

台形断面水路に設置された 横越流堰の流量式と係数

DISCHARGE FORMULA AND COEFFICIENT OF SIDE-WEIRS IN A TRAPEZOIDAL MAIN CHANNEL

浦 勝¹・小野 博基²・秋山 壽一郎³・坂本 真⁴

Masaru URA, Hiroki ONO, Juichiro AKIYAMA and Shin SAKAMOTO

¹正会員 工博 九州工業大学教授 工学部建設社会工学科 (〒804 北九州市戸畑区仙水町1番1号)

²学生員 九州工業大学大学院 工学研究科博士前期課程 (同上)

³正会員 Ph.D. 九州工業大学助教授 工学部建設社会工学科 (同上)

⁴正会員 修(工) 鹿島建設株式会社

Flow discharge over side-weirs in rectangular channels derived by the De Marchi equation and discharge coefficient for the flow has been estimated through many experimental investigations. In this study the discharge coefficient for the discharge over the side-weir along the main channel with side slope of 1 to m is obtained from experimentally and theoretically. An empirical formula of discharge coefficient for the considering flow is proposed as functions of Froude number and side slope of the main channel for the range of $F_1=0.3\sim0.8$ and $m=0\sim0.7$.

Key Words : side-weir, discharge coefficient, trapezoidal main channel, side slope

1. はじめに

近年、都市河川における洪水対策の一つとして横越流堰を用いて洪水調節池にピーク流量を貯留し、下流側の河道断面不足を補う方法が採用されはじめている。この方法は、河道に沿う地域が高度に開発され、河道改修は困難であるが、河道付近に公園・グラウンド等があり、その地下を貯留池として利用可能である場合に用いられる。横越流堰を採用する理由は、人為的操作を必要としないという最大のメリットがあるため、河川の利用に伴う災害の発生を低コストで防止する重要な施設であるとともに、衛生工学、灌漑工学など様々な分野でも用いられている。

横越流堰について、最初に合理的な研究を行ったのはDe Marchi¹⁾である。De Marchiは、水路に沿って比エネルギーが一定であると仮定した上で、横越流堰からの越流量を求める流量公式を導いた。しかし、当初この流量公式はその中に含まれる流量係数 C_M の変化についての情報が十分に得られていなかったため、結果的には信頼性に欠ける公式であった。

しかし、この流量公式が導かれて以降、多くの研究者がこの C_M に着目し、様々な面から研究を行っ

た。中川・宇民ら^{2),3)}は、 C_M が水路Froude数の関数であることを示している。またSubramanya & Awasthy⁴⁾は、次元解析によって主流のFroude数、相對堰長および相對水深が C_M の支配パラメータであるが、彼ら自身の実験結果から主流Froude数のみで C_M を表示しうること示している。このように、これまで横越流堰に関して多くの研究が行なわれてきたが、De Marchiの式は矩形断面水路という条件で導かれたものであり、 C_M に関する知見も、矩形断面水路で行われた実験より得られたものである。しかし、多くの都市河川は側壁が傾斜した、いわゆる台形断面を有する水路・河川である。従って、矩形断面という制約を受けるDe Marchiの式は、厳密には適用することができない。

本研究は、台形断面を有する水路に設置された横越流堰において成立する流量算定式を導き⁵⁾、その式を用いる場合の流量係数 C_M の特性を明らかにするために、側壁勾配 m を0から0.7まで変化させた台形断面水路において実験を行った。その結果、流量式中の流量係数 C_M は、側壁勾配 m と水路上流Froude数 F_1 の関数として定式化された。以下にその結果を述べる。

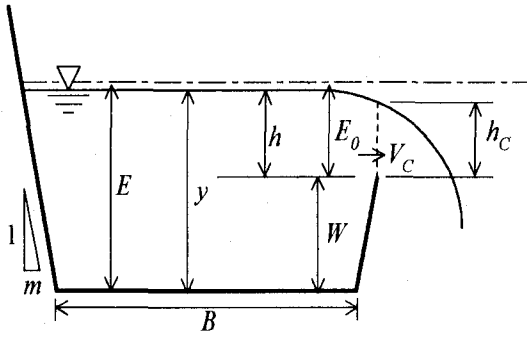


図-1 水路横断面図

2. 理論的考察

台形断面を有する水路の側壁にある横越流堰を考える。図-1において、 B は水路底面幅、 m は側壁勾配、 W は堰高、 y は水深である。今、比エネルギー E が水路に沿って一定であると仮定し¹⁾、台形水路であることを考慮すると、堰のある区間において次式が成立する。

