

開水路等流の粘性底層およびバッファ層 における水理特性

CHARACTERISTICS OF VISCOUS SUBLAYER AND BUFFER LAYER OF A 2-D OPEN CHANNEL FLOW

鬼束幸樹¹・瀬津家久²
Kouki ONITSUKA and Iehisa NEZU

¹正会員 博(工) 京都大学大学院助手 環境地球工学専攻(〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

²正会員 工博 京都大学大学院教授 環境地球工学専攻

The inner layer, consisting of viscous sublayer, buffer layer and the log layer, of a 2-D open channel flow was measured accurately with a laser Doppler anemometer. It was found that friction velocities evaluated from both linear formula in viscous sublayer and the log-law were in a good agreement with each other. The mean stream velocity profile can be expressed well by using of van Driest damping function and that van Driest damping factor is the universal constant. It was suggested that vertical turbulence intensity in the inner region can be expressed using of van Driest damping function.

Key Words : uniform flow, viscous sublayer, turbulence, van Driest damping factor

1. はじめに

開水路流は粘性底層, buffer 層および log 則領域によって構成される内層と外層とに分けられる。

外層での特性は水深によって支配されているため, それを用いた無次元座標(外層表示)によって水理量が普遍表示できる。ただし, 外層での主流速分布を理論的に導きだすことは現在に至るまで成功していないため, 何らかの経験則が必要となる。Nezu & Rodi¹⁾は log 則に wake 関数を付加した log-wake 則を開水路流に初めて導入した。log-wake 則は物理的意味が薄いという欠点を有しているが, 開水路流外層における主流速分布を良好に表現できるため, 現在広く用いられている。また, log-wake 則に含まれる wake strength parameter Π は, 摩擦速度を代表速度, 水深を代表長さとしたときの Reynolds 数が 500 以下でゼロとなり, Reynolds 数が 500 から 2500 の領域で Π が急増し, 2500 以上では一定値 0.2 をとることが Nezu & Rodi¹⁾によって明らかにされた。さらに, 外層の乱れ強度分布に関しては, Reynolds 数および Froude 数に影響を受けず, 指数関数的な分布を示すことが瀬津²⁾によって明らかにされた。

一方, 内層での特性は, 摩擦速度および動粘性係数によって支配されているため, それらを用いた無次元座標(内層表示)によって水理量が普遍表示でき

る。粘性底層での流速分布は直線分布となることが運動方程式から理論的に導かれ, log 則領域での流速分布は log 則によって表現できることが半理論的に示される。また, 粘性底層と log 則領域との中間に位置する buffer 層における流速分布は, van Driest のダンピング関数を導入することで表現できる。ただし, log 則に含まれる Karman 定数 κ , 積分定数 A および van Driest のダンピング係数 B は理論的には求めることができず, 実験より求めなければならない。Nezu & Rodi¹⁾は Reynolds 数および Froude 数を系統的に変化させた 2 次元開水路等流を詳細に計測し, Karman 定数 κ , 積分定数 A および van Driest のダンピング係数 B が Reynolds 数および Froude 数の影響を受けず, それぞれ $\kappa=0.41$, $A=5.3$, $B=26$ の普遍定数を示すことを明らかにした。

さらに, Nezu & Rodi¹⁾は, 流下方向の乱れ強度分布が粘性底層においては直線分布となり, その勾配 C が 0.3 となることおよび buffer 層においては van Driest のダンピング関数を導入することで表現でき, van Driest のダンピング係数 B_{μ} が 10 となることも実験的に示した。これらの値は現在基準値として広く用いられている。しかし, 粘性底層および buffer 層における鉛直方向乱れ強度分布に関しては, 流下方向乱れ強度と異方性が強まることが境界層流の特性を基に類推されているが, 測定結果がないために推

測の域をでない。

このように開水路等流の特性は、内層と外層とはかなり異なることが明らかになっているが、スペクトル特性に関しては、buffer層、log則領域および外層の領域において、慣性小領域で Kolmogoroff の $5/3$ 乗則が成立し、粘性領域において Heisenberg³⁾の 7 乗則や椿・小松⁴⁾の $13/3$ 乗則などが成立することが明らかにされている。しかし、粘性底層におけるスペクトル分布にも同様な法則が成立するかどうかは、現在のところ不明である。

