

貯留型流出モデルの確率応答特性

STOCHASTIC PROPERTY OF STORAGE FUNCTION RUNOFF MODEL

田中 岳¹・藤田睦博²・熊谷 進³

Gaku TANAKA, Mutsuhiro FUJITA and Susumu KUMAGAI

¹学生会員 工修 北海道大学大学院 工学研究科 (〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)

²フェロー会員 工博 北海道大学大学院教授 工学研究科 (同上)

³正会員 日産建設(株) 札幌支店営業課長 (〒064-0917 札幌市中央区南17条西10丁目)

Hashino had already proposed the application of Freund's bivariate exponential density function for a design storm. At present, it is impossible to use this distribution to estimate a design flood because of its nonstationarity (average and variance) and mutual dependency. As a first step to conquer these difficulties, authors assume that the average rainfall is nonstationary and the random component of rainfall is expressed by AR(1) based on the analysis of observed rainfall. Finally, authors adopt the storage function runoff model as rainfall runoff system and propose the differential equations whose solutions provide the first four moments of discharge under the impact of mutually dependent rainfall inputs. The probability density function of discharge is easily derived by the obtained first four moments of discharge.

Key Words: stochastic property, first order auto-regressive process, storage function runoff model

1. はじめに

洪水防御計画の基本となる洪水のハイドログラフ(基本高水)の設定は, 一般的には降雨量, 降雨量の時間分布及び降雨量の地域分布の三要素からなる計画降雨を定め, 適当な洪水流出モデルを介して洪水のハイドログラフを求めることを標準としている¹⁾。しかし, 降雨量資料の不足から, 実際の計画降雨の決定においては, 実績降雨の引き延ばしが行われることがあり, 実際の降雨強度と計画降雨のそれとの間で年超過確率の値に著しい差が生ずる問題がある。端野^{2),3)}は, Freundの二変数指数型分布を用いて確率論的に計画降雨波形を定式化し, 計画降雨の引き伸ばし問題の解決にも利用できると示唆するとともに, 時間雨量に対するFreundの二変数指数型分布の適合性を実証している。さらに, 端野・前ら⁴⁾は, 多峰型の計画降雨波形の作成法を提案している。このFreundの二変数指数型分布を用いた降雨量時系列では, 降雨量の平均値や分散などが非定常性をもち,

また降雨量は持続性を示している。降雨量の確率特性が既知としても, 採用した流出モデルからの流出量の確率密度関数を直接理論的に求めることは極めて難しい。降雨量を時間的に独立な確率変数として, 藤田・工藤ら⁵⁾が貯留型流出モデルを用いて, 田中・藤田ら⁶⁾がKinematic Waveモデルを用いて, それぞれ流出量の1~4次モーメントを個別に求め, 流出量の確率密度関数を推定する手法を提案している。しかし, 実測の降雨量は持続性を示し, Freundの二変数指数型分布を採用した場合にも降雨量の持続性を考慮した流出量の1~4次モーメントを求める必要がある。

本論文では, 実流域の流出計算に多用されている貯留型流出モデルを用いて流出量の1~4次モーメントを理論的に求める手法を提案する。(流出量の2次モーメントまでは, 既に工藤・藤田ら⁷⁾が発表している。)

2. 貯留型流出モデルの確率応答

(1) 基礎理論

最も簡単な貯留型流出モデルは次式で表される。

$$\frac{ds_h}{dt} + q_h = r \quad (1)$$

$$s_h = k_1 q_h^{p_1} \quad (2)$$

s_h : 貯留量, q_h : 流出量, r : 降雨量, k_1, p_1 : 定数
式(1),(2)より, 次式が得られる。

$$\frac{ds_h}{dt} + D s_h^{m_1} = r, \quad D = \left(\frac{1}{k_1} \right)^{m_1}, \quad m_1 = \frac{1}{p_1} \quad (3)$$

いま, 降雨量が確率過程とすると, 貯留量, 流出量もまた確率過程となる。これらの確率変数を, 平均値(-記号)と平均値からの偏差(~記号)に分離し, 更に式(3)内のベキ乗型の確率変数 $s_h^{m_1}$ に関して, Bras, Georgakakosら⁸⁾により提案された近似式を用いる。

$$s_h = \bar{s}_h + \tilde{s}_h, \quad E(\tilde{s}_h) = 0 \quad (4)$$

$$q_h = \bar{q}_h + \tilde{q}_h, \quad E(\tilde{q}_h) = 0 \quad (5)$$

$$r = \bar{r} + \tilde{r}, \quad E(\tilde{r}) = 0 \quad (6)$$

$$s_h^{m_1} = \alpha \bar{s}_h + \beta \tilde{s}_h \quad (7)$$

α, β : 決定論的な関数

式(4),(6),(7)を式(3)に代入して, 若干の計算を施せば, 貯留量の1~4次モーメントは次式として得られる(文献7)参照)。

$$\frac{d\bar{s}_h}{dt} + D\alpha\bar{s}_h = \bar{r} \quad (8)$$

$$\sigma_{s_h}^2 = e^{-2\int^t D\beta d\tau_1} \int_0^t \int_0^t E\tilde{r}(\tau_2)\tilde{r}(\tau_3) \times e^{\int^{\tau_2} D\beta d\tau_4 + \int^{\tau_3} D\beta d\tau_5} d\tau_3 d\tau_2 \quad (9)$$

