

# 河川流量の頻度解析における適合度と安定性の評価

## GOODNESS-OF-FIT AND STABILITY ASSESSMENT IN FLOOD FREQUENCY ANALYSIS

田中茂信<sup>1</sup>・宝 馨<sup>2</sup>

Shigenobu TANAKA and Kaoru TAKARA

<sup>1</sup> 正会員 工修 (財) 国土開発技術研究センター 調査第一部 (〒105-0001 港区虎ノ門2-8-10)

<sup>2</sup> 正会員 工博 京都大学防災研究所教授 水災害研究部門 (〒611-0011 宇治市五ヶ庄)

This paper describes the results obtained from flood frequency analysis in river basins in Japan. Using annual maximum discharge data at ninety-nine locations on the major rivers, the authors fitted a number of frequency analysis models (probability distributions) and evaluated them in terms of not only goodness of fit and but also stability of quantile estimates. The standard least-square criterion (SLSC) is used as a goodness-of-fit criterion. The stability of quantile estimates is assessed in terms of estimation error obtained by the jackknife method, which can be used for bias correction and quantification of estimation error. Based on the application results for ninety-nine samples, this paper has revealed: (1) goodness of fit of various models; (2) that  $SLSC = 0.04$  could be a threshold for good-fitted models; and (3) that the jackknife estimation error can be an index to evaluate the stability of the models. Importance of graphical analysis using probability paper is stressed.

**Key Words :** River discharge, Goodness-of-fit criterion, Stability of quantile estimates, The jackknife

### 1. はじめに

1997年に河川法が改正された。従来、河川の工事は工事実施基本計画に基づいて行われてきたが、河川法改正により、河川整備の基本となるべき方針に関する事項(河川整備基本方針)と具体的な河川整備に関する事項(河川整備計画)の2段階に区分し、後者については地方公共団体の長、地域住民等の意見を反映する手続きが導入された。これらの段階において、計画決定過程の透明化、情報公開、説明責任などが必然的に要求される。したがって、河川整備基本方針に定められる基本高水や計画高水流量の決定の際に用いたデータ、手法、判断の根拠などについても明らかにしておく必要があり、客観的かつ科学的合理的なデータおよび手法が要求される。

計画の基本量である外力を定める際に水文頻度解析が用いられるが、この過程においても曖昧さや主観的判断を極力排除し、判断の基準を明確にする必要がある。

従来、高水計画の検討にあたっては、十分な大きさの流量資料および時間雨量が得られなかったこと

もあって、日雨量をベースとした検討手法が主に用いられてきた。近年、一級水系の主要な地点では概ね40年間前後の流量観測資料が蓄積されてきている。その洪水流量のピーク値を直接頻度解析し、再現期間100年ないし150年、200年の確率流量を求め、それを河川整備の基本量とする考え方もある。

本研究では、全国の多数の河川流域における極値流量データベースを構築し、統一的な手法で頻度解析を行った。特に、慣用されている多くの確率分布について、客観的な規準を用いて適合度と安定性を評価した結果を報告する。

### 2. 研究方法

従来、河川計画においては、確率水文量の推定にあたって用いる確率分布の選択は、最小二乗法や上位10点最小二乗法、確率紙へのプロットの視覚的判断などが用いられてきた。しかしながら、これらは、主観的判断によるものであったり、確率分布をどれかに決定した後に最適化を行うものであるなど、適合度の客観的判断に疑問が残る。宝らは適合

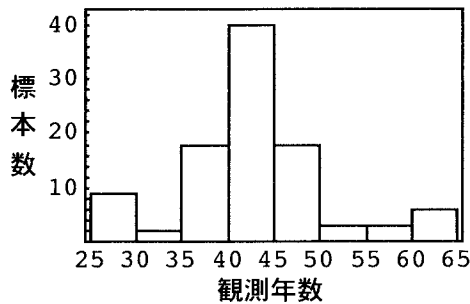


図-1 年最大値標本の観測年数

度の絶対的な判定基準として標準最小二乗規準 (SIISC) を提案している<sup>1)</sup>。適合度の判定規準には、他に相関係数や最大対数尤度、Akaike の情報量規準などがある。最大対数尤度と Akaike の情報量規準は、比較対象の確率分布の中での相対的評価しかできない。相関係数より SLSC の方が規準の持つ意味が明確である。このようなことを踏まえ、本研究では、SLSC により適合度の評価を行った。