以上のことから、開水路流の基本となる2次元開水路等流の特性は、外層においてはかなり明らかにされているものの、粘性底層付近における特性はそれほど明らかにされていないのが現状といえる。本研究では、4ビームファイバー型レーザー流速計を用いて粘性底層、buffer層を含む内層と外層とを詳細に計測し、底面近傍における特性を初めて明らかにしたものである。

2. 理論的考察

本章では、2次元開水路等流の平均流速分布、乱れ強度分布および Reynolds 応力分布などの理論式または経験式を示し、加えて、まだ明らかにされていない分布について考察する。

水路床に沿って流下方向に x 軸を、 x 軸に直角上向きに y 軸を定義し、 x 軸および y 軸方向それぞれの時間平均流速を U および V とし、乱れ強さを u' および v' とする。完全に発達した2次元開水路流のせん断応力 τ の分布は、 x 軸方向の運動方程式を変形することで次式のように示される。

$$\frac{\tau}{\rho U_*^2} = \frac{-\overline{uv}}{U_*^2} + \frac{dU^+}{dy^+} = 1 - \frac{y^+}{R_*} \quad (1)$$

ここに、 ρ は水の密度、 U_* は摩擦速度、 $-\overline{uv}$ は Reynolds 応力、 $U^+ = U/U_*$ は無次元時間平均流速、 $y^+ = yU_*/\nu$ は無次元座標、 ν は動粘性係数、 $R_* = hU_*/\nu$ は Reynolds 数、 h は水深である。式(1)はせん断応力が Reynolds 応力と粘性応力によって構成されていることを示す。さて、式(1)における Reynolds 応力を Plandtl の混合距離仮説を用いて消去すると、

$$\frac{dU^+}{dy^+} = \frac{2(1-\xi)}{1 + \sqrt{1 + 4\ell^{+2}(1-\xi)}} \quad (2)$$

となる。ここに、 $\xi = y/h$ であり、 ℓ^+ は次式で示される。

$$\ell^+ = \kappa y^+ \Gamma \quad (3)$$

$$\Gamma = 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{B}\right) \quad (4)$$

Γ は van Driest のダンピング関数で、 B はダンピング係数である。等流の場合は、 $B=26$ となることが Nezu & Rodi¹⁾によって示されている。

表-1 実験条件

case	h cm	Fr	Re $\times 10^3$	v cm/s	U_{*1} cm/s	U_{*2} cm/s
R573	7.2	0.15	10.1	12.5	0.709	0.705
R381	7.2	0.10	6.7	8.3	0.472	0.497
R246	7.2	0.05	3.4	4.2	0.304	0.311

粘性底層 ($0 < y^+ \leq 5$) では、 $dU^+/dy^+ \gg -\overline{uv}/U_*^2$ となるので、式(2)は次式に変形できる。

$$U^+ = y^+ \quad (5)$$

一方、バッファ層を越えると $-\overline{uv}/U_*^2 \gg dU^+/dy^+$ となるので、式(2)は次式となる。

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + A \quad (6)$$

等流においては、Reynolds 数および Froude 数に関わらず、 $\kappa = 0.41$ $A = 5.3$ の普遍定数を示すことが Nezu & Rodi¹⁾によって明らかにされた。 $R_* < 500$ のような低 Reynolds 数の開水路等流では、主流速分布が全水深にわたりほぼ式(6)で表現できるが、高 Reynolds 数においては、水面付近で log 則からずれが生じるため、次式の log-wake 則が用いられる。

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + A + \frac{2\Pi}{\kappa} \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) \quad (7)$$

乱れ強度分布に関しては、以下のような半経験式が襍津²⁾によって提案され、

$$\frac{u'}{U_*} = D_u \exp(-\lambda_u \xi) \quad (8)$$

$$\frac{v'}{U_*} = D_v \exp(-\lambda_v \xi) \quad (9)$$

Nezu & Rodi¹⁾のレーザー流速計の計測によって、基準値 $D_u = 2.26$ 、 $D_v = 1.23$ 、 $\lambda_u = 0.88$ 、 $\lambda_v = 0.67$ が実験的に求められた。また、壁面付近の内部変数によって支配されている領域においては、乱れ強度 u'/U_* は次式に従うことが明らかにされている。

$$\frac{u'}{U_*} = D_u \exp\left(-\lambda_u \frac{y^+}{R_*}\right) \Gamma + C y^+ (1 - \Gamma) \quad (10)$$