$$E = y + \frac{Q^2}{2g(B+my)^2 y^2} = \text{const.} \quad (1)$$

$$-\frac{dQ}{dx} = q \quad (2)$$

ここに、 Q は水路流量、 x は水路に沿う距離、 q は横越流堰の単位長さあたりの越流量である。また図-1において、堰の頂点を基準として計った水深を h とすると堰頂点で限界水深 h_c が現れ、その断面平均流速を v_c とすると堰の頂点から計った比エネルギー E_0 は、

$$E_0 = h + \frac{v_a^2}{2g} = h_c + \frac{v_c^2}{2g} \quad (3)$$

と表せる。ここに v_a は接近流速である。ここで $Fr = v_c / \sqrt{gh_c} = 1$ を用いれば、次式を得る。

$$E_0 = h_c + \frac{gh_c}{2g} = \frac{3}{2} h_c \quad (4)$$

よって、横越流堰の単位長さあたりの越流量 q は、

$$q = h_c v_c = h_c \sqrt{gh_c} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} g E_0^{\frac{3}{2}} \quad (5)$$

である。また、 $E_0 = h$ とすることによる補正係数を C とおくことにより式(5)は次のようになる。

$$q = \frac{2}{3} C \sqrt{\frac{2}{3}} g h^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} C \sqrt{\frac{2}{3}} g (y-W)^{\frac{3}{2}} \quad (6)$$

式(6)において、新たに $C_M = C/\sqrt{3}$ と書き直し、流量係数 C_M を導入すると次式となる。

$$-\frac{dQ}{dx} = q = \frac{2}{3} C_M \sqrt{2g} (y-W)^{\frac{3}{2}} \quad (7)$$

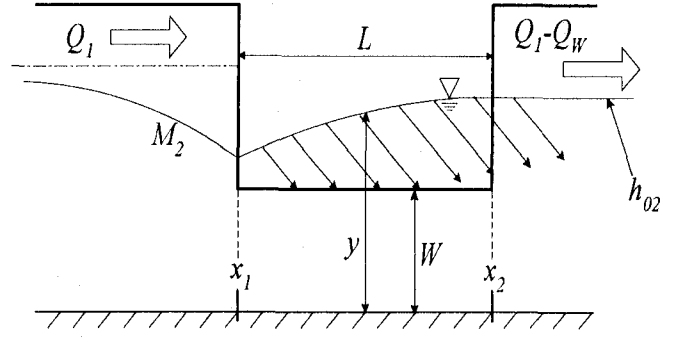


図-2 流水路（常流）

次に横越流堰のある区間の水面形を図-2のように表示して考える。横越流堰の上流端断面を1、下流端断面を2とし、横越流堰のある区間を検査空間とする。検査空間から単位時間に出ていく運動量成分が検査空間内の流体に及ぼす力の成分に等しくなるという運動量の定理を適用すると、一樣断面水路において横越流を伴う水面形方程式は次式のように表される⁹⁾。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \theta - \frac{Q^2}{C_0^2 R A^2} + \frac{\beta_0 Q q}{g A^2}}{\cos \theta - \frac{\beta_0 Q^2 B}{g A^3}} \quad (8)$$

ここに、 C_0 はChézyの定数、 R は径深、 A は流水断面積、 β_0 は運動量補正係数、 $\sin \theta$ は水路床勾配である。式(8)において水路床勾配と摩擦抵抗の影響は小さいとして無視すると、堰区間の水路に沿う水面形方程式は次式のように簡略化される。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q q y}{g B^2 y^3 - Q^2} \quad (9)$$

式(9)より流れが全領域で常流の場合には $dy/dx > 0$ 、つまり、流れ方向に水深が増加することがわかる。また、上流側流量を Q_1 、横越流堰の堰長を L とし、この堰からの全越流量を Q_w とすると、緩勾配水路においては下流側で等流水深に漸近する水面形は存在しないので、堰の末端流量 $Q_2 = (Q_1 - Q_w)$ に対応する等流水深 h_{02} で流れる。よって、水面形の概要は図-2に示すようになる。

また、式(1)を変形して次式を得る。

$$Q = Av = y(B+my)\sqrt{2g(E-y)} \quad (10)$$

式(10)および(7)を式(9)に代入することによって、水面形方程式は新たに次のように表される。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3} \frac{C_M}{(B+my)} \frac{\sqrt{(E-y)(y-W)^3}}{3y-2E} \quad (11)$$