$$\mu_{s_{h3}} = e^{-3\int^t D\beta d\tau_1} \int_0^t \int_0^t \int_0^t E\tilde{r}(\tau_2)\tilde{r}(\tau_3)\tilde{r}(\tau_4) \times e^{\int^{\tau_2} D\beta d\tau_5 + \int^{\tau_3} D\beta d\tau_6 + \int^{\tau_4} D\beta d\tau_7} d\tau_4 d\tau_3 d\tau_2 \quad (10)$$

$$\mu_{s_{h4}} = e^{-4\int^t D\beta d\tau_1} \int_0^t \int_0^t \int_0^t \int_0^t E\tilde{r}(\tau_2)\tilde{r}(\tau_3)\tilde{r}(\tau_4)\tilde{r}(\tau_5) \times e^{\int^{\tau_2} D\beta d\tau_6 + \int^{\tau_3} D\beta d\tau_7 + \int^{\tau_4} D\beta d\tau_8 + \int^{\tau_5} D\beta d\tau_9} d\tau_5 d\tau_4 d\tau_3 d\tau_2 \quad (11)$$

$\sigma_{s_h}^2, \mu_{s_{h3}}, \mu_{s_{h4}}$: 貯留量の2~4次モーメント
一方, 流出量の1~4次モーメントは, 式(2),(5),(7)から次のように与えられる。

$$\bar{q} = D\alpha\bar{s}_h \quad (12) \quad \sigma_{q_h}^2 = (D\beta)^2 \sigma_{s_h}^2 \quad (13)$$

$$\mu_{q_{h3}} = (D\beta)^3 \mu_{s_{h3}} \quad (14) \quad \mu_{q_{h4}} = (D\beta)^3 \mu_{s_{h4}} \quad (15)$$

$\sigma_{q_h}^2, \mu_{q_{h3}}, \mu_{q_{h4}}$: 流出量の2~4次モーメント

(2) 流出量 q_h の確率特性の推定

式(9)~(11)を計算するためには, $E\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)$, $E\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\tilde{r}(\tau_3)$, $\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\tilde{r}(\tau_3)\tilde{r}(\tau_4)$ など, (連続的)降雨量 $r(t)$ に関する2~4次のキュームラント関数を与えなければならない。一方, 通常入手できる実測降雨量は, ステップ高が式(16)で与えられる式(17)に示すようなステップ関数である。従って, 式(16),(17)の $r_{d,i}, R_s(t)$ の確率特性が与えられたとき, 式(16),(17)を介して(連続的)降雨量 $r(t)$ の確率特性を求める必要がある。

$$r_{d,i} = \frac{1}{\Delta t} \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} r(\tau) d\tau, \quad i: \text{integer} \quad (16)$$

$$R_s(t) = \sum_{i=1}^{\infty} r_{d,i} \{u(t-(i-1)\Delta t) - u(t-i\Delta t)\} \quad (17)$$

Δt : 観測降雨間隔, $u(t)$: unit step function

$r_{d,i}, R_s(t)$ をそれぞれ平均値と平均値からの偏差に分離する。

$$r_{d,i} = \bar{r}_{d,i} + \tilde{r}_{d,i} \quad (18)$$

$$R_s(t) = \bar{R}_s(t) + \tilde{R}_s(t) \quad (19)$$

工藤・藤田ら⁷⁾は, $\tilde{r}_{d,i}$ を次式の1次の自己回帰過程で記述している。

$$\tilde{r}_{d,i} = \rho \tilde{r}_{d,i-1} + N_i, \quad \rho: \text{const.} \quad (20)$$

ここで, N_i は平均値が0の互いに独立な確率変数で, その2~4次モーメントは, それぞれ $\sigma_{N_i}^2, \mu_{N_3}, \mu_{N_4}$ とする。結果のみを示すと, 2~4次のキュームラント関数は, 式(16)~(20)より次式で表される(誘導過程の詳細は, 文献7)を参照。式(21)は, 文献7)で既に与えられている)。

$$E\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2) = \frac{\Delta t \sigma_{r_d}^2}{c} \sum_{i=0}^{\infty} A_i \delta(\tau_1 - \tau_2 - i\Delta t) e^{-\gamma(\tau_1 - \tau_2)} \quad (21)$$