等流では、ダンピング係数 B_u は 10 をとり、 C は 0.3 をとる。さらに、粘性底層では、右辺第 1 項よりも、右辺第 2 項の方が支配項となり、

$$\frac{u'}{U_*} = C y^+ \quad (11)$$

で示される。

一方、乱れ強度 v' の底面付近における分布は、境界層流においては乱れ強度 u' に対する異方向性が強まることが実験および DNS によって明らかにされているものの、開水路流においては未だ不明である。

3. 実験装置および実験方法

実験に用いた水路は、長さ 10m、幅 40cm、高さ 50cm

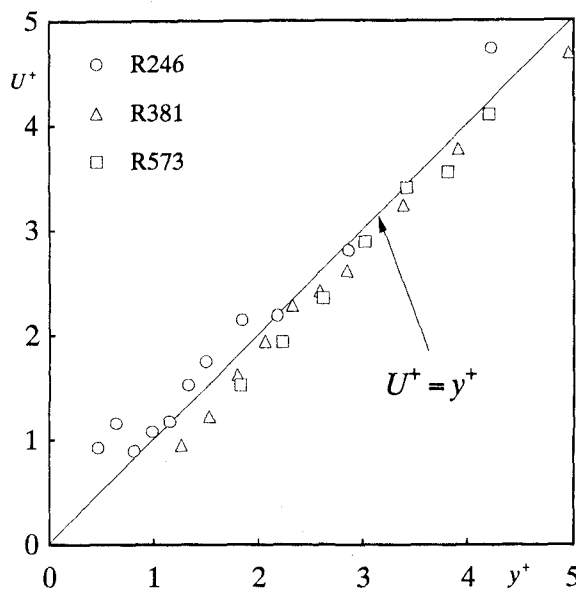


図-1 粘性底層における主流速分布

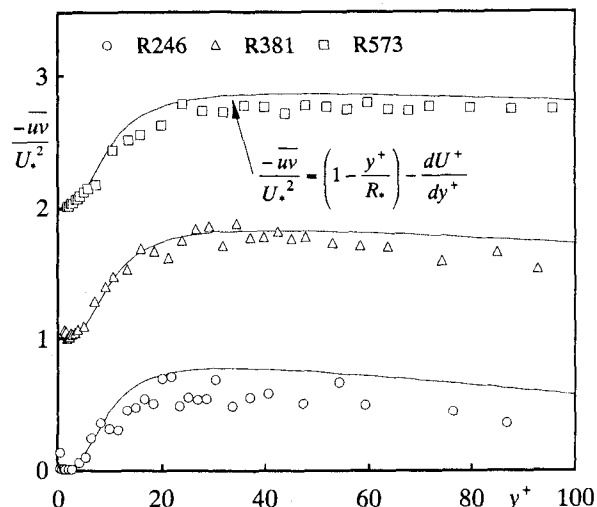


図-3 Reynolds応力分布

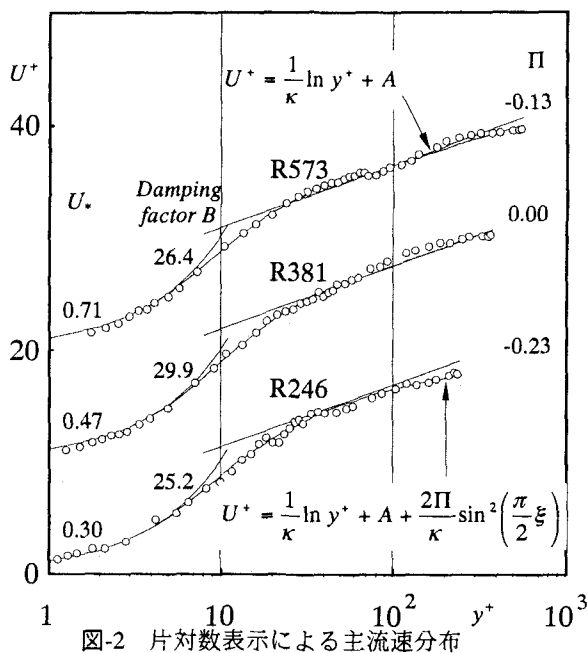


図-2 片対数表示による主流速分布

の可変勾配水路である。瞬間流速の測定には4ビーム後方散乱型ファイバーレーザー流速計を用いた。

実験条件は、Reynolds数を変化させた3ケースである。実験条件を表-1に示す。ここに、 $Fr = v/\sqrt{gh}$ はFroude数、 $Re = vh/\nu$ はReynolds数、 ν は断面平均流速、 g は重力加速度、 U_{*1} 、 U_{*2} はそれぞれ粘性底層およびlog則より求めた摩擦速度（詳細については後述する）であり、測定時間は60sである。これらの3ケースはReynolds数のみならず、Froude数も変化しているが、底面付近の挙動に及ぼすFroudeの影響はほとんどないことをNezu & Nakagawa⁵⁾が示しており、また、本実験条件のFroude数は限界流に比べ非常に小さく、Froude数による影響を無視しうるものと考え

