

CIP法を用いた浅水流方程式の数値計算手法の開発

A NUMERICAL STUDY ON A SHALLOW WATER FLOW USING CIP METHOD

中山恵介¹・佐藤圭洋²・堀川康志³

Keisuke NAKAYAMA, Takahiro SATOH and Yasushi HORIKAWA

¹正会員 工修 北海道大学大学院助手 工学研究科 (〒060 北海道札幌市北区北13条西8丁目)

²学生員 北海道大学大学院 工学研究科 (〒060 北海道札幌市北区北13条西8丁目)

³正会員 パシフィックコンサルタンツ(株) (〒060 札幌市北区北7条西1丁目2番地6NSS・ニューステージ 札幌)

In a mountainous region, run-offs are generally produced by infiltration flows and surface run-offs. Surface run-offs include streaming flows and rapid flows. Therefore, in order to reproduce a flow in a mountainous region, we must calculate the flow in which a streaming flow and a rapid flow are intermingled. For this calculation, we applied CIP to a shallow water flow equation. The purpose of this study is to reproduce two types of flows. In one of them, the resistance coefficient is constant, and in another it is given by Hey equation. As a result, the experiment of a mountainous flow and the simulated one agreed considerably.

Key Words : Surface Flow, Mountainous Region, CIP, Rapid Flow, Streaming Flow, Run-Off

1. はじめに

河川流域において、降雨・降雪・融雪に伴う、及びそれらを伴わない浸透流・表面流・蒸発散が存在する。前者を外的条件とすると、その変化により流域内の流れのようすは大きく影響を受けると考えられる。その中で、浸透流、表面流はもっとも大きな変化を見せる一つであるといえ、本研究はその表面流に着目する。表面流の再現の難しさは、外的条件が変化することにより、表面流存在領域、流域内でのフルード数が変化するためである。表面流存在領域の変化は、河道網が外的条件により変化することを意味し、フルード数の変化は、抵抗係数が外的条件により影響を受けることを意味する。特に後者は、常・射流混在を意味し再現の困難さを示す。

これまで、山地河川において表面流の再現には貯留関数法、kinematic wave理論が用いられてきたが、これらは外的条件の変化による流れの状態の変化を考慮していなかった。更に、これらの方法は非常に簡便であるが、ある洪水で決定されたパラメータを単純に他の洪水や融雪に適用することが出来ないという欠点を

もっている。上述の方法以外で、精度よく外的条件による流れの状態を再現するため、本研究では表面流が鉛直加速度を持たない静水圧近似出来るとし、表面流を浅水流方程式で表現することとする。更に、常・射流混在である流れを再現するため、差分法においてCIP法(cubic-polynomial interpolation)¹⁾を用いることとする。CIP法は、固・液・気が混在する拡散の激しい場において、正確な移流項の評価を行なうことが出来る方法であり、土木では、波の分野において実験とよい一致を示している²⁾³⁾⁴⁾。常・射流が混在する流れを精度よく解く方法は、その他流束差分法などがあげられるが、山地河川において解かなくてはならない方程式は他に多く存在する(浸透流方程式等)ので、簡便さからCIP法を本研究では用いることとする。

更に、他の視点から見ると、土砂生産量推定、洪水調節を行なう上で、山地河川における表面流の再現を正確に行なうことが重要であると思われる。そこで、本研究は一般座標を用いた常・射流混在流れを数値計算により再現し、山地河川を模擬した実験⁵⁾⁶⁾との比較を行なうことを目的とする。

2. 基礎方程式と計算スキーム

任意形状での計算を行なうため、式(1)、式(2)に示すポアソン方程式による座標の決定を行なった。

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = P(\xi, \eta) \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = Q(\xi, \eta) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = Q(\xi, \eta) \end{cases} \quad (2)$$