$$E\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\tilde{r}(\tau_3) = \frac{\Delta t^2 \mu_{r_d^3}}{c^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^m A_n \times \delta(\tau_1 - \tau_2 - n\Delta t) \delta(\tau_2 - \tau_3 - (m-n)\Delta t) \times e^{-\gamma(\tau_1 + \tau_2 - 2\tau_3)} \quad (22)$$

$$E\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\tilde{r}(\tau_3)\tilde{r}(\tau_4) = \frac{\Delta t^3}{c^3} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{n=0}^m B \times \delta(\tau_1 - \tau_2 - n\Delta t) \delta(\tau_2 - \tau_3 - (m-n)\Delta t) \times \delta(\tau_3 - \tau_4 - (l-m)\Delta t) \times \left\{ \mu_{r_d^4} e^{-\gamma(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - 3\tau_4)} + 2\sigma_{r_d}^4 e^{-\gamma(\tau_1 + \tau_2 - \tau_3 - \tau_4)} + \sigma_{r_d}^4 e^{-\gamma(\tau_1 - \tau_2 + \tau_3 - \tau_4)} \right\} \quad (23)$$

c : 時間の次元を持つ大きさ1の定数

$\delta(t)$: デルタ関数

$\sigma_{r_d}^2, \mu_{r_d^3}, \mu_{r_d^4}$: 観測降雨量の2～4次モーメント

$$A_i = \begin{cases} 1 & (\rho > 0) \\ (-1)^i & (\rho < 0) \end{cases}, B = \begin{cases} 1 & (\rho > 0) \\ (-1)^{l+m+n} & (\rho < 0) \end{cases}, \gamma = -\frac{\log|\rho|}{\Delta t}$$

式(21)～(23)を式(9)～(11)にそれぞれ代入すると、貯留量の2～4次モーメントに関する微分方程式が次のように得られる(式(24)は、文献7)で既に与えられている).

$$\frac{d\sigma_{s_h}^2}{dt} + 2D\beta\sigma_{s_h}^2 = \Delta t(\sigma_{r_d}^2 + 2Z_1) \quad (24)$$

$$\frac{d\mu_{s_h^3}}{dt} + 3D\beta\mu_{s_h^3} = \Delta t^2(\mu_{r_d^3} + 3Z_2 + 6Z_3) \quad (25)$$

$$\frac{d\mu_{s_h^4}}{dt} + 4D\beta\mu_{s_h^4} = \Delta t^3\{\mu_{r_d^4} + 4(Z_4 + Z_6) + 6Z_5 + 12(Z_7 + Z_8 + Z_9) + 24Z_{10}\} \quad (26)$$

$$\frac{dU}{dt} + 2\left(\frac{1}{K}\right)^m \beta U = 0, U(0) = 1 \quad (27)$$

ただし、

$$Z_1 = \begin{cases} 0, [t/\Delta t] < 1 \\ \sigma_{r_d}^2 \sum_{i=1}^{[t/\Delta t]} \frac{\rho^i U(t)}{U(t-i\Delta t)}, [t/\Delta t] \geq 1 \end{cases}$$

$$Z_2 = \begin{cases} 0, [t/\Delta t] < 1 \\ \mu_{r_d^3} \sum_{i=1}^{[t/\Delta t]} \frac{\rho^i U(t)}{U(t-i\Delta t)} \left\{ \frac{U(t)}{U(t-i\Delta t)} + \rho^i \right\}, [t/\Delta t] \geq 1 \end{cases}$$

$$Z_3 = \begin{cases} 0, [t/\Delta t] < 2 \\ \mu_{r_d^3} \sum_{i=2}^{[t/\Delta t]} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\rho^{2i-j} U(t)^2}{U(t-i\Delta t) U(t-j\Delta t)}, [t/\Delta t] \geq 2 \end{cases}$$

$$Z_4 = \begin{cases} 0, [t/\Delta t] < 1 \\ \sum_{i=1}^{[t/\Delta t]} \left\{ (\mu_{r_d^4} - 3\sigma_{r_d}^4) \rho^{3i} + 3\sigma_{r_d}^4 \rho^i \right\} \frac{U(t)}{U(t-i\Delta t)}, [t/\Delta t] \geq 1 \end{cases}$$

$$Z_5 = \begin{cases} 0, [t/\Delta t] < 1 \\ \mu_{r_d^4} \sum_{i=1}^{[t/\Delta t]} \frac{\rho^i U(t)^3}{U(t-i\Delta t)^3}, [t/\Delta t] \geq 1 \end{cases}$$

$$Z_6 = \begin{cases} 0, [t/\Delta t] < 1 \\ \sum_{i=1}^{[t/\Delta t]} \left\{ (\mu_{r_d^4} - \sigma_{r_d}^4) \rho^{2i} + \sigma_{r_d}^4 \right\} \frac{U(t)^2}{U(t-i\Delta t)^2}, [t/\Delta t] \geq 1 \end{cases}$$