える。

4. 実験結果および考察

(1) 主流速分布および摩擦速度の評価

図-1は粘性底層 $0 < y^+ \leq 5$ から求められた摩擦速度により無次元化された主流速分布を示している。いずれのケースもほぼ式(5)に適合していることが分かる。これは、本実験の平均流速測定精度が高いことを示すものである。また、Reynolds数による影響は認められない。

図-2は粘性底層から求めた摩擦速度によって無次元化された主流速分布の片対数表示である。同図より $5 < y^+ \leq 40$ のバッファ層では式(2)に、 $40 < y^+$ では式(6)に適合していることが分かる。また、 $40 < y^+ \leq 0.2R$ の主流速分布を式(6)に当てはめて摩擦速度を求めたところ、表-1に示したようにほぼ一致した。これは、従来から用いられてきたlog則による摩擦速度の評価が妥当であることを示す。

次に、 $5 < y^+ \leq 40$ のバッファ層において式(2)を当てはめてvan Driestのダンピング係数 B を求めた。ダンピング係数 B は3ケースともNezu & Rodi¹⁾が提唱した26の値を示し、Reynolds数への依存性は認められなかった。図-2中に式(2)を曲線で示しているが、バッファ層の主流速分布が式(2)によって良好に表現できることが分かる。

図-3に内層表示によるReynolds応力分布をプロットで、式(1)を実線で示している。R246の実測値はやや理論式(1)より小さな値を示している。これは、流速が遅いため、測定時間内に測定体積を通過する散乱粒子の数が少なかったことが一因として考えられ、今後、長時間測定をする必要があると考えている。しかし、R573やR381の実測値はおおむね式(1)に適合している。