ここで、 x, y : x, y 方向の実座標、 ξ, η : 正方形メッシュ1×1での ξ, η 方向の座標、 P, Q : メッシュ形状を決定する関数である。座標の決定がポアソン方程式を用いて行なわれたため、直交性が保たれておらず、座標変換した後の方程式は複雑なものとなった。そこで、紙面の都合上、 x, y で表記された浅水流方程式(式(3)、式(4)、式(5))のみ記載する。

$$\begin{cases} \frac{\partial uh}{\partial t} + \frac{\partial u^2 h}{\partial x} + \frac{\partial vuh}{\partial y} = -gh \left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} \right) \\ \quad - f u \sqrt{u^2 + v^2} + h v \nabla^2 u \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial vh}{\partial t} + \frac{\partial uvh}{\partial x} + \frac{\partial v^2 h}{\partial y} = -gh \left(\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y} \right) \\ \quad - f v \sqrt{u^2 + v^2} + h u \nabla^2 v \end{cases} \quad (4)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} + \frac{\partial vh}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

ここで、 u, v : x, y 方向の流速成分、 h : 水深、 H : 基準面からの河床高さ、 f : 抵抗係数、 ν : 10^{-6} m²/secである。抵抗係数は、3。任意形状水路における再現計算結果、4。山地河川模擬実験との比較において、式(6)、式(7)のように用いた⁵⁾⁶⁾。式(6)は単純なパターンでの計算とするため一定値を与えるものであり、式(7)はHeyの式とよばれ山地河川において用いられるもので、実験で用いられた河床材料の平均粒径が3cm程度であり山地河川を模擬したものであったものであることから採用した。

$$f = \text{const.} \quad (6)$$

$$f = h / R \left\{ \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{aR}{3.5d_{84}} \right) \right\}^2 \quad (7)$$

ここで、 R : 径深、 a : 11.16、 d_{84} : 84%粒径、 d : 粒径、 κ : 0.4である。

計算には差分法を用いることとし、格子は食い違い格子を用い、式(3)-式(5)を式(8)-式(14)のように、時間に関して方程式を分離するスキームを用いて表現した。更に、式(12)に式(10)、式(11)を代入することにより連続の式を満たし、水深については陰的に解くことで計算を安定して進めることとした。移流項に関して、CIP法を用いて計算を行なうこととした。

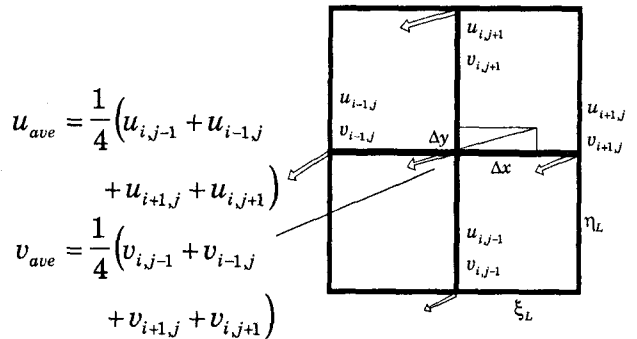


図-1 CIP法概略

$$\begin{cases} \frac{\hat{u} - u^n}{\Delta t} = -g \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^n - g \frac{\partial H}{\partial x} \\ \quad - f \left(\frac{u^n \sqrt{u^{n2} + v^{n2}}}{h} \right) + \nu \nabla^2 u^2 \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \frac{\hat{v} - v^n}{\Delta t} = -g \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^n - g \frac{\partial H}{\partial y} \\ \quad - f \left(\frac{v^n \sqrt{u^{n2} + v^{n2}}}{h} \right) + \nu \nabla^2 v^2 \end{cases} \quad (9)$$

$$\frac{\tilde{u} - \hat{u}}{\Delta t} = -g \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad h^{n+1} = h^n + \phi \quad (10)$$

$$\frac{\tilde{v} - \hat{v}}{\Delta t} = -g \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (11)$$

$$\frac{\phi}{\Delta t} + \frac{\partial \tilde{u} h^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v} h^{n+1}}{\partial y} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{u^{n+1} - \tilde{u}}{\Delta t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{v^{n+1} - \tilde{v}}{\Delta t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0 \quad (14)$$

現在、矢部⁷⁾により用いられているCIP法は、運動方程式中の移流項のみでなく、連続の式の中の水深の移流成分を分離して、計算を行なうものであるが、著者は運動方程式中の移流項による計算不安定を取り除くためだけにCIP法を用いた。