また、一般に、母数の個数が多くなるにつれて標本によく適合するようになるため、適合度の観点からは母数の個数が多い確率分布の方が適合していると判断されることが多い。しかしながら、このような確率分布は、新しくデータが加わった際に、非超過確率の大きい部分の確率水文学量の変動が大きくなる可能性がある。流域の長期的な管理の目標の基礎となるものがデータの追加によってあまり変動するのも困るし、そもそもその確率水文学量に対する信頼が揺らいでしまう。このため、単に適合度がよい確率分布ではなく、データの追加に対しても安定的な確率分布を選択する必要がある。本研究では、リサンプリング手法を用いて安定性の評価を行った。

解析手順は、まず、従来水文統計の分野で用いられてきた分布モデルや極値統計の分野で用いられている確率分布の中から、宝・高棹<sup>2)</sup>、星<sup>3)</sup>が示している各分布と標本サイズに対して最適な母数推定法を用いて標本の母数ベクトルを求める。用いた分布モデルは、指数分布【Exp】(L モーメント法)、グンベル分布 (L モーメント法)、平方根指数型最大値分布<sup>4)</sup>【SQRT-ET】(最尤法)、一般極値分布【GEV】(L モーメント法)、対数ピアソンⅢ型分布 (原標本の積率解【LP3Rs】、対数標本の積率解【LP3Ls】)、対数正規分布 (3 母数の場合岩井法、2 母数の場合最尤法【LN2】) である。次に、SIISC により、確率分布の適合度を評価する。最後に、適合度が一定の基準を満足するものについて、リサンプリング手法である jackknife 法を用いて安定性の評価を行う。

### 3. 解析結果

#### (1) 解析に用いた資料

今回、解析に用いた資料はわが国の 68 の一級水系における 99 箇所流量である。観測流量は観測地点より上流の氾濫やダムなどによる貯留の影響を受けている。この影響を流出解析により取り除いた流量を解析の対象にした。流量の観測が始まった時期が異なるため、年最大値で整理されている 99 標本の観測年数は図-1 のような度数分布となる。40 年～44 年が 40 標本、35 年～39 年と 45 年～49 年が 18 標本であり、平均値は 42.1 年である。

#### (2) 確率分布の適合度

##### a) SLSC の算定

SLSC は確率分布の理論クォンタイル (非超過確率  $p$  または確率年  $T$  に対応する変量の値) と標本順序統計量との誤差の度合を標準変量を物差しとして測る指標で次式(1)、(2)で定義される<sup>1)</sup>。

$$SLSC = \frac{\sqrt{\xi^2}}{|s_{0.99} - s_{0.01}|} \quad (1)$$

$$\xi^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (s_i - s_i^*)^2 \quad (2)$$

ここに、 $s_{0.99}$ 、 $s_{0.01}$ ：それぞれ非超過確率 0.99 と 0.01 に対する当該確率分布の標準変量、 $N$ ：標本の大きさ、 $s_i$ ：順序統計量を推定母数で変換した標準変量、 $s_i^*$ ：プロットングポジション<sup>5)</sup>に対応した理論クォンタイルを推定母数によって変換した標準変量である。

確率分布によっては標準変量の考え方がいくつもあり得るものがある。本研究では、平方根指数型最大値分布と一般極値分布の  $s_i^*$  はグンベル分布の  $s_i^*$  と同じものを用いた。

また、SLSC の算定にあたっては、各種の分布に対して近似的に不偏なクォンタイルを与える Cunnane の公式をプロットングポジションに用いた<sup>6)</sup>。

##### b) 確率分布の SLSC

図-2 に各確率分布毎に 99 の標本に対して求めた SLSC のヒストグラムを示す。なお、SLSC が 0.07 以上の階級には母数推定がうまく行かなかった場合や対数正規分布で対数変換標本値の歪み係数の絶対値が 0.3 を越えた場合 (この場合は対数正規分布をあてはめるのは不適切である可能性が高い<sup>7)</sup>) を含めて表示している。

SLSC が小さいものが多いのは、LP3Ls 分布、岩井法、GEV 分布である。これらはすべて 3 母数の確率分布モデルである。LP3Rs 分布も 3 母数である

