

地下水を含む地盤振動の数値解析

NUMERICAL ANALYSIS OF SEISMIC MOTION WITH GROUND WATER EFFECTS

中山昭彦¹・横山陽子²・武本哲也³

Akihiko NAKAYAMA, Yoko YOKOYAMA and Testuya TAKEMOTO

¹正会員 PhD 神戸大学 大学院自然科学研究科 (〒657 神戸市灘区六甲台1-1)

²住宅都市整備公団 (〒192 東京都八王子市)

³尼崎市役所 (〒660 尼崎市)

Numerical calculation procedure for the motion of ground water during the seismic motion has been developed. It is based on the theory that assumes the ground as a composite body consisting of an elastic porous solid and compressible water filling the pore. One dimensional analysis is first made to validate the computational procedure, then the method is applied to compute the more realistic situation of two-dimensional field with ground plane and the water table. The results show two compression waves and shear waves and details of the ground water movement due to these waves and the interaction of the incident waves and those reflected off ground are seen.

Key Words: seismic wave, ground water, finite difference, compression wave, saturated ground

1. はじめに

地震などの地盤の振動は地下水の存在に大きく影響される。土粒子骨格のみの地盤の場合、いわゆる圧縮膨張波の縦波とせん断応力による横波しか存在しないが、地下水が存在すれば、流体内を高速に伝播する波が発生したり、間隙水、固体骨格間の相互作用により複雑な運動になる。Biot¹⁾は飽和地盤を弾性体と流体の複合体と見なし、その間にDarcyの法則に基づく抵抗力が働くとした理論を提し、その後実験、数値計算などでその妥当性が確かめられている。しかしこれまでになされている解析、計算例は、一次元柱内での圧縮波の伝播や、数ミリ秒の伝達時間や数センチの伝達距離などで、実際の地震振動に応用するには、数kmに渡る3次元振動場、地下水、地表面の影響などの考慮がなされてなくてはならない。本研究では地表面を上限境界とする半無限2次元場で、地中の任意の点、または領域を強制振動させた時の、地盤と間隙水の運動を明らかにする模擬数値計算手法を開発するのが目的である。地盤は一様等方とするが、地下水面が任意の位置にあ

ることを許す計算法で、実際の地震振動場の解析に近い条件を想定しているが、間隙水圧により、固体骨格の特性が変わる、液状化現象等は考慮にいれない。

Biot¹⁾の理論式は線形であるので幾つかの解析法による解は可能で、単純な条件で解が得られている(例えばGarg et al.²⁾, Deresiewicz et al.³⁾, Gajo and Mongiovi⁴⁾)。しかしこれらは特殊な場合で、定性的伝播特性等を調べるには良いが、任意境界などでの実用計算に向いていない。これに対し数値計算は柔軟性があり、特に有限要素法でいろいろな場合について解が得られている(Zienkiewicz et al.⁵⁾)。しかし、Biot¹⁾の式は双曲型で不連続性あるいは急激な変化を許すので実時間、実空間での数値積分には注意を要する。このため特性曲線法が適しているが境界面などのある場合非常に複雑になり殆ど使われていない。有限差分法はあまり用いられていなかったが、近年圧縮性流体の運動方程式を解くための高解像度法が開発され、衝撃波などの局所急変で平滑化されることなく、振動を許さず精度良く安定に解く数値計算スキームが開発されている。

本研究では予測子・修正子法であるMacCormack法⁶⁾を用いた。まず数値計算の妥当性、精度を検証するため、これまで解析解や数値解の求められている一次元振動場での計算を行った後、地表面の影響を受ける2次元場での数値計算を行い、地震動の伝播などの解析など実際の応用の可能性を検討した。

2. 飽和地盤の基礎運動方程式

$(v_x^{(s)}, v_y^{(s)}), (v_x^{(f)}, v_y^{(f)})$ を地盤固体骨格、及び間隙水の (x, y) 方向の変位速度とすると、Biot¹⁾の理論によれば、固体骨格、間隙水の運動方程式は

$$\rho^{(s)} \frac{\partial v_x^{(s)}}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} - D(v_x^{(s)} - v_x^{(f)}) \quad (1)$$

$$\rho^{(s)} \frac{\partial v_y^{(s)}}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} - D(v_y^{(s)} - v_y^{(f)}) - \rho^{(s)} g \quad (2)$$

$$\rho^{(f)} \frac{\partial v_x^{(f)}}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + D(v_x^{(s)} - v_x^{(f)}) \quad (3)$$

$$\rho^{(f)} \frac{\partial v_y^{(f)}}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} + D(v_y^{(s)} - v_y^{(f)}) - \rho^{(f)} g \quad (4)$$