CIP法は、移流項を図-1に示されるように、あるノードにおける Δt 秒後の成分が $\Delta x = -u_{ave} \Delta t$ 、 $\Delta y = -v_{ave} \Delta t$ 離れた場所から移流されるとして、 Δt 秒後の成分 $f(\Delta x, \Delta y)$ を計算するものである。その際、 $\Delta x, \Delta y$ 離れた位置における成分は3次スプラインを用いて表現することとし、その式の形及び係数については、参考文献⁸⁾を参考にされたい。

図-2に、CIP法による計算精度を検討するために行なった、式(8)-式(14)において抵抗と粘性の項が省略された1次元段波計算結果を理論値とともに示す。

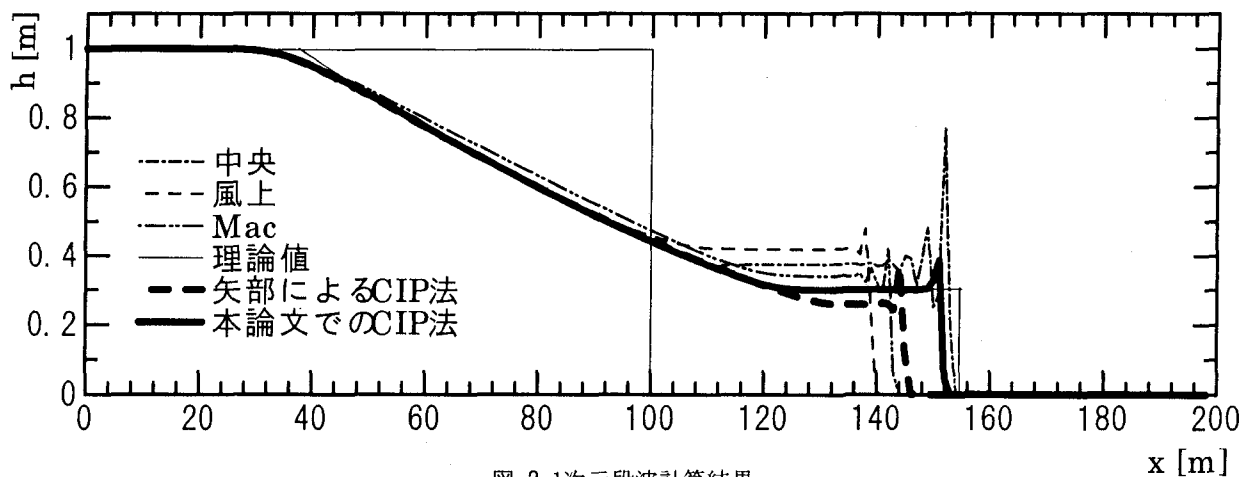


図-2 1次元段波計算結果

$x=100\text{m}$ における地点に示される細線が、初期の水面形を示している。波の伝わりを理論値に近く再現しているのは、本論文によるCIP法、中央差分によるものであるが、中央差分によるものは、ダムブレイクフロントにおいて不安定な波が生じている。風上差分とマコーマックは、片側差分での計算となるため保存性が悪い。矢部によるCIP法と本論文におけるCIP法を比較すると、本論文におけるものの方が再現性がよい。以上の結果から、本論文におけるCIP法は、式(13)、式(14)のように保存系の計算でないにも関わらず、保存性がもっともよい結果を示した。

3. 任意形状水路における再現計算結果

河床底面における抵抗を式(6)のように一定値を与えることにより、本手法による浅水流方程式の数値解法がどの程度妥当な結果を示すかを検討する。計算に用いた水路形状は、図-3に示すように蛇行部を持たせた。縦断方向に80m、横断方向に6mの長さを持ち、メッシュ数70×30であり、中央の細かな部分のメッシュの平均縦断長は0.5m、平均横断長は0.2mである。但し、横断方向におけるメッシュは、壁面付近においてより細かなメッシュとするため0.08m、中央付近で0.33mとしている。表-1に計算を行なった5ケースでの計算条件を示す。それぞれの計算は、段波の場合には水深1.0mを図-2のA-B断面から左半分に加え、 $Fr^2=2.0$ の場合には上流端で流速4.43m/sec、水深1.0mを与