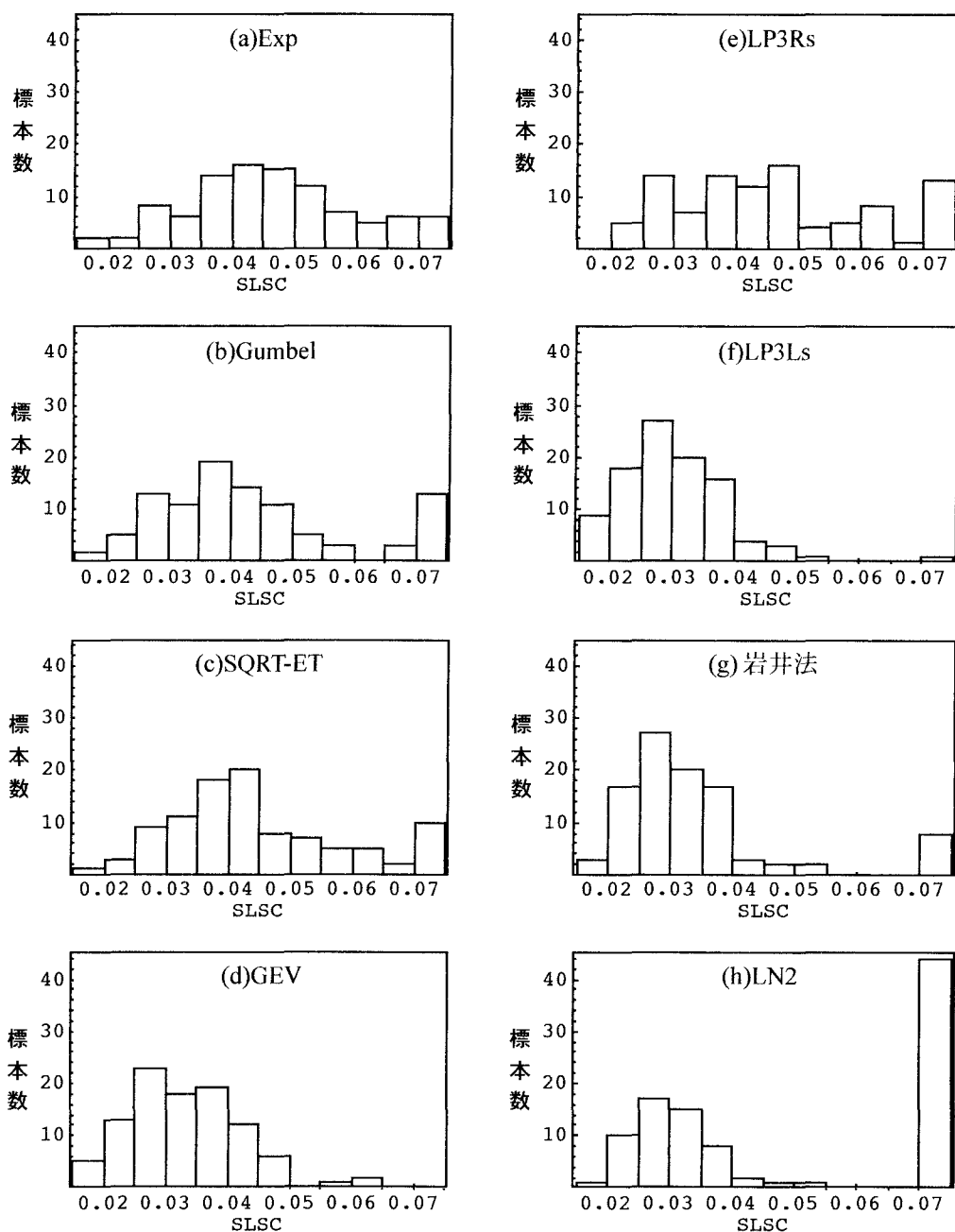


図-2 各確率分布モデル毎に99箇所の標本に対して求めたSLSCのヒストグラム

がSLSCが小さいものはそれほど多くはない。一方、2母数の分布は、一般的に3母数の分布よりSLSCが小さいものが少なく、LN2分布のつぎにグンベル分布がSLSCが小さいものが多い。なお、図-2(h)にみられるように全標本の44%で対数変換後の歪み係数の絶対値が0.3を越えている。