で与えられる。ここで $\rho^{(s)}, \rho^{(f)}$ はそれぞれ地盤単位体積当りの固体骨格と、間隙水の質量（有効密度）、 $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$ は固体骨格に働く応力成分、 p は間隙水の圧力、 g は重力の加速度、 D は固体、流体の相対速度による摩擦応力係数で、 μ を流体の粘性係数、 $1-n_o$ を有効間隙率、 k を透水係数とすると

$$D = \frac{\mu(1-n_o)^2}{k} \quad (5)$$

である。固体に働く応力は、弾性体と流体の複合体の構成式より、弾性体骨格の変位 $(u_x^{(s)}, u_y^{(s)})$ 、流体の変位 $(u_x^{(f)}, u_y^{(f)})$ で

$$\sigma_{xx} = (a-2\mu_p) \left(\frac{\partial u_x^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial u_y^{(s)}}{\partial y} \right) + 2\mu_p \frac{\partial u_x^{(s)}}{\partial x} + c \left(\frac{\partial u_x^{(f)}}{\partial x} + \frac{\partial u_y^{(f)}}{\partial y} \right) \quad (6)$$

$$\sigma_{xy} = \mu_p \left(\frac{\partial u_x^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(s)}}{\partial x} \right) \quad (7)$$

$$\sigma_{yy} = (a-2\mu_p) \left(\frac{\partial u_x^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial u_y^{(s)}}{\partial y} \right) + 2\mu_p \frac{\partial u_y^{(s)}}{\partial y} + c \left(\frac{\partial u_x^{(f)}}{\partial x} + \frac{\partial u_y^{(f)}}{\partial y} \right) \quad (8)$$

と表わされ、流体圧力は

$$p = -c \left(\frac{\partial u_x^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial u_y^{(s)}}{\partial y} \right) - b \left(\frac{\partial u_x^{(f)}}{\partial x} + \frac{\partial u_y^{(f)}}{\partial y} \right) \quad (9)$$

で与えられる。ここで a, μ_p は複合体のラーメ定数で、

$$\begin{aligned} a &= n_o K_1 (1+b_1) \\ b &= (1-n_o-n_o b_2) K_2 \\ c &= n_o K_1 b_2 = -n_o K_2 b_1 \end{aligned} \quad (10)$$

である。 K_1, K_2 は間隙のない固体と流体の弾性係数で、

$$\begin{aligned} a_1 &= a/n_o K_1 - 1 \\ b_1 &= a_1 (1-n_o) [1-n_o-n_o (K_1/K_2) a_1]^{-1} \end{aligned} \quad (11)$$

である。これらの基礎式とその解の持つ意味は例えば Corapciouglu⁷⁾ 等に詳しく解説されている。まず2種類の膨張圧縮による疎密波（いわゆる縦波）が存在し、一つは流体を通して伝播するもので、他の一つは弾性体を通して伝播するものである。この二つの波は固体と流体の運動によって生ずる連性効果を受けるのみならず、その系をなす固体と流体の合成の影響も受ける。いわゆる横波である回転波は2次元または3次元振動場で発生し得るが、だた一つのみである。これは、弾性体には発生するがDarcy 則に従う流体には発生しないせん断力によるもので、その伝播は固体、流体の連性運動に影響を受けない。なお上記の式では北村、庄⁸⁾により無視しても良いとされる固体と流体の慣性力の相互作用による質量連性は無視してある。