え、 $Fr^2=u^2/gh=0.5$ の場合には上流端で流速2.21m/sec、水深1.0mを与えた。

計算は、式(8)-式(14)を用いることにより非常に安定に行なうことが出来、全計算は $t=20.0\text{sec}$ 程度で落ち着いた非定常流平衡のようすを示していた。図-4に、case1-case4における計算結果を示す。尚、計算結果の図は、流れのようすの変化が大きい蛇行部を拡大して表示している。

case1の段波条件において、急激な水面形の変化が初期状態として与えられても安定して計算が進められていることが分かる。段波先端部付近において Fr^2 が1.0を越えて射流が存在しているのが、 Fr^2 分布図から分かる。特に、最先端部付近では Fr^2 が2.7を示しており、常・射流が混在した流れであったことが分かる。更に、蛇行の影響による影響であると考えられる、段波フロント左岸の Fr^2 が右岸より大きくなるといった横断方向内での Fr^2 の変化もみられる。

case2の水路全域 $Fr^2=2.0$ の射流流れにおいて、水路の蛇行により流れを妨げると考えられる部分(図中四角で示す)で、水深が増大し、逆にその後方では剥離に伴い水深が他の部分より小さくなっている。 Fr^2 の分布は、水面形の変化と対応して Fr^2 の増加(○)、減少(△)が交互に現れており、図中実線四角で示される部分において Fr^2 が1.0より小さくなっているところが存在している。この剥離は、水路が蛇行していることによる影響であると考えられ、流速分布においても、実線四角で囲われた領域に剥離に伴うと思われる速度ベクトルの急激な減少が見られる。更に、 Fr^2 の大きな部

表-1 計算条件

	計算の種類	詳細
case1	段波	水路中央において段波を発生させる。
case2	射流	$Fr^2=2.0$ の勾配水路。
case3	ジャンプ	$Fr^2=2.0$ からA-B断面において $Fr=0.5$ へと急激に変化する勾配を設ける。
case4	2つのマウンド	$Fr^2=2.0$ の平均勾配水路において上流部に小さな、下流部に大きなマウンドを設ける。
case5	複断面	$Fr^2=0.5$ の平均勾配水路において水路中央部に複断面を設ける。