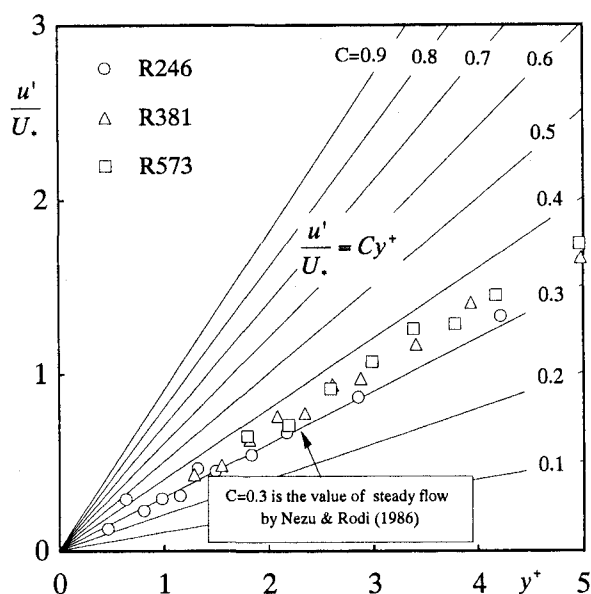


図-4 粘性底層における流下方向乱れ強度分布

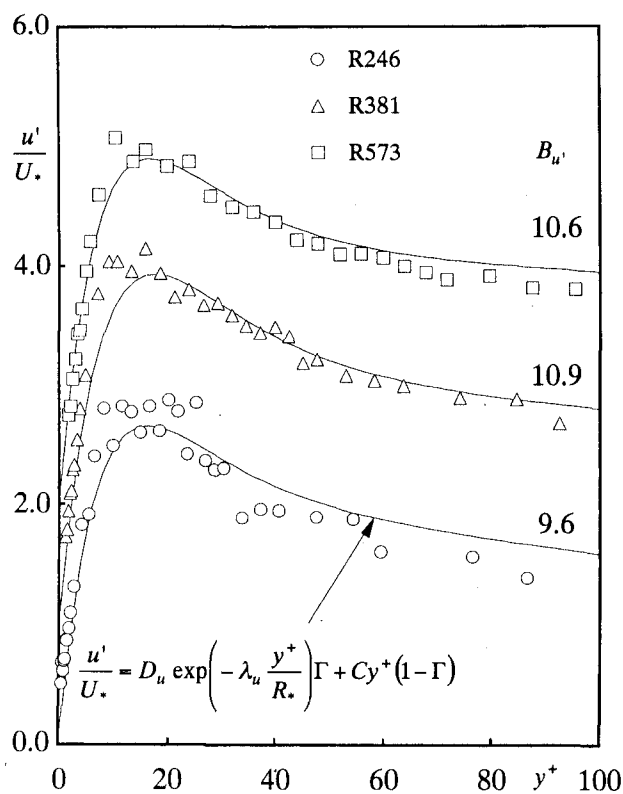


図-5 流下方向乱れ強度分布

(2) 流下方向乱れ特性

図-4は粘性底層 $0 < y^+ \leq 5$ における流下方向乱れ強度分布 u'/U_* を示している。多少のばらつきはあるが、ほぼ線形な分布となっている。そこで、実測値を式(11)に当てはめて最小自乗法により C を求めた。R246, R381, R573の C はそれぞれ0.31, 0.34, 0.35であった。

図-5は内層表示された流下方向乱れ強度分布を示している。 $5 < y^+ \leq 40$ における実測値を式(10)に当てはめて、最小自乗法によりダンピング係数 B_u を求め

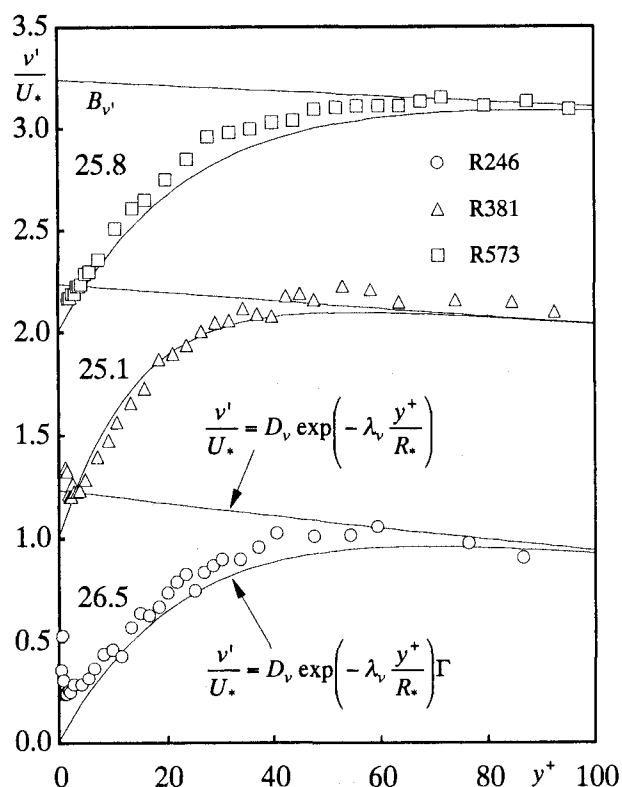


図-6 鉛直方向乱れ強度分布

た。求めた B_u による式(10)を図-5に示しているが、良好に実測値を表現しているといえる。

(3) 鉛直方向乱れ特性

粘性底層及びバッファ層における流下方向乱れ強度はNezu & Rodi¹⁾によって測定され、式(10)および式(11)によって表現できることが示されているが、鉛直方向乱れ強度に関しては、その実験結果および経験式が明らかにされていない。そこで、以下に鉛直方向乱れ強度の実測値を示し、さらに、その分布を表現できる経験式を提案する。