$$Z_7 = \begin{cases} 0, [t/\Delta t] < 2 \\ \sum_{i=2}^{[t/\Delta t]} \sum_{j=1}^{i-1} \left\{ (\mu_{r_d^4} - 3\sigma_{r_d}^4) \rho^{3i-j} + 2\sigma_{r_d}^4 \rho^{i+j} + \sigma_{r_d}^4 \rho^{i-j} \right\} \\ \times \frac{U(t)^2}{U(t-i\Delta t) U(t-j\Delta t)}, [t/\Delta t] \geq 2 \end{cases}$$

$$Z_8 = \begin{cases} 0, [t/\Delta t] < 2 \\ \sum_{i=2}^{[t/\Delta t]} \sum_{j=1}^{i-1} \left\{ (\mu_{r_d^4} - 3\sigma_{r_d}^4) \rho^{3i-2j} + 3\sigma_{r_d}^4 \rho^i \right\} \\ \times \frac{U(t)^3}{U(t-i\Delta t) U(t-j\Delta t)^2}, [t/\Delta t] \geq 2 \end{cases}$$

$$Z_9 = \begin{cases} 0, [t/\Delta t] < 2 \\ \sum_{i=2}^{[t/\Delta t]} \sum_{j=1}^{i-1} \left\{ (\mu_{r_d^4} - \sigma_{r_d}^4) \rho^{2i-j} + \sigma_{r_d}^4 \rho^i \right\} \\ \times \frac{U(t)^3}{U(t-i\Delta t)^2 U(t-j\Delta t)}, [t/\Delta t] \geq 2 \end{cases}$$

$$Z_{10} = \begin{cases} 0, [t/\Delta t] < 3 \\ \sum_{i=3}^{[t/\Delta t]} \sum_{j=2}^{i-1} \sum_{k=1}^{j-1} \left\{ (\mu_{r_d^4} - 3\sigma_{r_d}^4) \rho^{3i-j-k} + 2\sigma_{r_d}^4 \rho^{i+j-k} \rho^{i-j+k} + \sigma_{r_d}^4 \right\} \\ \times \frac{U(t)^3}{U(t-i\Delta t) U(t-j\Delta t) U(t-k\Delta t)}, [t/\Delta t] \geq 3 \end{cases}$$

[*]: ガウス記号

式(12)～(15)及び式(8),(24)～(27)を用いて流出量の1～4次モーメントを計算できる。

3. シミュレーション法による理論式の検証

本論文で提案した貯留量の2～4次モーメントを与える式(24)～(26)は、次の近似式を用いている。

- (a) 降雨量 $r(t)$ に関する2～4次のキュームラント関数に、式(21)～(23)の近似式を採用している。
- (b) べき乗型の確率変数 $s_h^{m_1}$ に対して、式(7)を採用している。

提案する理論式の妥当性を検証するためには、(a),(b)両者の近似そのものについて検討を加える必要がある。ここでは、シミュレーション法によって得られる流出量 $q(t)$ (理論式の流出量 $q_h(t)$ と区別する。)の確率特性と理論式から得られる確率特性とを比較する。シミュレーション法では、確率特性が既知の観測降雨量 $r_{d,i}$ を模擬的に発生させ、式(17)より得られるランダム・ステップ関数 $R_s(t)$ を用いて、式(1),(2)により流出量を直接計算して理論式と比較する。

(1) $p_1=1$ の場合

$p_1=1$ のとき式(1),(2)は容易に解けるため、(b)の近似を必要としない。従って、(a)の近似についてのみ検討することができる。流出量は次式のように表される。

$$q(t) = \int_0^t r(\tau) h(t-\tau) d\tau, h(t) = D_1 e^{-D_1 t}, D_1 = \frac{1}{k_1} \quad (28)$$

両辺の期待値をとると、

$$\bar{q}(t) = \int_0^t \bar{r}(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (29)$$

式(28)から式(29)を引くと、平均値からの偏差 $\tilde{q}(t)$ は次式のようになる。

$$\tilde{q}(t) = \int_0^t \tilde{r}(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (30)$$

ここで、 $r(t)$ が式(17)のようなランダム・ステップ関数 $R_s(t)$ で表せるなら、式(29),(30)は以下のように書き表される。

$$\bar{q}(t) = \begin{cases} e^{-D_1 t} \left\{ (1 - e^{-D_1 \Delta t}) \sum_{i=1}^m \bar{r}_{d,i} e^{D_1 i \Delta t} - \bar{r}_{d,m} e^{D_1 m \Delta t} \right\} \\ + \bar{r}_{d,m} \\ (m-1)\Delta t < t \leq m\Delta t, \quad m=1,2,\dots,n, \quad n\Delta t=t_r \end{cases} \quad (31)$$