初期条件には変位と速度が与えられているとする。境界条件は固定境界で全ての変位がゼロ、自由境界 $y=\text{Const.}$ では固体骨格及び間隙水の境界面に働く応力がゼロであるので

$$\sigma_{xy} = \mu_p \left(\frac{\partial u_x^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(s)}}{\partial x} \right) = 0 \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= (a-2\mu_p) \left(\frac{\partial u_x^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial u_y^{(s)}}{\partial y} \right) + 2\mu_p \frac{\partial u_y^{(s)}}{\partial y} \\ &\quad + c \left(\frac{\partial u_x^{(f)}}{\partial x} + \frac{\partial u_y^{(f)}}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$p = -c \left(\frac{\partial u_x^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial u_y^{(s)}}{\partial y} \right) - b \left(\frac{\partial u_x^{(f)}}{\partial x} + \frac{\partial u_y^{(f)}}{\partial y} \right) = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial u_x^{(f)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(f)}}{\partial x} = 0 \quad (15)$$

である。式(15)、は相互作用の項が小さい時、式(3),(4)の解は自動的に満たしている。式(14)を(12)に代入すると固体骨格の変位 $u_x^{(s)}$, $u_y^{(s)}$ のみの式

$$(a - 2\mu_p - \frac{c^2}{b}) \left(\frac{\partial u_x^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial u_y^{(s)}}{\partial y} \right) + 2\mu_p \frac{\partial u_y^{(s)}}{\partial y} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial u_x^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(s)}}{\partial x} = 0 \quad (17)$$

に変換できる。さらにこれらより x, y についての偏微分をとり $u_y^{(s)}$ を消去すれば $u_x^{(s)}$ のみの式、あるいは $u_x^{(s)}$ を消去すれば $u_y^{(s)}$ のみの式を得る事が出来る。 $u_y^{(f)}$, $u_y^{(s)}$ はこれらが求まればそれを用いて表す事が出来る。

3. 数値計算法

上に示した方程式を等間隔直交格子 x 上 (x 方向の間隔 Δx , y 方向の間隔 Δy) で、2次精度の差分法である MacCormack 法にて離散化する。 $v_x^{(s)}$, $v_y^{(s)}$, $v_x^{(f)}$, $v_y^{(f)}$ のいずれかを $v(x, y, t)$ とし、その $x=x_i=i\Delta x$, $y=y_j=j\Delta y$, $t=t^n=n\Delta t$ での値を v_{ij}^n とすると、第一段階の予測子 v_{ij}^* は

$$v_{ij}^* = v_{ij}^n + \frac{\Delta t}{\rho} F_{i+1/2, j+1/2}^n \quad (18)$$

で与えられ、修正子 v_{ij}^{n+1} は

$$v_{ij}^{n+1} = \frac{1}{2}(v_{ij}^n + v_{ij}^*) + \frac{\Delta t}{2\rho} F_{i-1/2, j-1/2}^* \quad (19)$$

で与えられる。ここで $F_{i+1/2, j+1/2}^n$ は式(1)-(4)の右辺の離散化値で、例えば $v_x^{(s)}$ についての式(1)の場合

$$F_{i+1/2, j+1/2}^n = \frac{\sigma_{xxi+1, j}^n - \sigma_{xxi, j}^n}{\Delta x} + \frac{\sigma_{xyi, j+1}^n - \sigma_{xyi, j}^n}{\Delta y} - D \left(\frac{v_{xij}^{(s)n} + v_{xi+1, j}^{(s)n}}{2} - \frac{v_{xij}^{(f)n} + v_{xi, j+1}^{(f)n}}{2} \right) \quad (20)$$

で、 $F_{i-1/2, j-1/2}^*$ は

$$F_{i-1/2, j-1/2}^* = \frac{\sigma_{xxi, j}^* - \sigma_{xxi-1, j}^*}{\Delta x} + \frac{\sigma_{xyi, j-1}^* - \sigma_{xyi, j}^*}{\Delta y} - D \left(\frac{v_{xij}^{(s)*} + v_{xi-1, j-1}^{(s)*}}{2} - \frac{v_{xij}^{(f)*} + v_{xi, j-1}^{(f)*}}{2} \right) \quad (21)$$

で、 σ^* 等は

$$u_{xij}^* = u_{xij}^n + \Delta t v_{xij}^n \quad (22)$$

より求めた応力である。

固定境界での境界値はこれらの式のみに組み込まれるが、地表面境界では式(14),(15)を離散化し、境界面上の $u_x^{(s)}$ 、及び $u_y^{(s)}$ について解いた上で、 $u_x^{(f)}$, $u_y^{(f)}$ を求める。その際領域内部点での値が既に計算されているので境界上の点の値のみの連立方程式に書く事が出来る。