図-3は各標本に対してSLSCが最小になった確率分布を示したものである。LP3Ls分布が53%を占め、つぎにGEV分布、岩井法がつづく。LP3Rs分布とLN2分布は、今回対象とした標本ではSLSCが最小になることがなかった。

図-4はある標本に対して8つの確率分布のうちのSLSCの最小値をとってヒストグラムで示したものである。SLSC=0.02以下が15%、0.03以下が67

%, 0.04以下が96%となっている。宝・高棹は、SLSC=0.02を十分な適合度と判断される基準、SLSC=0.03を満足すべき適合度の判定基準としている<sup>9)</sup>。しかしながら、今回対象とした流量資料では、満足すべき適合度の判定基準としてSLSC=0.03をとると、3分の1の標本は適合度を満足する確率分布モデルが1つもない状況になる。本来、適合度の評価は適合度の悪いモデルをふるい分けるものであり、結果としてどのモデルも残らないという状況になる判定基準は適当ではない。また、河川流量は、一般に水位を測定して流量に換算しているが、観測所によっては、低水路満杯流量付近の流量が少なかったり、河川横断面形状の急変部付近の流量データが確率紙上で階段状にプロットさ

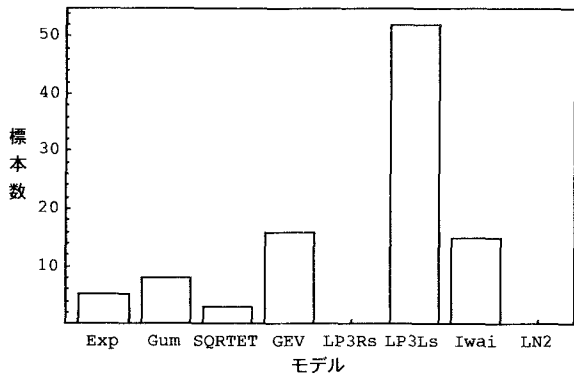


図-3 SLSCが最小になった確率分布モデルの頻度

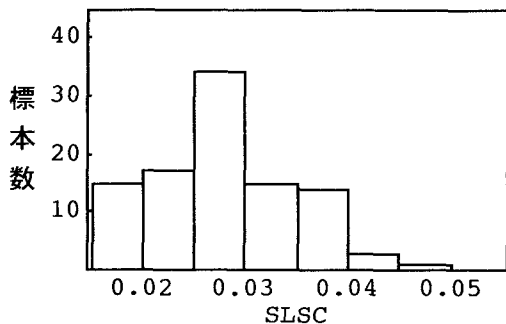


図-4 SLSC最小値の頻度分布

れたりすることがある。図-5にその一例を示す。プロットの全体的な傾向はモデルでも捉えられているが、階段状にプロットされている部分はモデルとの乖離が大きくなる状況にあり、これがSLSCの値を大きくしている一因になっている。この図において流量が1,700m<sup>3</sup>/s付近に観測値が見られないが、この流量がこの観測所における低水路満杯流量となっており、水位流量曲線の特性が変わる部分に相当している。一方、図-1に示したように観測期間が平均的に42年程度であることから、超過確率1/100～1/200の確率水文量は外挿により求めることになり、なんらかのモデルを必要とする。このような状況を踏まえ、河川流量の適合度の判定基準をSLSC=0.04程度に設定することが適当と考えられる。

### (3)安定性評価

安定性の評価はリサンプリング手法で行う。リサンプリング手法にはjackknife法やbootstrap法がある<sup>7)</sup>。jackknife法は大きさN個の標本のうち任意の1データを欠いたデータ数N-1個の標本をNセット作成し、これらの標本から求めた統計量をもとに不偏推定値およびそのまわりの推定誤差を算定する手法である。一方、bootstrap法は大きさN個の標本から重複を許して任意にN個取り出した標本を複数作成し、これらの標本から求めた統計量をもとに不偏推定値およびそのまわりの推定誤差を算定する手法である。jackknife法は計算回数が少なく、