ここで、流量係数 C_M は河道に沿う距離 x に対して独立であると仮定し、式(11)を次のように変形する。

$$\begin{aligned}
 dx &= \frac{3}{4} \frac{(B+my)}{C_M} \frac{3y-2E}{\sqrt{(E-y)}\sqrt{(y-W)}^3} dy \\
 &= \frac{3}{4} \frac{B}{C_M} \frac{3y-2E}{\sqrt{(E-y)}\sqrt{(y-W)}^3} dy \\
 &\quad + \frac{3}{4} \frac{m}{C_M} \frac{y(3y-2E)}{\sqrt{(E-y)}\sqrt{(y-W)}^3} dy \quad (12)
 \end{aligned}$$

式(12)の中で、右辺第1項は積分することによりDe Marchiの式となる項であり、右辺第2項は側壁勾配を考慮したために付加された項である。この式(12)について、越流堰のある x の区間で積分する事を試みる。右辺第1項の積分はDe Marchiの式と同じ結果が出るため、ここでは右辺第2項についてのみを次式、

$$d\zeta = \frac{3}{4} \frac{m}{C_M} \frac{y(3y-2E)}{\sqrt{(E-y)}\sqrt{(y-W)}^3} dy \quad (13)$$

のように表示して考えることとする。

式(13)において、 $\sqrt{(E-y)/(y-W)} = t$ を代入して右辺を t の関数にすると、次式が得られる。

$$d\zeta = \frac{3}{2} \frac{m}{C_M} \frac{1}{W-E} \left\{ 3 \left(\frac{t^2 W + E}{t^2 + 1} \right)^2 - 2E \left(\frac{t^2 W + E}{t^2 + 1} \right) \right\} dt \quad (14)$$

式(14)において、 t に関する部分積分を行い y の関数に直すと、 ζ は次式となる。

$$\begin{aligned}
 \zeta &= \frac{3}{2} \frac{Bm}{C_M} \left\{ \frac{1}{B} \left\{ \frac{1}{2} E - \frac{9}{2} W \right\} \tan^{-1} \sqrt{\frac{E-y}{y-W}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{W(2E-3W)}{B(E-W)} \sqrt{\frac{E-y}{y-W}} - \frac{3}{2B} \sqrt{(E-y)(y-W)} \right\} \quad (15)
 \end{aligned}$$

以上のように、式(12)の右辺第2項は式(15)のように積分できる。式(12)の右辺第1項においても同様の操作を行うことで積分可能である。ここで、堰上流端および下流端の添え字をそれぞれ1,2とすることによって堰長 L に関して次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 x_2 - x_1 &= L \\
 &= \frac{3}{2} \frac{B}{C_M} [(\phi_{a2} - \phi_{a1}) + m(\phi_{b2} - \phi_{b1})] \quad (16.a)
 \end{aligned}$$

ここで

$$\phi_a(y, E, W) = \frac{2E-3W}{E-W} \sqrt{\frac{E-y}{y-W}} - 3 \tan^{-1} \sqrt{\frac{E-y}{y-W}} \quad (16.b)$$

$$\begin{aligned}
 \phi_b(y, E, W, B) &= \frac{1}{B} \left\{ \frac{1}{2} E - \frac{9}{2} W \right\} \tan^{-1} \sqrt{\frac{E-y}{y-W}} \\
 &\quad + \frac{W(2E-3W)}{B(E-W)} \sqrt{\frac{E-y}{y-W}} - \frac{3}{2B} \sqrt{(E-y)(y-W)} \quad (16.c)
 \end{aligned}$$

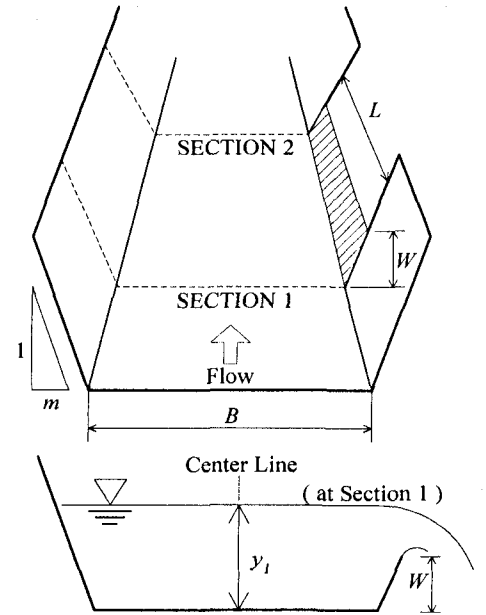


図-3 実験装置

この式(16.a)~(16.c)が、台形断面水路内に設置された横越流堰の流量算定式として用いられる。また、この式における右辺第2項によって台形断面について考慮していることを表し、 $m=0$ を代入することによって矩形断面の場合も包含することがわかる。