$$\tilde{q}(t) = \begin{cases} e^{-D_1 t} \left\{ (1 - e^{-D_1 \Delta t}) \sum_{i=1}^m \tilde{r}_{d,i} e^{D_1 i \Delta t} - \tilde{r}_{d,m} e^{D_1 m \Delta t} \right\} \\ + \tilde{r}_{d,m} \\ (m-1)\Delta t < t \leq m\Delta t, \quad m=1,2,\dots,n, \quad n\Delta t=t_r \end{cases} \quad (32)$$

t_r : 降雨継続時間

式(32)の両辺を2～4乗して期待値をとると、式(33)～(35)及び式(36)～(38)が得られる。

i) $(m-1)\Delta t < t \leq m\Delta t, \quad m=1,2,\dots,n, \quad n\Delta t=t_r$ の場合

$$\sigma_q^2 = \sigma_{r_d}^2 + 2e^{-D_1 t} (FY_{1,m} - \sigma_{r_d}^2 e^{D_1 m \Delta t}) + e^{-2D_1 t} (F^2 Y_{2,m} - 2FY_{1,m} e^{D_1 m \Delta t} + \sigma_{r_d}^2 e^{2D_1 m \Delta t}) \quad (33)$$

$$\mu_{q3} = \mu_{r_d^3} + 3e^{-D_1 t} (FY_{3,m} - \mu_{r_d^3} e^{D_1 m \Delta t}) + 3e^{-2D_1 t} (F^2 Y_{4,m} - 2FY_{3,m} e^{D_1 m \Delta t} + \mu_{r_d^3} e^{2D_1 m \Delta t}) + e^{-3D_1 t} (F^3 Y_{5,m} - 3F^2 Y_{4,m} e^{D_1 m \Delta t} + 3FY_{3,m} e^{2D_1 m \Delta t} - \mu_{r_d^3} e^{3D_1 m \Delta t}) \quad (34)$$

$$\mu_{q4} = \mu_{r_d^4} + 4e^{-D_1 t} (FY_{6,m} - \mu_{r_d^4} e^{D_1 m \Delta t}) + 6e^{-2D_1 t} (F^2 Y_{7,m} - 2FY_{6,m} e^{D_1 m \Delta t} + \mu_{r_d^4} e^{2D_1 m \Delta t}) + 4e^{-3D_1 t} (F^3 Y_{8,m} - 3F^2 Y_{7,m} e^{D_1 m \Delta t} + 3FY_{6,m} e^{2D_1 m \Delta t} - \mu_{r_d^4} e^{3D_1 m \Delta t}) + e^{-4D_1 t} (F^4 Y_{9,m} - 4F^3 Y_{8,m} e^{D_1 m \Delta t} + 6F^2 Y_{7,m} e^{2D_1 m \Delta t} - 4FY_{6,m} e^{3D_1 m \Delta t} + \mu_{r_d^4} e^{4D_1 m \Delta t})$$

ただし、

$$F = 1 - e^{-D_1 \Delta t}, \quad Y_{1,m} = \sum_{i=1}^m E(\tilde{r}_{d,m} \tilde{r}_{d,i}) e^{D_1 i \Delta t}$$

$$Y_{2,m} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m E(\tilde{r}_{d,m} \tilde{r}_{d,j}) e^{D_1(i+j)\Delta t}$$

$$Y_{3,m} = \sum_{i=1}^m E(\tilde{r}_{d,m}^2 \tilde{r}_{d,i}) e^{D_1 i \Delta t}$$

$$Y_{4,m} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m E(\tilde{r}_{d,m} \tilde{r}_{d,i} \tilde{r}_{d,j}) e^{D_1(i+j)\Delta t}$$

$$Y_{5,m} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m E(\tilde{r}_{d,m} \tilde{r}_{d,i} \tilde{r}_{d,j} \tilde{r}_{d,k}) e^{D_1(i+j+k)\Delta t}$$

$$Y_{6,m} = \sum_{i=1}^m E(\tilde{r}_{d,m}^3 \tilde{r}_{d,i}) e^{D_1 i \Delta t}$$

$$Y_{7,m} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m E(\tilde{r}_{d,m}^2 \tilde{r}_{d,i} \tilde{r}_{d,j}) e^{D_1(i+j)\Delta t}$$

$$Y_{8,m} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m E(\tilde{r}_{d,m} \tilde{r}_{d,i} \tilde{r}_{d,j} \tilde{r}_{d,k}) e^{D_1(i+j+k)\Delta t}$$

$$Y_{9,m} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m E(\tilde{r}_{d,m} \tilde{r}_{d,i} \tilde{r}_{d,j} \tilde{r}_{d,k} \tilde{r}_{d,l}) e^{D_1(i+j+k+l)\Delta t}$$

ii) $t > t_r$ の場合

$$\sigma_q^2 = e^{-2D_1 t} F^2 Y_{2,n} \quad (36) \quad \mu_{q3} = e^{-3D_1 t} F^3 Y_{5,n} \quad (37)$$