図-6は内層表示された鉛直方向乱れ強度の分布を示している。図中における右下がりの曲線は、瀬津²⁾によって提唱され、さらにNezu & Rodi¹⁾によってその係数値が高精度に求められた鉛直方向乱れ強度分布式(9)である。バッファ層よりも離れた領域における鉛直方向乱れ強度の実測値は、ほぼ式(9)に適合しているが、壁面に近づくに従い式(9)より減少している。これは、壁面の存在により鉛直方向の乱れが抑制されるためで、従来境界層流の測定においては認められていたものである。極めて底面付近では逆に増加しているが、これは測定の限界を示したものか流速の取り込み設定が悪いものか現段階では判断しかねる。今後の課題としたい。また、流下方向乱れ強度が壁面付近($y^+ \approx 17$)でピーク値を示すのに対し、鉛直方向乱れ強度はピーク値を示さず、底面からなだらかに上昇していく。このように、壁面付近における鉛直方向乱れ強度は式(9)よりダンピングするため、次式を提案する。

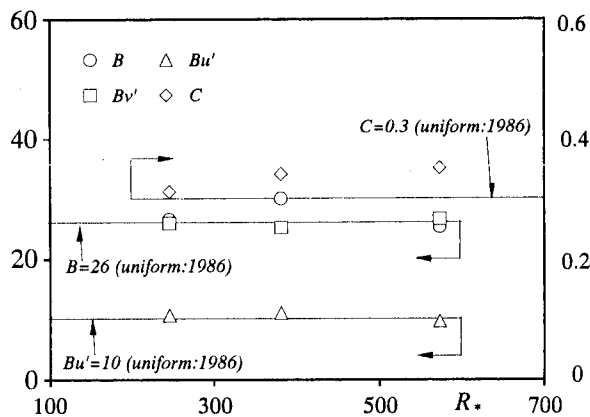


図-7 内層の水理特性量に及ぼすReynolds数による影響

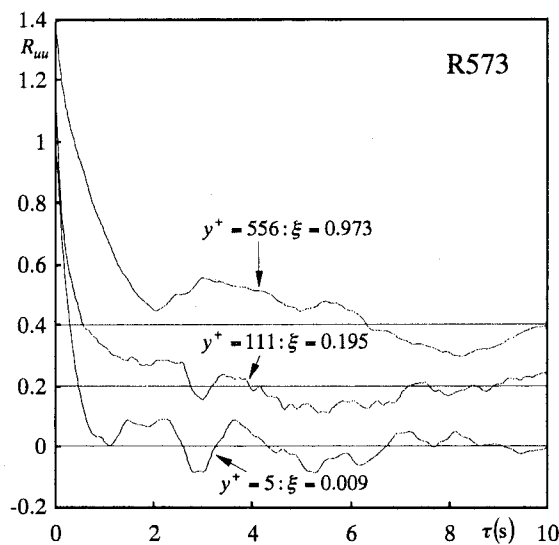


図-8 自己相関係数

$$\frac{v'}{U_*} = D_v \exp\left(-\lambda_v \frac{y^+}{R_*}\right) \Gamma \quad (12)$$

ダンピング関数 Γ は式(4)と同様な形式であり、ダンピング係数を B_v とする。

そこで、最小自乗法を用いて式(12)よりダンピング係数 B_v を求めた。式(12)を図-6に示しているが、良好に実測値を表現しているといえる。また、ダンピング係数 B_v は、R246, R381, R573においてそれぞれ25.2, 29.9, 26.4であり、主流速分布におけるダンピング係数 B とほぼ同一になる。

(4) 粘性底層およびバッファ層に及ぼす Reynolds 数の影響

粘性底層およびバッファ層における特性を表すものとして、主流速分布におけるダンピング係数 B 、流下方向および鉛直方向乱れ強度のダンピング係数 B_u' 、 B_v' および粘性底層における流下方向乱れ強度の傾き C である。図-7はReynolds数に対する B 、 B_u' 、 B_v' および C の挙動を示したものである。これらの諸量のReynolds数への依存性は認められない。また、