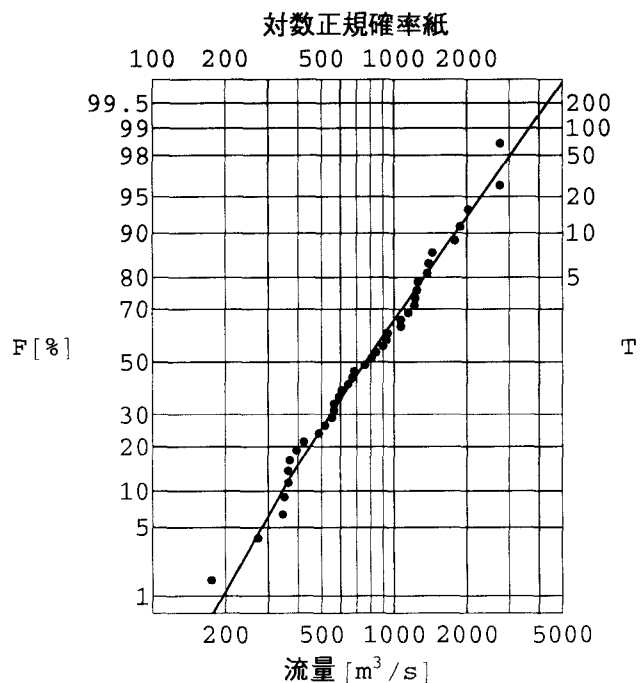


図-5 E川の年最大流量のプロットと岩井法によるあてはめ

作成する標本数および不偏推定値、推定誤差が一意的に定まるのに対し、bootstrap法は作成する標本数が任意に設定でき、作成する標本数によって不偏推定値や推定誤差が異なる。このため、今回の検討における確率分布モデル相互の安定性評価の指標としてはjackknife法を用いた。

jackknife法による偏りを補正した推定値は、

$$\hat{\psi} = N \hat{\psi} - (N-1) \hat{\psi}_{(.)} \quad (3)$$

推定誤差分散は、

$$s^2 = \frac{(N-1)}{N} \sum_{i=1}^N (\psi_{(i)} - \hat{\psi}_{(.)})^2 \quad (4)$$

で求められる。ここに、 $\hat{\psi}$ はN個のデータを全て

用いたときの統計量、 $\psi_{(i)}$ はi番目のデータを除いたN-1個のデータを用いた統計量であり、

$\hat{\psi}_{(.)}$ はその平均値

$$\hat{\psi}_{(.)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \psi_{(i)} \quad (5)$$

である。本研究では確率水文量の安定性を評価するためψに確率水文量を取り、(4)式の平方根で表される推定誤差sを安定性の評価指標として用いた。

図-6はA川の年最大値についてLP3Rs分布と

LP3Ls分布をあてはめるとともに、これらについて jackknife 法を適用して得られた jackknife 推定値と推定誤差を併せて示したものである。この観測所においては、低水路満杯流量が2,700m<sup>3</sup>/sであり、この付近の観測資料がなく、再現期間 10 年以上の範囲のバラツキが大きめである。しかしながら、SLSCは前者が0.023、後者が0.022であり、比較的良好に適合している部類にはいる。実線はLP3Rs分布を示している。そのうち太い実線は全資料を用いた推定曲線である。3本の細い実線はjackknife 法による推定曲線であり、中央の細線がjackknife 推定値、その両側の細線が推定誤差の幅を示している。この両外側の曲線は観測値をほとんど包絡するように引かれている。また、中央の線と太い実線を比較すると、太い実線がjackknife 推定値（中央の細線）より少し左に偏っており、同じ非超過確率に対し小さめの確率水文量を与えていることがわかる。

一方、破線はLP3Ls分布を示している。先程と同様に、細い破線の両側の線が観測値をほとんど包絡

するように引かれているが、非超過確率の大きい部分でその広がりが大きくなっている。jackknife 推定値と全資料を用いた確率水文量はあまり大きな差はないが、ほんの少しか全資料を用いた確率水文量がjackknife 推定値を上回っている。

この場合、再現期間 100 年の確率水文量は、jackknife 法により、LP3Rs分布が+160m<sup>3</sup>/sの修正、LP3Ls分布が-30m<sup>3</sup>/sの修正となり、お互いが近づく方向に修正されている。

表-1は、A川の年最大値について適合度と安定性の指標を示したものである。2母数対数正規分布は歪み係数の絶対値が0.3を越えたので不適（NG）としてある。また、岩井法はjackknife 推定値が負になっており、適切に求められない。このような状況はStedingerのクォンタイル法においてもいくつかの標本でみられることが確認された。このような場合は、bootstrap 法を適用する必要がある。SLSCでみると指数分布が適合度を満足しないと判断される。結局、5つのモデルが残り、これについて、jackknife 推定誤差から判断すると、ゲンベル分布

