow, J. Hydraulic Eng., ASCE, Vol.119, NO.12, pp.1418-1426, 1993.
- 4) 梶島岳夫, 三宅裕, 西本俊幸: 正方形断面流路内の乱流の LES, 機論 (B編), 57巻, 540号, pp. 50-57, 1991.
- 5) Thomas, T.G., and Williams, J.J.R.: Large eddy simulation of turbulent flow in an asymmetric compound open channel, J. Hydraulic Res., Vol.33, No.1, pp.27-41, 1995.
- 6) 佐藤弘行, 河原能久: LESによる複断面直線開水路乱流の解析, 応用力学論文集, Vol. 1, pp. 673-682, 1998.

(1998. 9.30受付)