ところで、式(16)における流量係数は、式(5)から(6)とするときの接近流速水頭、式(3)の流速分布の無視などの仮定・簡略化の効果を含んだものであり、Subramanya & Awasthy⁴⁾は矩形断面の場合に、次元解析により C_M を規定するパラメータとして、流入点の水路Froude数 F_1 、相対水深 W/y_1 および相対堰長 L/B の3つであることを提案している。しかし側壁勾配 m の存在は、矩形断面の場合よりそれらの影響が大きく表れると考えられ、これらのパラメータに加え m を変化させて実験的に定める必要がある。

3. 実験装置および実験方法

本実験に用いた水路は長さ600cm、水路の底面幅 $B=11.5$ cmで側壁勾配 m をもつ木製水路である。その概要を図-3に示す。横越流堰は、堰高を $W=3$ cmの刃型堰とし、始端を水路入口から350cmの水路右岸側とした。また本実験の変化パラメータについては、側壁勾配を $m=0, 0.3, 0.5, 0.7$ として、それぞれの m に対して堰の長さを $L=10, 15, 20$ cm、流入水深を $y_1=5, 7, 9$ cm、流入Froude数を $F_1=0.3 \sim 0.8$ と系統的に変化させた。堰上流端および下流端

表-1 実験条件と結果

(表中の, F_1 C_M は、1000倍した値を示している)

m		0.00		0.30		0.50		0.70	
L	y_1	F_1	C_M	F_1	C_M	F_1	C_M	F_1	C_M
10	5	282	560	313	584	298	564	299	545
		415	500	402	552	419	502	401	530
		497	490	490	537	499	517	507	485
		623	420	622	476	605	508	626	483
		—	—	—	—	704	456	—	—
		—	—	—	—	—	—	—	—
	7	303	532	303	560	298	573	303	546
		406	496	395	532	406	558	400	492
		501	478	—	—	500	515	493	472
		602	432	588	459	597	499	605	477
		—	—	—	—	685	482	698	463
		—	—	—	—	—	—	—	—
	9	302	534	305	569	301	583	—	—
		397	495	403	521	397	543	395	535
		496	452	490	532	511	525	506	514
		604	427	586	463	595	463	—	—
		—	—	—	—	—	—	—	—
		—	—	—	—	—	—	—	—
15	5	296	558	305	562	312	558	306	528
		401	521	395	538	398	544	415	518
		523	471	513	509	506	502	484	476
		590	453	607	477	593	507	615	480
		675	435	—	—	693	508	699	469
		795	387	—	—	811	456	—	—
	7	—	—	317	526	298	545	306	542
		414	499	410	529	403	539	408	506
		497	490	483	491	499	511	496	473
		603	426	605	484	602	499	591	468
		705	399	—	—	—	—	—	—
		801	341	—	—	—	—	—	—
	9	—	—	—	—	—	—	300	562
		—	—	400	508	399	531	401	512
		511	466	497	509	500	498	506	477
		595	432	—	—	—	—	—	—
		718	388	—	—	—	—	—	—
		811	337	—	—	—	—	—	—
20	5	—	—	319	574	306	551	306	544
		401	521	401	577	404	529	399	527
		495	492	490	564	489	514	504	505
		606	455	—	—	599	501	620	469
		701	399	—	—	698	495	—	—
		813	378	—	—	799	434	—	—
	7	—	—	385	564	—	—	—	—
		—	—	417	509	396	540	396	527
		506	494	501	506	504	497	512	497
		605	448	582	463	598	482	—	—
		707	392	—	—	708	442	—	—
		796	360	—	—	—	—	—	—
	9	—	—	—	—	—	—	—	—
		—	—	465	505	403	544	394	537
		—	—	502	518	499	507	496	509
		606	450	609	495	600	463	—	—
		707	403	—	—	—	—	—	—
		799	371	—	—	—	—	—	—