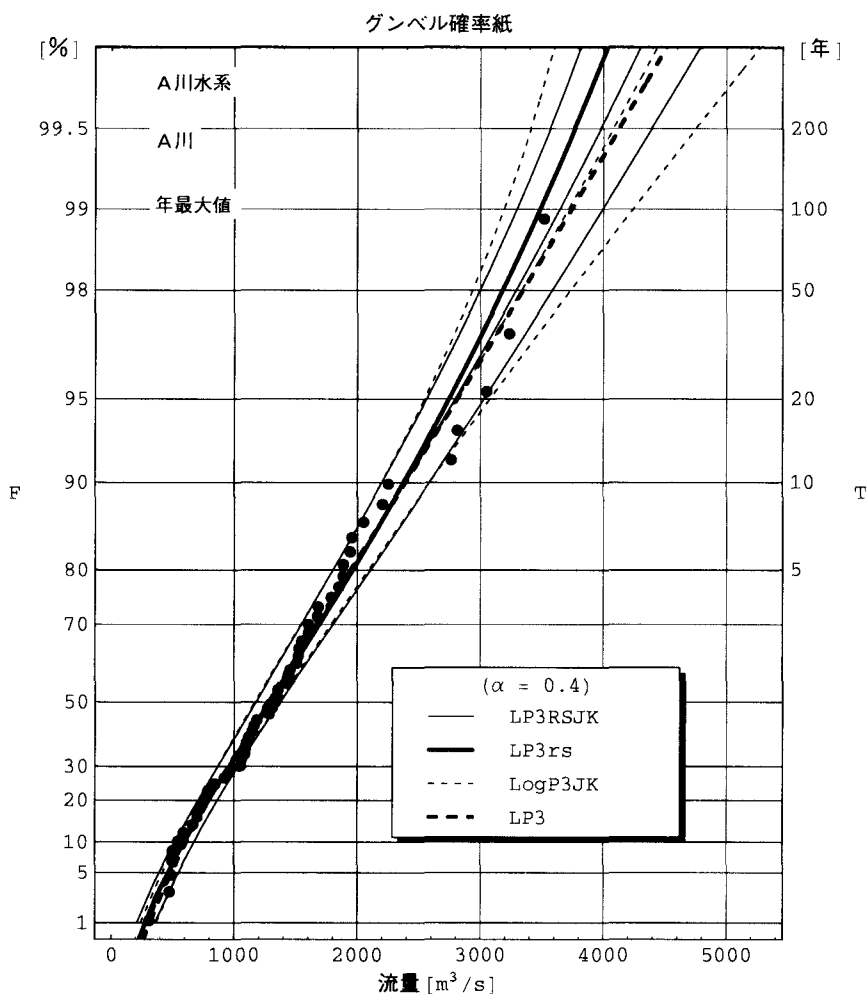


図-6 A川の年最大流量への対数ピアソンⅢ型分布（LP3RsとLP3Ls）のあてはめおよびそれらのjackknife 推定値、推定誤差

表-1 A川の適合度と安定性の指標

| 確率分布モデル            | 指数    | ゲンベル  | SQRT-ET | GEV   | LP3Rs | LP3Ls | 岩井法   | LN2 |
|--------------------|-------|-------|---------|-------|-------|-------|-------|-----|
| SLSC               | 0.042 | 0.023 | 0.033   | 0.023 | 0.023 | 0.022 | 0.022 | NG  |
| Q100全資料            | 4,260 | 3,703 | 4,633   | 3,750 | 3,487 | 3,746 | 3,887 | NG  |
| Q100jackknife推定値   | 4,260 | 3,703 | 4,681   | 3,736 | 3,646 | 3,717 | 3,452 | NG  |
| Q100jackknife推定誤差率 | 9.5%  | 9.2%  | 9.6%    | 14.5% | 9.5%  | 14.1% | -     | NG  |
| Q400jackknife推定誤差率 | 9.9%  | 9.6%  | 10.2%   | 19.6% | 11.3% | 18.8% | -     | NG  |