4. 1次元振動場での検証

上記の運動方程式は当然 y 方向に変化のない1次元場に適用出来る。Garg et al.²⁾ は1次元柱状地盤の一端が $t=0$ で瞬間的に一定の速度で動きだす時の振動の伝播を解析しているの、同じ条件で本計算法を適用し検証する。Garg et al. の用いた各定数の数値は

$$n_0 = 0.82$$

$$\rho_0^{(s)} = 2.18 \text{ g/cm}^3, \quad \rho_0^{(f)} = 0.18 \text{ g/cm}^3$$

$$K_1 = 0.36 \times 10^{12} \text{ dyn/cm}^2, \quad K_2 = 0.22 \times 10^{11} \text{ dyn/cm}^2$$

$$a=K=0.118 \times 10^{12} \text{ dyn/cm}^2, \quad \mu_p = 0.99 \times 10^{11} \text{ dyn/cm}^2$$

で、 D の値は 0.219×10^2 , 0.219×10^4 , 0.219×10^8 $\text{g/cm}^3 \text{sec}$ の3ケースについて計算している。固体と流体の速度の時間変動の結果を出している。本計算では、そのうち粘性抵抗による連性効果の低い $D=0.219 \times 10^2 \text{ g/cm}^3 \text{sec}$ と連性効果のある $D=0.219 \times 10^4 \text{ g/cm}^3 \text{sec}$ とについて詳しく比較した。これらは透水係数 $k=10^{-5}$ 及び 10^{-8} cm/sec に相当し、砂岩から頁岩などの透水性の低い岩に相当する。1次元では、いわゆる縦波である膨張圧縮波のみしか存在しないが、間隙水を伝わる第1種波と固体粒子を伝わる第2種波の伝播状況の計算結果を比べる事が可能である。

図-1と図-2に $D=0.219 \times 10^2 \text{ g/cm}^3 \text{sec}$ の場合の間隙水の速度と固体骨格の $x=10 \text{ cm}$ での値の本計算結果と Garg et al.²⁾ の結果を共に示す。Garg et al. の解析解は $D=0$ の極限の近似で、固体、流体の相互作用がなく波形は段階的変化しか表せない。Garg et al. の数値計算結果と本計算結果は良く一致しており、本計算の妥当性を示唆している。

図-3と図-4は $D=0.219 \times 10^4 \text{ g/cm}^3 \text{sec}$ の場合の同様の比較図である。Garg et al. 及び本数値計算結果はラプラス数値逆変換に表れている波先端の急激変化は正確に捉えられていないものの、第1種、第2種波の間の緩増加などの特性はよく再現している。

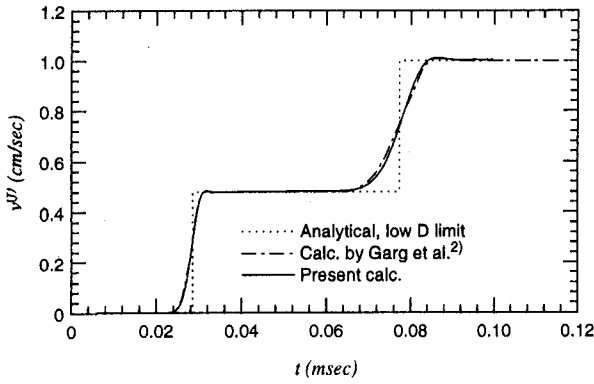


図-1 $x=10\text{cm}$ での間隙水の速度, $D=0.219 \times 10^2 \text{g/cm}^3 \text{sec}$.

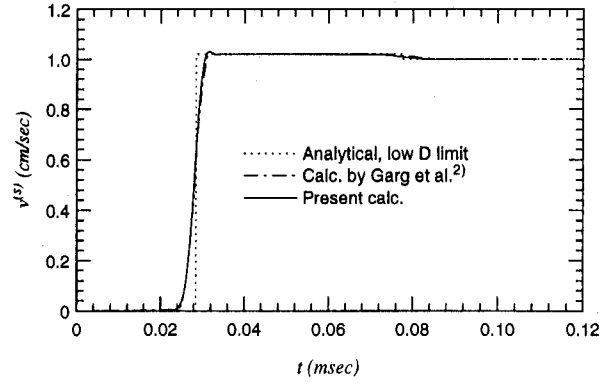


図-2 $x=10\text{cm}$ での固体骨格の速度, $D=0.219 \times 10^2 \text{g/cm}^3 \text{sec}$.