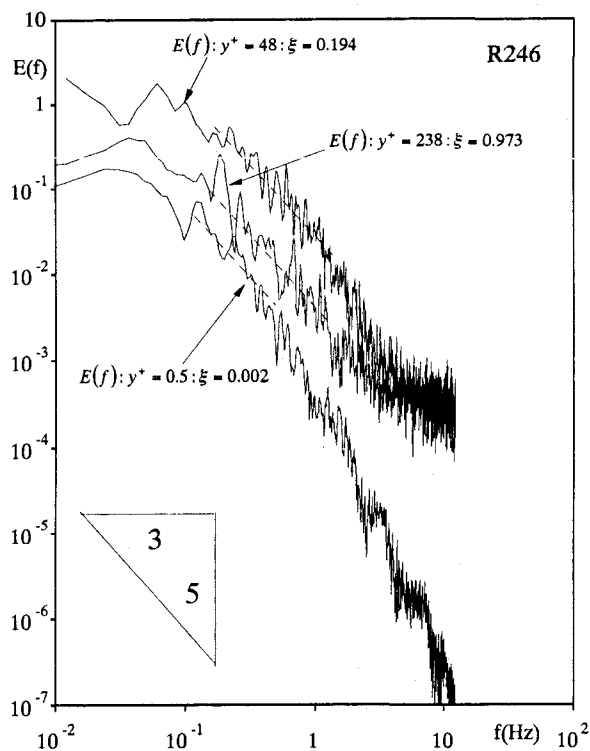


図-9 スペクトル分布

B 、 B_u' 、 B_v' および C はNezu & Rodi¹⁾によって提唱されている値とほぼ一致している。本研究で提案された式(12)に用いられる B_v' に関しては、今後Reynoldsを広範囲に変化させてその挙動を調べる必要がある。

(5) 自己相関係数

自己相関係数 R は平均量からの変動成分を q 、ラグタイムを τ とすると、次式で示される。

$$R(\tau) = \overline{q(t) \times q(t+\tau)} / \overline{q(t)^2} \quad (13)$$

図-8はR573における流下方向乱れ変動成分の自己相関係数 R_{uu} を示している。図中には、粘性底層領域、log則領域およびwake領域における例を示しているが、壁面から離れるに従い、自己相関係数がゼロと交わる時間が徐々に増加しており、また、その周期も長くなっていることから、乱流スケールが増加していることが伺える。

(6) スペクトル分布特性

一般に、buffer層、log則領域およびwake領域において、慣性小領域でKolmogoroffの-5/3乗則が成立することは明らかにされているが、開水路流の粘性底層におけるスペクトル分布特性については、現在のところ不明である。図-9はR246における粘性底層、log則領域およびwake領域における u' のスペクトル分布を実線で示したものである。それぞれの点においてスペクトルの傾きが-5/3を示す慣性小領域が存在するようである。ただし、図中に点線で示すように、粘性底層における慣性小領域の範囲はlog則領域

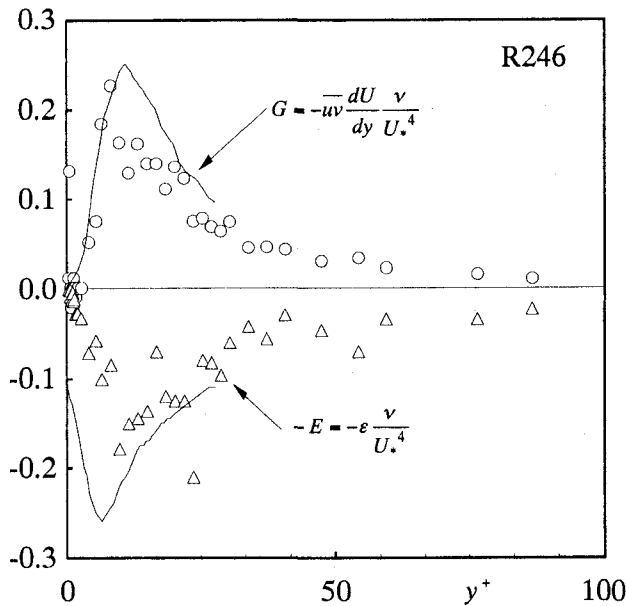


図-10 内層表示によるエネルギー収支

や wake 領域のものよりも狭いことが観察される。これは、粘性による影響が卓越しているため、慣性小領域よりも粘性領域が広いことを意味する。成立範囲には違いがあるものの log 則領域および wake 領域のみならず、粘性底層のスペクトル分布についても慣性小領域において次式の Kolmogoroff の -5/3 乗則が成立すると思われる。

$$E(f) = \frac{A_s}{(2\pi)^{2/3}} U^{2/3} \varepsilon^{2/3} f^{-5/3} \quad (14)$$