が良さそうである。

図-7はA川の年最大値にゲンベル分布をあてはめたものである。2母数であるので、推定誤差の幅が狭く、非超過確率の大きい部分でもそれほど広がることはない。なお、jackknife推定値が全資料を用いた推定曲線と重なっている。ゲンベル分布や指数分布をLモーメント法で母数推定する場合にはjackknife推定値が全資料を用いた推定値と一致することが確認できる。したがって、Lモーメント法で母数推定するゲンベル分布や指数分布は不偏推定値を与えるので適合度が満足されれば優れた分布モデルである。

このように、リサンプリング手法を用いることにより、適合度が満足される確率分布モデルの中から安定性のよいモデルを選ぶことができる。その際、その結果を確率紙に表示して、あてはめたモデルとデータの関係を確認しておく必要がある。

#### 4. 結論

全国68の一級水系における99地点の年最大流量資料を統一的な手法で確率評価を行った。適合度と安定性から評価し、以下のことがわかった。

- (1)各確率分布モデルの適合度を明らかにした。
- (2)河川流量の満足すべき適合度の基準としてSLSC  $\approx 0.04$  とするのが適当である。
- (3)安定性評価の指標としてjackknife推定誤差が有力な指標となる。
- (4)jackknife推定値、jackknife推定誤差を確率紙にプロットすることにより、選択する確率分布モデルの総合的なチェックが可能となる。

謝辞：今回の検討にあたって、建設省には貴重な資料を提供いただいた。ここに記して感謝の意を表します。

#### 参考文献

- 1) 宝 馨，高棹琢馬：水文頻度解析における確率分布モデルの評価規準，土木学会論文集，第393号/Ⅱ-9，pp.151-160，1988。

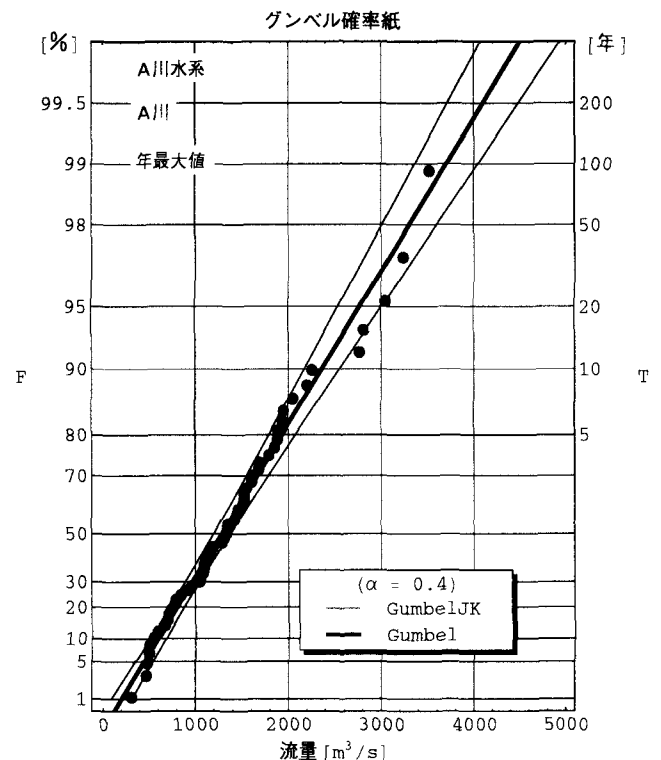


図-7 A川の年最大流量とゲンベル分布およびそのjackknife推定値，推定誤差

- 2) 宝 馨，高棹琢馬：水文頻度解析モデルの母数推定法の比較評価，水工学論文集，土木学会，第34巻，pp.7-12，1990。
- 3) 星 清：水文統計解析，開発土木研究所月報，No.540，pp.31-63，1998。
- 4) 江藤剛治，室田 明，米谷恒春，木下武雄：大雨の頻度，土木学会論文集，第369号/Ⅱ-5，pp.165-174，1986。
- 5) たとえば，竹内邦良：水文資料の基本統計処理，水文・水資源ハンドブック，7.2，水文・水資源学会編，朝倉書店，pp.234-237，1997。
- 6) Stedinger, J. R., Vogel, R. M. and Foufoula-Georgiou, E. : Frequency Analysis of Extreme Events, Chap. 18, Handbook of Hydrology, (Ed.) D. R. Maidment, McGraw-Hill, New York, pp.18.1-18.66, 1993。
- 7) Efron, B. : The Jackknife, the bootstrap and Other Resampling Plans, SIAM Monograph, No.38, p.92, 1982。

(1998.9.30 受付)