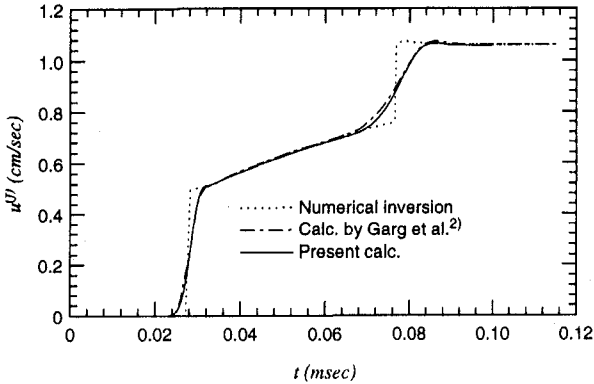


図-3 $x=10\text{cm}$ での間隙水の速度, $D=0.219 \times 10^4 \text{g/cm}^3 \text{sec}$.

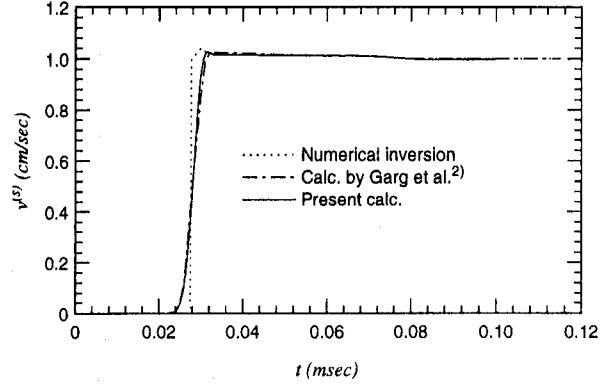


図-4 $x=10\text{cm}$ での固体骨格の速度, $D=0.219 \times 10^4 \text{g/cm}^3 \text{sec}$.

5. 2次元場での振動伝播

(1) 1 計算領域と計算ケース

図-7は計算領域と震源と位置を示す。震源の深さを $H=1000\text{m}$ とし、計算領域は $4H < x < 4H$, $-5H < y < 0$ の長方形にとってある。左右の境界 ($x=\pm L=\pm 4H$) 及び下端の境界 ($y=-5H$) は固定とし、 $y=0$ は地表面とした。計算領域は 200×125 の様な間隔の直交格子で分割した。震源では単一1周期余弦波パルスの強制振動

$$\begin{aligned} v_x^{(s)}(0,0,t) &= v_x^{(f)}(0,0,t) \\ &= A \left[\sin\left(2\pi \frac{t}{t_p} - \frac{\pi}{2}\right) + 1 \right], \quad 0 < t < t_p \quad (23) \\ v_x^{(s)}(0,0,t) &= v_x^{(f)}(0,0,t) = 0, \quad t_p < t \\ v_y^{(s)}(0,0,t) &= v_y^{(f)}(0,0,t) = 0 \end{aligned}$$

を与えた。周期 $t_p=0.1\text{sec}$ で振幅は $A=1\text{cm/sec}$ とした。

(2) 計算結果

図-6 に固体骨格の変位を、変形した格子で示してある。図-7は変位速度ベクトルの計算結果で、上からそれぞれ $t=0.25, 0.4, 0.6, 1.0\text{sec}$ の結果である。 $t=0.6, 1.0\text{sec}$ の速度ベクトルのスケールは $t=0.25, 0.4\text{sec}$ の倍にとってある。図-8 は間隙水の

変位速度、図-9は間隙水の圧力の時間変化を等力線で示す。何れの場合も図を見易くするため、計算格子の半数の位置のみプロットしてある。固体骨格の振動には2つの波が見え、それらが地表面に到達すると反射、屈折したものと元の波と干渉し複雑な動きになっている。間隙水の方も2つ波があるが第2波の後複雑な動きが見られる。これらの2つの波のうちの伝播速度の速い方は固体骨格と間隙水の伝播速度が一致している。双方とも動きは伝播の方向と一致しているが、振幅は震源の動きである水平方向が最も大きく、その直角方向である震源の上下方向では殆ど動きが無い。従ってこれは縦波で、1次元の時の間隙水を伝える第1種疎密波とその連性効果と考えられる。第2波の方は固体骨格の方に強く見