$$\mu_{q4} = e^{-4D_1 t} F^4 Y_{9,n} \quad (38)$$

式(20)より、 $r_{d,i}$ の2～4次モーメントと2～4次のキュームラント関数は、次式のように与えられる。

$$\sigma_{r_d}^2 = \frac{\sigma_N^2}{1-\rho^2}, \quad \mu_{r_d^3} = \frac{\mu_{N3}}{1-\rho^3}, \quad \mu_{r_d^4} = \frac{6\rho^2 \sigma_N^2 \sigma_{r_d}^2 + \mu_{N4}}{1-\rho^4} \quad (39)$$

$$E(\tilde{r}_{d,i} \tilde{r}_{d,j}) = \sigma_{r_d}^2 \rho^{i-j}, \quad i \geq j \quad (40)$$

$$E(\tilde{r}_{d,i} \tilde{r}_{d,j} \tilde{r}_{d,k}) = \mu_{r_d^3} \rho^{i+j-2k}, \quad i \geq j \geq k \quad (41)$$

$$E(\tilde{r}_{d,i} \tilde{r}_{d,j} \tilde{r}_{d,k} \tilde{r}_{d,l}) = (\mu_{r_d^4} - 3\sigma_{r_d}^4) \rho^{i+j+k-l} + \sigma_{r_d}^4 (2\rho^{i+j-k-l} + \rho^{i+j+k-l}), \quad i \geq j \geq k \geq l \quad (42)$$

以上より、式(31),(33)～(38)を用いると、式(16)～(20)で表されるランダム・ステップ関数 $R_s(t)$ を入力とする流出量の確率特性が理論的に得られる。図-1は、式(31),(33)～(38)と理論式(12)～(15)及び式(8),(24)～(27)との比較を示している。計算に際しては、既に藤田⁹⁾が与えている、Kinematic Waveモデルより得られる無次元変量で表された貯留型流出モデル(式(43),(44))を採用する。

$$\frac{dS}{dT} + Q = R \quad (43)$$

$$S = K_1 Q^{p_1}, \quad K_1 = \frac{1}{1+p_1} \quad (44)$$

理論式(12)～(15)及び式(8),(24)～(27)の無次元変量による表記は省略する。なお、図-1では以下のパラメータと、式(20)の確率変数 N_i の確率密度関数として、次の指数分布を与え、 $\sigma_{r_d}^2$ が一定のもと回帰係数 ρ を変化させた。 $\sigma_{r_d}^2$ は、式(39)の σ_{r_d} を無次元化したもので、式(36)と同様な式で表される。

$$\Delta T = 0.1$$

$$\bar{R}_d = \begin{cases} 1 & 0 \leq T \leq 2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}, \quad \sigma_{R_d}^2 = \begin{cases} 0.25 & 0 \leq T \leq 2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

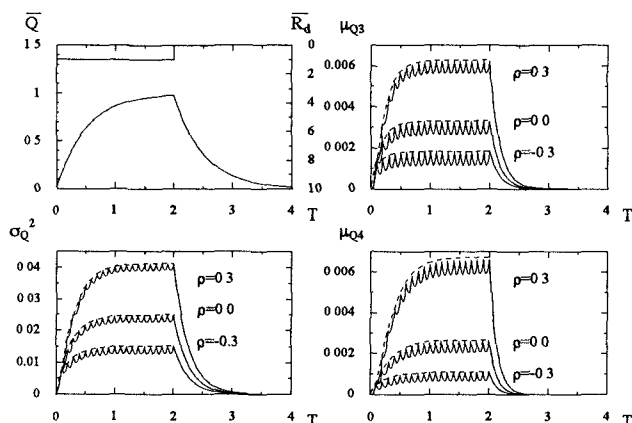


図-1 式(31),(33)～(38)(実線)と式(12)～(15)及び式(8),(24)～(27)(破線)の比較($p_1=1.0$)

$$f(N) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(N-\frac{1}{\lambda})} & -\frac{1}{\lambda} \leq N \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad \lambda: \text{const.} \quad (45)$$

$$E(N)=0, \sigma_N^2=\frac{1}{\lambda^2}, \mu_{N3}=\frac{2}{\lambda^3}, \mu_{N4}=\frac{9}{\lambda^4}$$