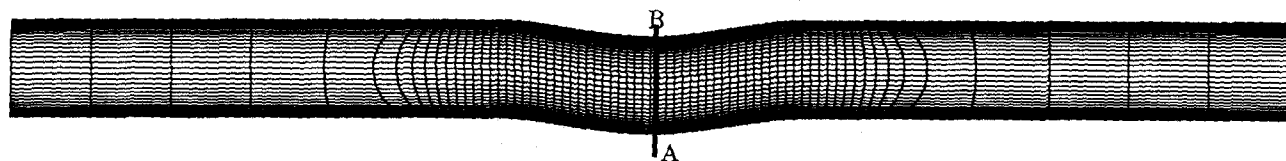


図-3 計算に用いたメッシュ

case1

$t = 0 \text{ sec}$

Water depth



$t = 5 \text{ sec}$

Water depth



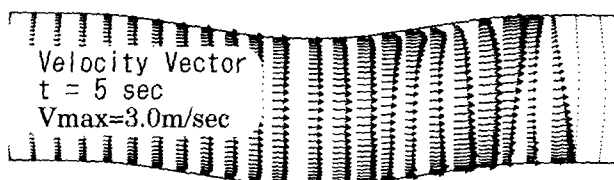
Froude number
 $t = 5 \text{ sec}$

$Fr^2=2.7$

$Fr^2=1.6$



Velocity Vector
 $t = 5 \text{ sec}$
 $V_{max}=3.0\text{m/sec}$

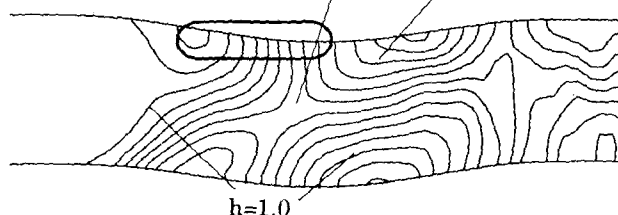


case2

Water Depth
 $t = 20 \text{ sec}$

$h=0.9$ $h=0.8$

$h=1.0$



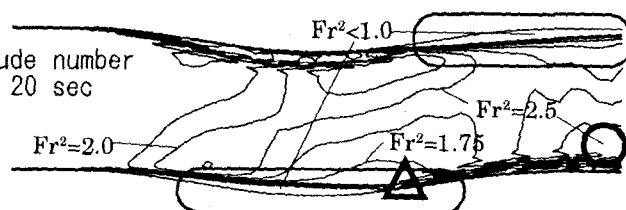
Froude number
 $t = 20 \text{ sec}$

$Fr^2<1.0$

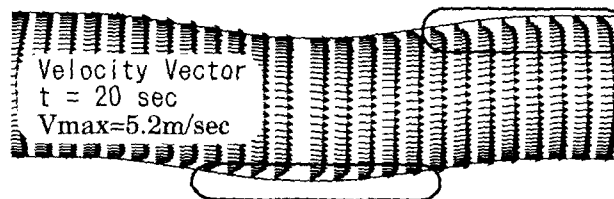
$Fr^2=2.5$

$Fr^2=2.0$

$Fr^2=1.75$



Velocity Vector
 $t = 20 \text{ sec}$
 $V_{max}=5.2\text{m/sec}$



case3

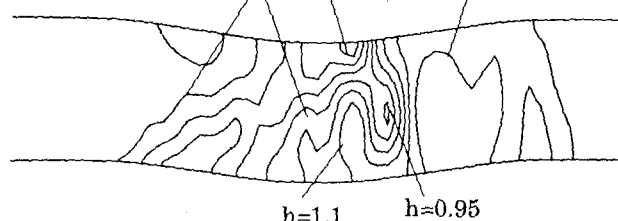
Water Depth
 $t = 20 \text{ sec}$

$h=1.0$ $h=0.8$

$h=1.2$

$h=1.1$

$h=0.95$



Froude number
 $t = 20 \text{ sec}$

$Fr^2<1.0$

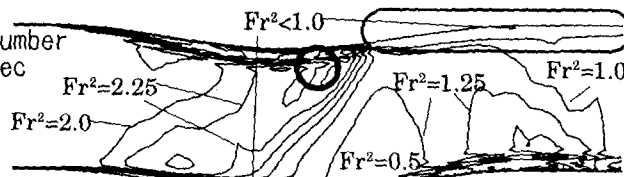
$Fr^2=2.25$

$Fr^2=1.25$

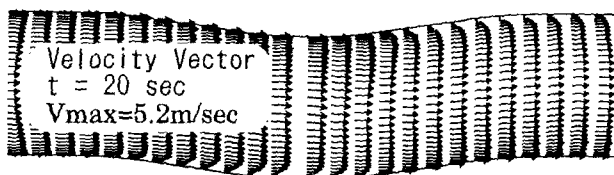
$Fr^2=1.0$

$Fr^2=2.0$

$Fr^2=0.5$



Velocity Vector
 $t = 20 \text{ sec}$
 $V_{max}=5.2\text{m/sec}$



case4

Water Depth
 $t = 20 \text{ sec}$

$h=1.05$

$h=0.95$

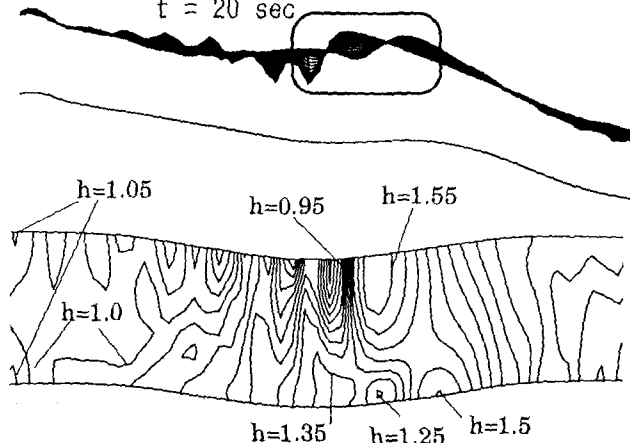