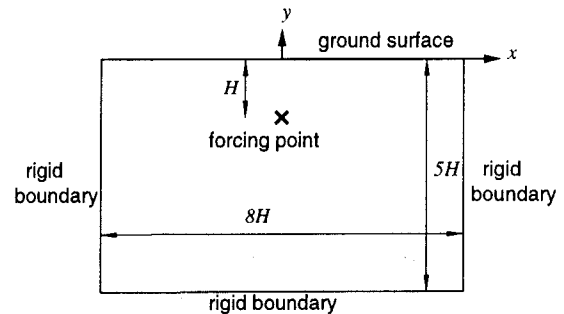


図-5 2次元計算領域

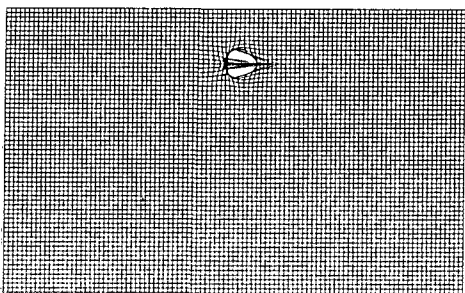
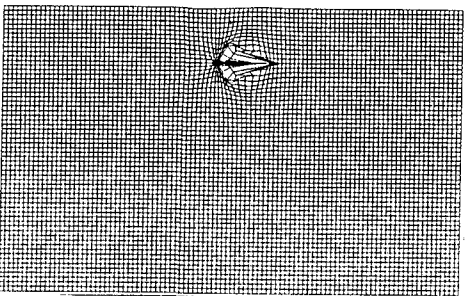
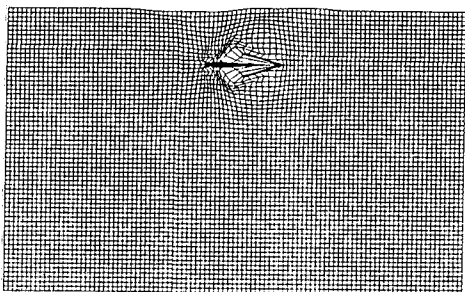
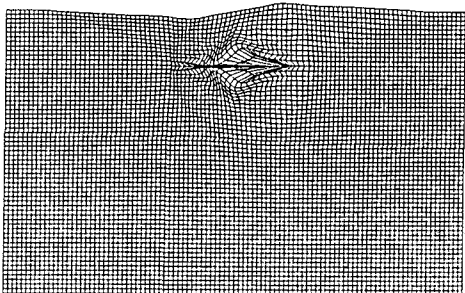
(a) $t=0.25 \text{ sec}$ (b) $t=0.40 \text{ sec}$ (c) $t=0.60 \text{ sec}$ (d) $t=1.0 \text{ sec}$ 

図-6 固体骨格の変位

られ、間隙水の方の伝播速度はさらに遅い。固体骨格を伝わる第2波では、震源の動きである水平方向の動きが主で、振幅は動きの直角方向である上下方向で最も大きい。これは膨張圧縮波のみならずせん断成分も含まれていると見られる。第2波の通った後の間隙水の複雑な動きは固体のせん断運動の摩擦による連性効果と見られる。