図-1は、近似(a)が妥当であることを示している。

(2) $p_1 \neq 1$ の場合

この場合、式(31),(33)～(35)のように流出量の確率特性を与えることができないので、シミュレーション法を用いて流出量の1～4次モーメントを計算し、理論式より得られるそれらとを比較する。図-2では、無次元化された観測降雨量の平均値 $\bar{R}_d$ を一定にした矩形降雨波形入力の場合の計算結果を示し、図-3は三角形降雨波形入力の場合の計算結果を示している。他のパラメータについては、前節と同じ値を採用している。なお、シミュレーション法において模擬的に発生させた無次元化された観測降雨量 R_d の系列に負の値が生じた場合は、再度別の系列を発生させ、 R_d の系列の全発生回数は20,000回とした。また、理論式の計算に際して、式(7)の係数(α, β)を無次元化して無次元変数で表された係数(A,B)は、Bras, Georgakakosら⁸⁾が提案した次式から第一項のみを採用した。

$$S^{m_1} = A\bar{S} + B\tilde{S} \quad (46)$$

$$A = \bar{S}^{m_1-1} \left\{ 1 + \frac{1}{2}m_1(m_1-1)\frac{E(\tilde{S}^2)}{\bar{S}^2} + \frac{1}{6}m_1(m_1-1)(m_1-2)\frac{E(\tilde{S}^3)}{\bar{S}^3} \right\}$$

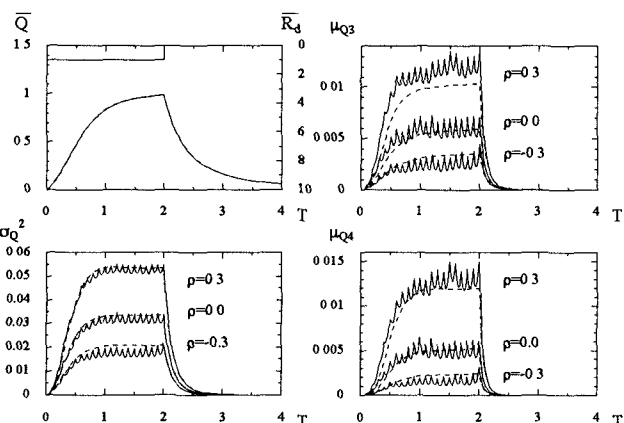


図-2 シミュレーション結果(矩形降雨, $p_1=0.6$)

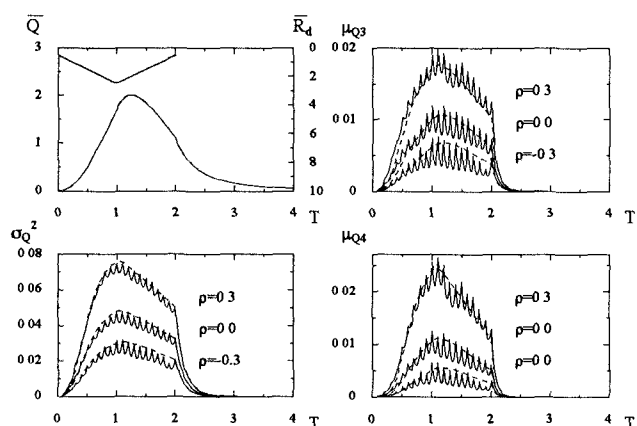


図-3 シミュレーション結果(三角形降雨, $p_1=0.6$)

$$B = \frac{\bar{S}^{m_1+1}}{E(\tilde{S}^2)} \left\{ m \frac{E(\tilde{S}^2)}{\bar{S}^2} + \frac{1}{2}m_1(m_1-1)\frac{E(\tilde{S}^3)}{\bar{S}^3} + \frac{1}{6}m_1(m_1-1)(m_1-2)\frac{E(\tilde{S}^4)}{\bar{S}^4} \dots \right\}$$

回帰係数 ρ の値によらず、シミュレーションによる計算結果(実線)と理論式(破線)のそれとの適合度は良好であると言える。

4. まとめ

本論文では、観測降雨量が持続性をもっているとき、式(21)～(23)として、(連続的)降雨量に関する2～4次のキュームラント関数を推定した。これらは、流出量の2～4次モーメントを求める上で重要な関数である。これらを用いて、式(1),(2)で表される貯留型流出モデルの貯留量の1～4次モーメントに関する微分方程式を誘導し、更に流出量の1～4次モーメントを

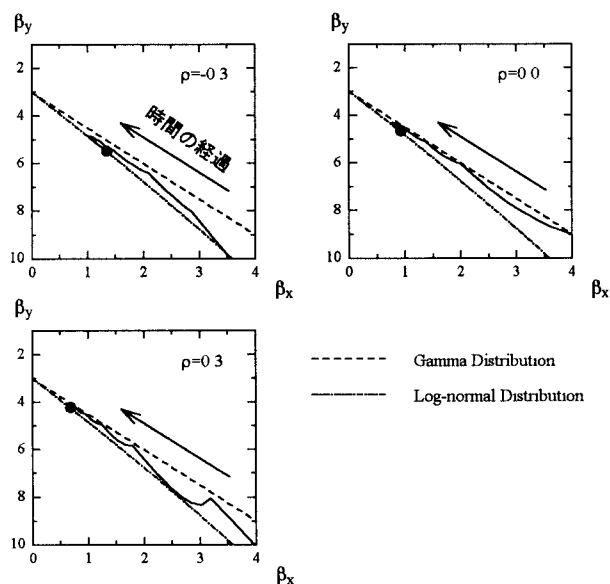


図-4 確率分布の推定(矩形降雨)