$h=1.55$

$h=1.0$

$h=1.35$

$h=1.25$

$h=1.5$



Froude number
 $t = 20 \text{ sec}$

$Fr^2=3.0$

$Fr^2=4.5$

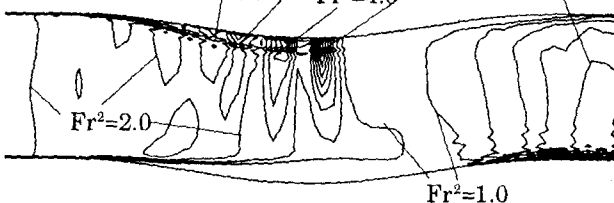
$Fr^2=3.0$

$Fr^2=0.5$

$Fr^2=4.0$

$Fr^2=2.0$

$Fr^2=1.0$



Velocity Vector
 $t = 20 \text{ sec}$
 $V_{max}=8.6\text{m/sec}$

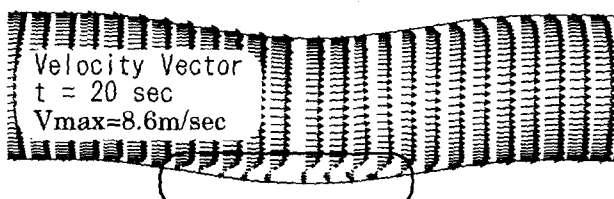


図-4 case1-case4における水面形, Fr^2 分布, 流速分布図

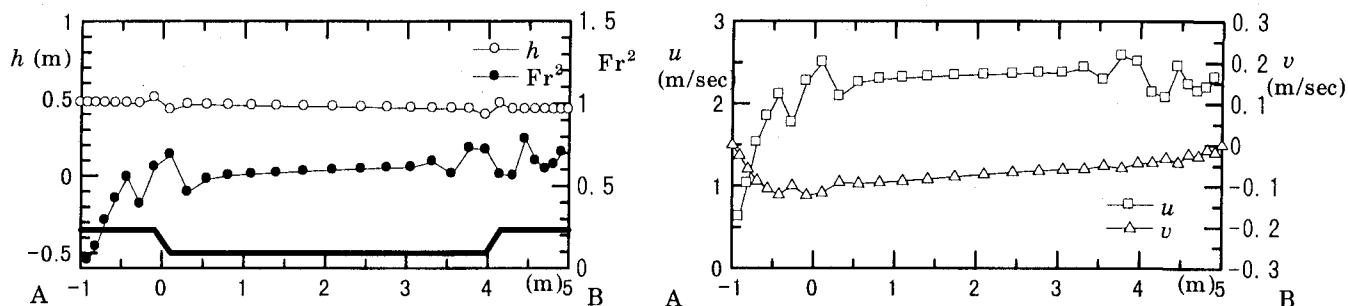


図-5 case5におけるA-B断面の水面形、 Fr^2 分布図と流速分布図

分の連なりは、図-2においてCIP法が保存性を満たしていたことから、蛇行の影響による衝撃波であると考えられる。

case3の図-2中のA-B断面左側で $Fr^2=2.0$ 、右側で $Fr^2=0.5$ の跳水を伴う流れにおいて、case2と同様に蛇行の初期部で Fr^2 が増加(○)しているが、その後急激な勾配の変化による跳水が引き起こされ、 $Fr^2=0.5$ へと急激に変化していることが分かる。更に、跳水前の Fr^2 の最大値2.4を示した領域の直後に、速度分布図において水平断面内での剥離であると考えられる流速の小さな領域(実線四角で囲われる領域)が存在しており、 Fr^2 の大きな連なりはcase2において現われた衝撃波であると考えられる。

case4は、2つのマウンドを持つ水路(case4の図中左上に側面から見た場合の河床と水面形を示しており、左端が小さなマウンド、中央から右側が大きなマウンドである)であるが、最初のマウンドは小さく設定されているため射流状態で越流していた。しかし、下流側のマウンドは、図から分かるようにそれ自身大きく逆勾配を生じているため、射流のまま越流出来ず跳水(破線四角で囲われた範囲)を生じており最大で Fr^2 が0.4まで減少していた。更に、速度分布図において、case3と同じく跳水に伴う蛇行部での水平断面内での剥離域(実線四角で囲われた範囲)が見られる。case3では、剥離内で渦の発生が見られなかったが、case4では、case3より大きな勾配の変化が生じているため、剥離に伴う渦の発生がはっきりと見られる。