6. おわりに

地表面を有する半無限2次元飽和地盤内の地下水の運動を Biot の理論に基づき高解像差分法 MacCormack法を用い数値解析した。計算例は地表

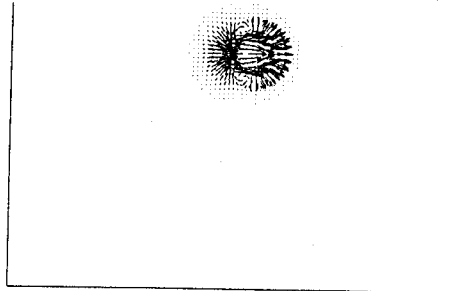
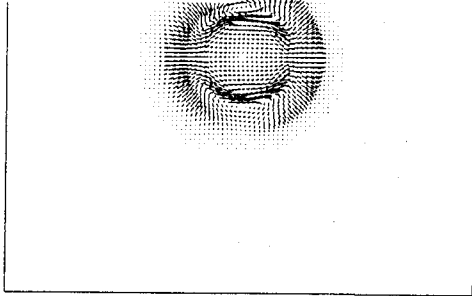
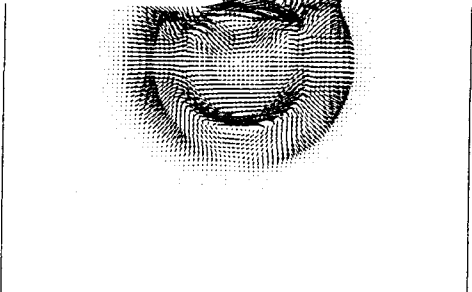
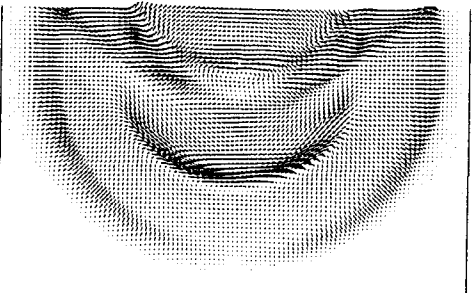
(a) $t=0.25 \text{ sec}$ (b) $t=0.40 \text{ sec}$ (c) $t=0.60 \text{ sec}$ (d) $t=1.00 \text{ sec}$ 

図-7 固体骨格の変位速度ベクトル

下の震源点でパルス状一方向振動速度を強制的に与えた。2種の疎密波の発生が確かめられ、これらの伝播速度は地表面に到達するまでは振動の方向、伝播の方向に因らずほぼ一定である事が分かった。間隙水を伝わる第1種波は圧縮波であるので振動方向に最も大きく振動方向に直角の方向ではほぼゼロになっている。第2種波は膨張圧縮による縦波と、せん断による横波両方の成分が混在し同じ速度で伝播する。地表面の影響は2種の圧縮波とせん断波により動いた地表水面が重力により振動するような動きになっている。本計算法は一般的な境界のある実用計算に応用出来るであろう。