ここに、 $A_s = 0.50$ は Kolmogoroff 定数である。なお、 v' のスペクトルについても同様に慣性小領域で -5/3 乗則が認められた。

(7) エネルギー収支

2次元開水路等流における乱れエネルギー収支は、圧力の変動成分を p 、横断方向乱れ変動成分を w 、散逸率を ε とすると、次式で示される。

$$0 = -\overline{uv} \frac{dU}{dy} - \frac{d}{dy} \left\{ v \left(k + \frac{p}{\rho} \right) \right\} - v \frac{d^2 \bar{k}}{dy^2} - \varepsilon \quad (15)$$

$$k = \frac{1}{2} (u'^2 + v'^2 + w'^2) \quad (16)$$

右辺第1項は乱れの生成項、第2項は乱流拡散項、第3項は粘性拡散項、第4項は粘性散逸項である。開水路流において、外層表示によるエネルギー収支に関しては瀬津²⁾によって詳細に検討されているが、内部表示される粘性底層およびバッファ層に関しては明らかにされていなかった。

先述したように、開水路流における粘性底層およびバッファ層においても式(14)が成立することが示されたので、 u' のスペクトルと式(14)より散逸率 ε を求めることができる。図-10は u'^4/v で無次元化された乱れの生成率および散逸率を示したもので、実線はLaufer⁶⁾によって得られた円管流における値であ

る。実測値は多少ばらついているが、 $y^+ = 10 \sim 15$ 付近で乱れの生成率及び散逸率が最大をとることがわかる。また、実測された散逸率はやや小さい値を示している。これは、底面付近では乱れの異方向性が強まるにも関わらず、散逸率を u' のみから算出したことが原因として考えられる。本研究では u' および v' しか計測しておらず、今後 w' の計測をする必要があろう。しかし、大略的には本実験結果はLaufer⁶⁾による円管流の結果と一致する。これは、開水路流と管路流の内層が普遍性を持っていることを示している。

5. おわりに

2次元開水路等流の粘性底層、バッファ層、log 則領域およびwake領域を高精度に測定した結果、以下のような結論が得られた。

- (1) 粘性底層およびlog則の主流速分布から求められる摩擦速度は良好に一致し、従来より用いられてきたlog則による摩擦速度の評価が妥当であることが証明された。
- (2) 粘性底層およびバッファ層における鉛直方向乱れ強度分布が新たに提案された。この提案式に含まれる van Driest のダンピング係数 B_v はおよそ26である。
- (3) 主流速分布および流下方向乱れ強度における van Driest のダンピング係数 B および B_w 、粘性底層における流下方向乱れ強度の勾配 C は Reynolds 数に依存せずそれぞれ26, 10, 0.3を示す。
- (4) 粘性底層のスペクトル分布においても、慣性小領域でKolmogoroffの-5/3乗則が成立する。
- (5) 粘性底層及びバッファ層におけるエネルギー収支は管路流におけるものと同様な分布となる。

謝辞：本研究を行うに当たり、(社)近畿建設協会による助成を受けた。ここに、謝意を表する。

参考文献

- 1) Nezu, I. and Rodi, W.: Open-channel flow measurements with a laser Doppler anemometer, *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol.112, No.5, May, pp.335-355, 1986.
- 2) 瀬津家久：開水路流の乱流構造に関する基礎的研究，京都大学博士論文，1977.
- 3) Heisenberg, W.: On the theory of statistical and isotropic turbulence, *Proc. Roy. Soc., Ser. A*, Vol.195, 1948.
- 4) 椿 東一郎・小松利光：成層密度噴流における乱れおよび密度変動のスペクトル特性，土木学会論文報告集，No.268, 1977.
- 5) Nezu, I. & Nakagawa, H.: *Turbulence in Open-Channel Flows*, IAHR-Monograph, Balkema, Rotterdam, 1993.
- 6) Laufer, J.: The structure of turbulence in fully developed pipe flow. *NACA tech. Rep. No.1174*, 1955.

(1997.9.30受付)