図-5に、case5での図-2内の横断面A-Bにおける水位、 Fr^2 分布図(左)と流速分布図(右図)を示す。複断面の取り方は、水路幅6mの内両端1mに0.3m河床より高い高水敷を設ける形とした。図中の流速において、 u 成分が正であることは手前方向の流れが存在することを意味し、 v 成分が正であることは断面内でAからBへの流れが生じていることを意味している。水面形をみると、僅かに左上がりであることが分かる。これは、流速分布図の v 成分から、蛇行の影響による断面内でのBからAへの流れが生じていたためであると考えられる。case2と同様に、蛇行の影響によるB側(左岸)での

Fr^2 の増加、蛇行に起因する剥離によるA側(右岸)での Fr^2 の減少が見られる。

4. 山地河川模擬実験との比較

本節では、実験の再現性に関して検討を行なう。竜澤ら⁷⁾は山地河川を模擬した実験を行なうことにより種々の状態における水面形を測定している。それらは、浅水方程式で近似出来る状態のものから、射流がステップを越流する際にステップ後方で剥離が生ずることにより射流状態が保たれる浅水方程式では近似できないものまで含んで実験されている。そこで我々は、静水圧分布が成り立ち、浅水流近似出来るであろう状態の実験結果を数値計算により再現し、検討を行なうこととする。図-6に、流量3l/sec、平均勾配1/20、ステップの勾配1/10である場合の河床と水面形の実験結果を示す。流量が小さく、逆勾配を生じているためプール部において貯留され、ステップ部において越流しているのが分かる。

図-6に、計算に用いた格子と河床形状を示す。水路長10.0m、水路幅0.3mであり、縦断方向へのメッシュ長さは両端5メッシュで0.4m、中心部では0.05m、横断方向へのメッシュ幅は0.015mとした。図-5と図-7に、式(7)のHeyの式⁹⁾で抵抗係数を算定した数値計算による河床と水面形の図、 Fr^2 分布図、流速分布図を示す。水面形分布図から、ステップ部における貯留および段落ち部が良好に再現されているのが分かる。 Fr^2 の分布を見ると、貯留部では最小で0.2程度であるのに対して、段落ち部で射流状態へと遷移し最大5.2にまで増大しているのが分かる。流速分布において、他の結果を証明するように段落ち部での流速の増大が見られる。横断面内においてみられる流速分布の非対称形状は、 Fr^2 分布図においても僅かに見られた横断方向内での揺らぎに対応している。これは、流れの状態が非定常であるために時間的な揺らぎが生じており、その瞬間を計算結果として取り出したためである。このような非定常に水面が波打つことによる流速分布の変化を再現できたのは、移流項の評価を精度よく行なったこ

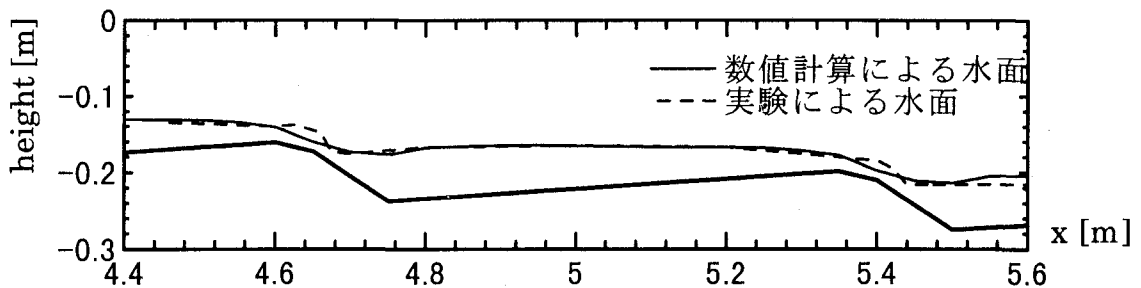


図-5 山地河川実験($s=1/20$, $Q=3(l/s)$), 水面形(竜澤ら(1997))(波線)と数値計算による水面形再現結果(実線)