の水深 y_1, y_2 は超音波式変位センサで20秒間測定し、その平均値を用いた。上流側流量 Q_1 は四角堰を越える越流水深を基に、下流側流量 Q_2 は量水榼の水位上昇速度を容量式波高計を用いることで算出した。

4. 実験結果および考察

流量係数 C_M の実験値は次のように算出できる。すなわち、実験より得られた堰上流端における Q_1, y_1 を式(1)に代入して E_1 を計算し、これを用いて式(16.b)と(16.c)より ϕ_{a1}, ϕ_{b1} を得る。同様にして堰下流端の Q_2, y_2 より $E_2, \phi_{a2}, \phi_{b2}$ が得られ、これらより式(16.a)を用いて C_M を求めた。

実験より得られた C_M と堰上流端におけるFroude数 $F_1 = Q_1 / \sqrt{gy_1} [y_1(B + my_1)]$ を表-1に示した。ここで、この表中の C_M, F_1 はいずれも1000倍した値として表示している。

C_M の値は中川・宇民ら^{2),3)}やSubramanya & Awasthy⁴⁾が指摘したように F_1 の関数であるが、側壁勾配 m を変化させたために堰長 L 、流入水深 y_1 の影響も考えられる。そこで図-4にはまず m ごとに C_M を F_1 の関数として表示した。このとき、それぞれの m ごとに W/y_1 を $3/9, 3/7, 3/5$ の一定値の図として上から(a), (b), (c)で示している。また、これらの図中の記号○, △, □はそれぞれ $L=10, 15, 20\text{cm}$ である。なお、 $m=0$ の矩形断面水路において図中に示している点線の曲線は、Subramanya & Awasthy⁴⁾によって堰高 $W=8\sim 51\text{cm}$ の実験結果を用いて求められた $F_1 - C_M$ 曲線で、次式で表されるものである。

$$C_M = 0.611 \sqrt{1 - \frac{3F_1^2}{F_1^2 + 2}} \quad (17)$$

本実験の有効性を見る意味で、実験結果と式(17)を比較するとほぼ同一の値を示しており、今回の実験結果は有効であるといえる。

図-4より $F_1=0.3\sim 0.8$ の範囲においては、記号の違い、すなわち L の違いによる系統的な差は見られない。そこで、これらのデータを用いて最小二乗法により C_M と F_1 を次式(18)の1次関数で表し、またこれらの各式をそれぞれ図中に示した。

$$C_M = \alpha \cdot F_1 + \beta \quad (18)$$

これらから、傾き α は W/y_1 に独立で m のみの関数であるといえる。

一方、切片 β は m のみならず W/y_1 にも依存しているようである。そこで、 $m = \text{const.}$ のもとで β と W/y_1 の関係を表したものが図-5(a)~(d)である。しかし、これらの図から β は実測値のばらつきが大きいので W/y_1 への依存性を確かめることは難しく、むしろ m に関する依存性が大きい。