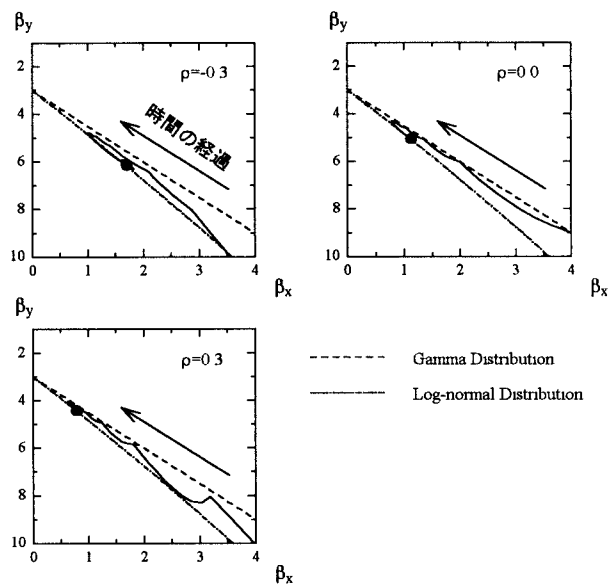


図-5 確率分布の推定(三角形降雨)

推定した。また、図-1から図-3が示すように、回帰係数 ρ の値が増加すると、モーメントの値も増加することがわかった。つまり、観測降雨量の分散が一定値であっても、観測降雨量の相関の大小によって流出量のモーメントに大きな差が生じていることになる。更に、確率変数 Q の1～4次モーメントが既知の場合、次式のパラメータ(β_x, β_y)を用いて、 Q の確率密度関数を推定することができる。

$$(\beta_x, \beta_y) = (\mu_{Q3}^2 / \sigma_Q^6, \mu_{Q4} / \sigma_Q^4) \quad (47)$$

本論文で推定した流出量の1～4次モーメントを用いて、式(47)に代入し流出量の確率密度関数の推定を行う。図-4、図-5は、無次元化された降雨量の平均値が矩形と三角形の場合における時間変化するパラメータ(β_x, β_y)の計算結果(実線)を示している。計算条件は、3章2節で用いたものと同じ条件である。例えば、図-4、図-5に示されるように、(β_x, β_y)の計算結果が破線上にある場合、その確率密度関数はガンマ分布と推定される。図-4、図-5から、流出量の確率密度関数は、ガンマ分布、対数正規分布もしくはそれらに非常に近い確率分布で近似できることがわかる。記号●は、流出量の平均値がピークを迎えたときを示している。ピーク時の確率密度関数は、およそ対数正規分布で近似できることがわかる。この方法を用いると、時間変化する流出量の確率密度関数が容易に得られるので、計算流出量の信頼限界を推定することも可能となる。

参考文献

- 1) 日本河川協会編：改訂新版建設省河川砂防基準(案)同解説，計画編，山海堂，pp. 9-16, 1997.
- 2) 端野道夫：計画降雨波形の確率論的定式化と条件付確率降雨強度式の提案，土木学会論文集，No. 369/II-5, pp139-146, 1986.
- 3) 端野道夫：Freund分布による条件付確率降雨波形と計画降雨波形の決定，水理講演会論文集，No. 31, pp. 203-208, 1987.
- 4) 端野道夫，前久司：多峰計画降雨波形の確率評価モデル，水工学論文集，No. 34, pp. 13-18, 1990.
- 5) 藤田睦博，工藤睦信，中尾隆，橋本識秀：貯留型流出モデルの確率応答に関する研究 -降雨量が時間的に独立な確率過程の場合-，土木学会論文集，No. 515/II-31, pp. 1-11, 1995.
- 6) 田中岳，藤田睦博，工藤睦信，内島邦秀：Kinematic Waveモデルと貯留型流出モデルの比較 -周波数特性と確率特性-，土木学会論文集(投稿中)
- 7) 工藤睦信，藤田睦博，田中岳，阿部修，熊谷進：貯留型流出モデルの確率応答に関する研究(2)-降雨量が互いに従属する場合-，水工学論文集，No. 41, pp. 85-92, 1997.
- 8) R. L. Bras and K. P. Georgakakos: Real time nonlinear filtering techniques in streamflow forecasting -A statistical Linearization Approach-, *Proceedings of the Their International Symposium on Stochastic Hydraulics*, pp. 95-105, 1980.
- 9) 藤田睦博：斜面長の変動を考慮した貯留関数法に関する研究，土木学会論文報告集，No. 314, pp. 75-86, 1981.

(1998. 9. 30受付)