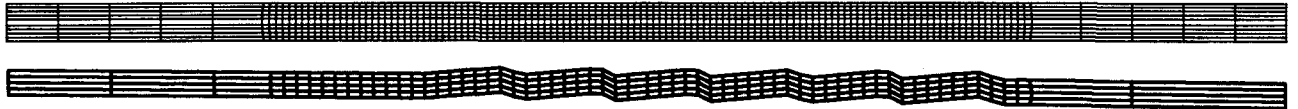


図-6 計算に用いたメッシュ(横断方向のメッシュ数は印刷の都合上半分にしている)(上)と河床形状(下)

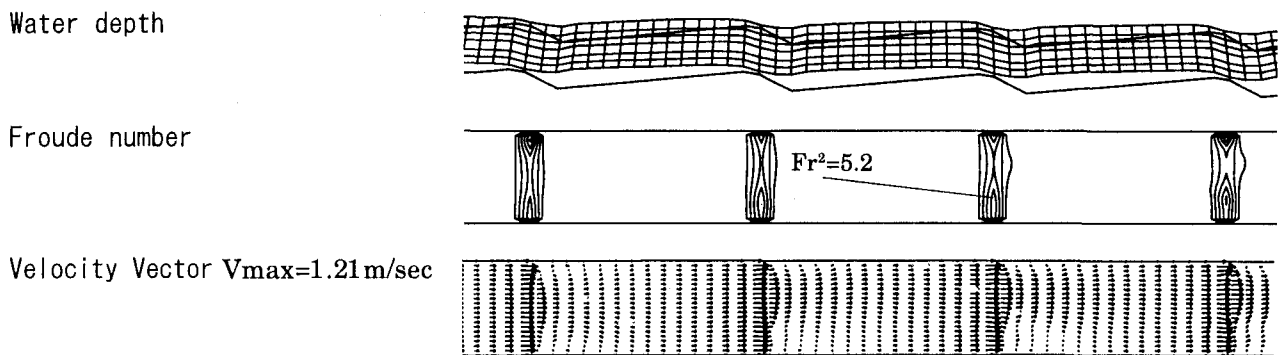


図-7 数値計算結果($s=1/20$, $Q=3(l/s)$), 水面形, Fr^2 , 流速分布図

とによると考えられる。

5. まとめ

本研究により、以下の結果が得られた。

(1) テストケースによるCIP法の適用

常・射流が混在する場合の浅水流方程式の解法をCIP法を用いることで提案した。一般座標を用い、5つのケースでの計算を行なうことにより、安定して計算が進められることが分かった。

(2) 実験との比較

山地河川を模擬した種々の実験の内、浅水流方程式で表現できるであろう条件の実験を、数値計算により再現した。その結果、水面形が実験結果とほぼ一致して得られた。プール部では Fr^2 が0.2、段落ち部においては Fr^2 が5.2にまで増大していたが、計算は安定して行なうことが出来た。

Multidimensional Cubic-Interpolated Pseudoparticle (CIP) Method without Time Splitting Technique for Hyperbolic Equations, Journal of The Physical Society of Japan, Col.59, No.7, pp.2301-2304, 1990

- 2) 渡部靖憲：種々の波浪条件における流体運動機構に関する研究, 北海道大学博士論文, 1997.
- 3) 渡部靖憲, 佐伯浩：碎波帯内のダイレクトシミュレーション, 海岸工学論文集第43巻, pp. 71-75, 1996.
- 4) Watanabe, Y., H. Saeki : Numerical analysis of breaking waves, Hydraulic Engineering Software VI , pp.385-394, 1996.
- 5) 長谷川和義：山地河川の形態と流れ, 水工学シリーズ 88-A-8, 1988.
- 6) Colin R. Thorne, Aff. M. ASCE, and Lyle W. Zevenbergen : Estimation Mean Velocity in Mountain Rivers, Journal of Hydraulic Engineering, Vol.111, No.4, pp.612-624, 1984.
- 7) 長谷川和義：溪流の淵・瀬の水理とその応用, 水工学シリーズ97-A-9, 1997.
- 8) 竜澤宏昌, 安養寺学：ダムの魚道に関する研究, 水資源開発公団試験研究報告, 作成中

参考文献

- 1) Yabe, Takashi, Takeo Ishikawa, Yusaku Kadota: A

(1997. 9. 30受付)