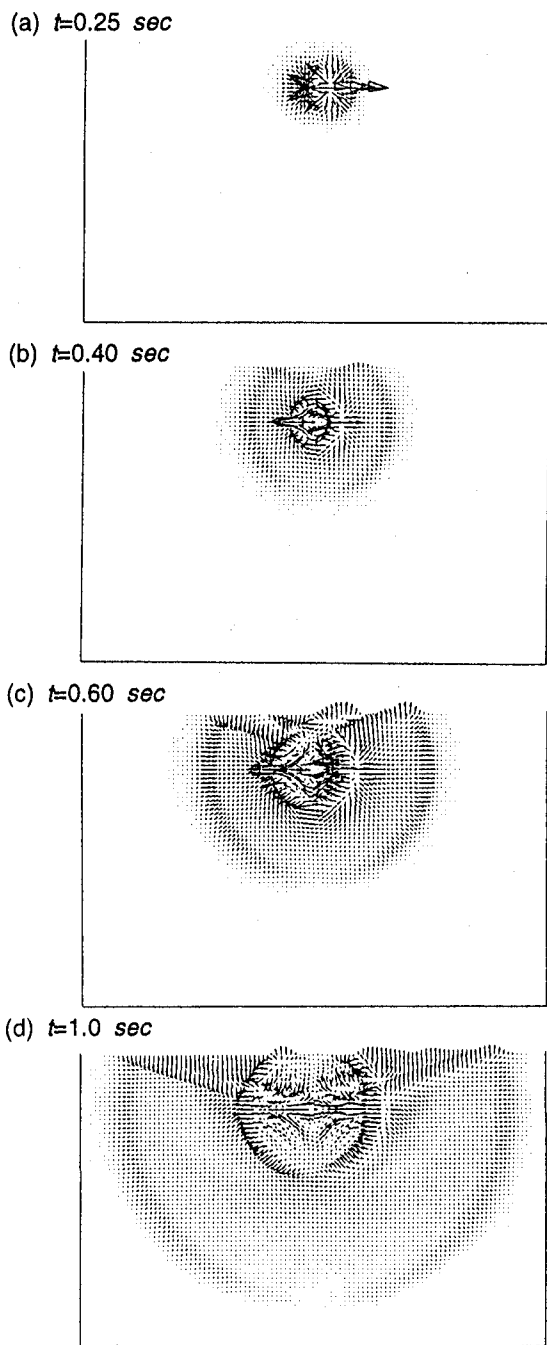


図-8 間隙水の変位速度ベクトル

参考文献

- 1) Biot, M.A.: Theory of propagaion of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range, *J. Acoustical Society of America*, Vol.28, No.2, 1956.
- 2) Garg, S.K., Adnan, H. Nayfeh, H. and Good, A.J.: Compressional waves in fluid-saturated elastic porous media, *J. Applied Physics*, Vol. 45, No.5, 1974.
- 3) Deresiewicz, H. and Levy, A.: The effects of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid, *Bull. Seism. Soc. Am.* Vol. 57, pp. 381-391, 1967.
- 4) Gajo, A. and Mongiovi, L.: Analytical Solution for the Transient Response of Saturated Linear Elastic Media, *Int. J. for Numer. and Anal. Methods Geomech.*, Vol.

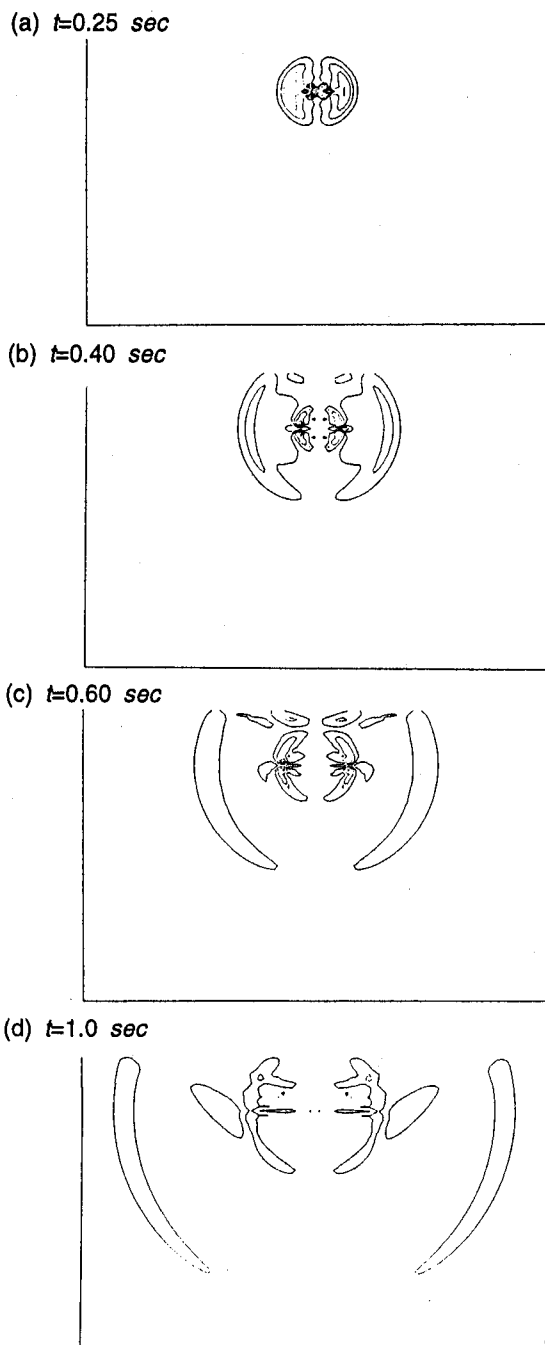


図-9 間隙水圧、等圧線間隔、 $\Delta p=1000Pa$

- 19, pp. 399-413, 1995.
- 5) Zienkiewicz, O.C. and Shiomi, T.: Dynamic behaviour of saturated porous media. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.* Vol.8, pp. 71-96, 1984.
- 6) Hoffman, K.A.: Computational Fluid Dynamics for Engineers. Eng. Education System, Austin, 1989.
- 7) Corapcioglu, M. Y.: Wave Propagation in Porous Media - A review, *Transport Processes in Porous Media*. pp. 375-422, Kluwer Academic Pub., 1993.
- 8) 北村泰寿、庄健介: Biotの理論に基づく半無限多孔質飽和弾性体の表面加振解、神戸大学工学部土地造成工学研究施設報告、第6号、pp. 91-106, 1988.
(1997.9.30受付)