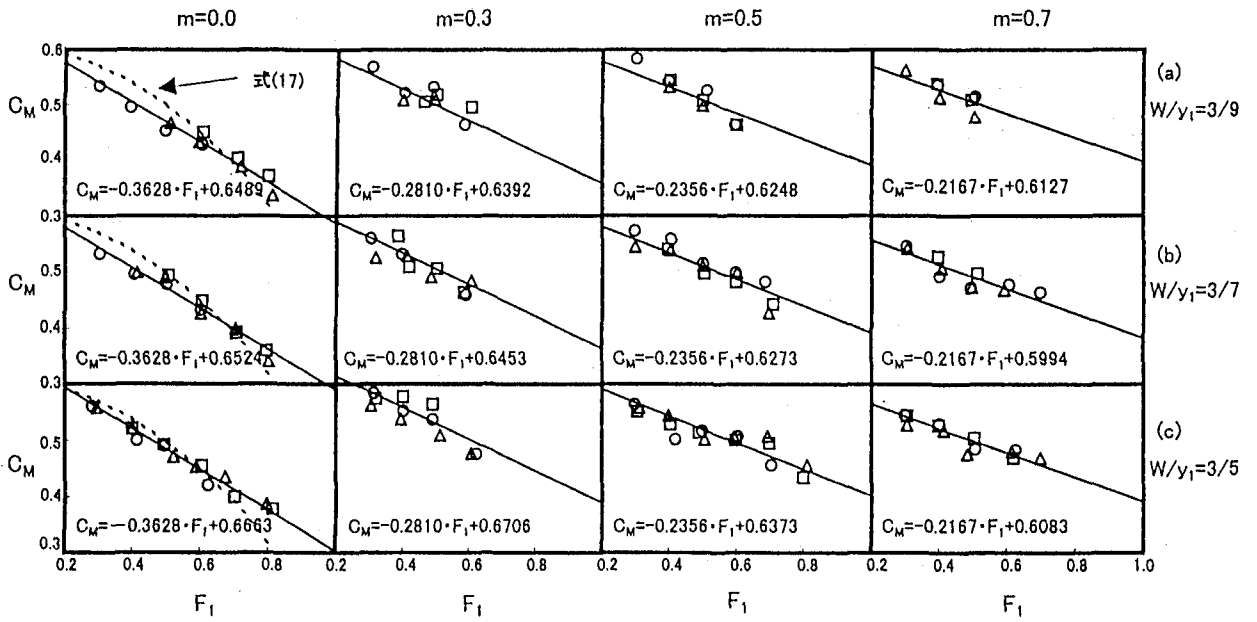


図-4 流入 Froude 数 F_1 と流量係数 C_M の関係

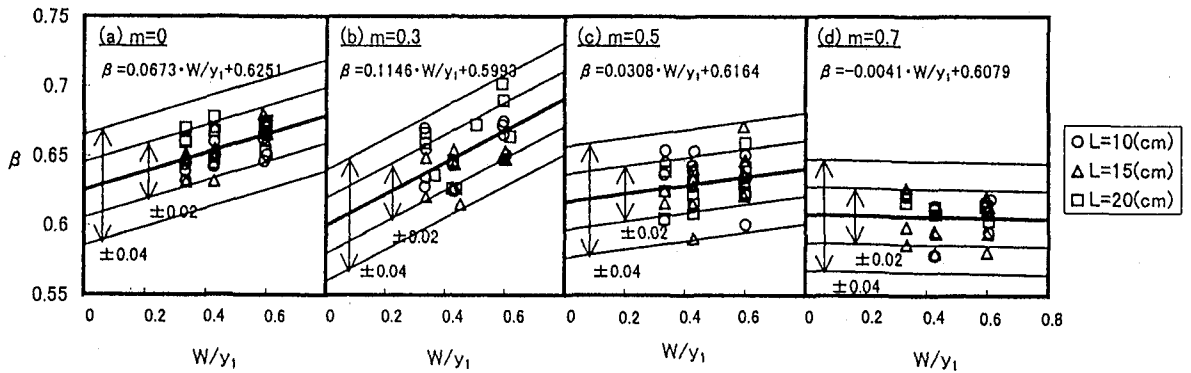


図-5 相対水深 W/y_1 と切片 β の関係

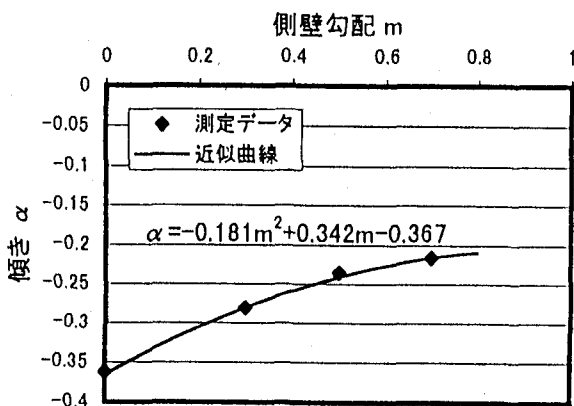


図-6 側壁勾配 m と傾き α の関係

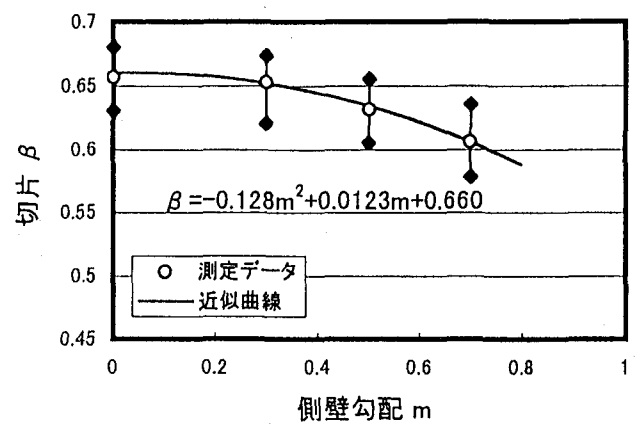


図-7 側壁勾配 m と傾き β の関係

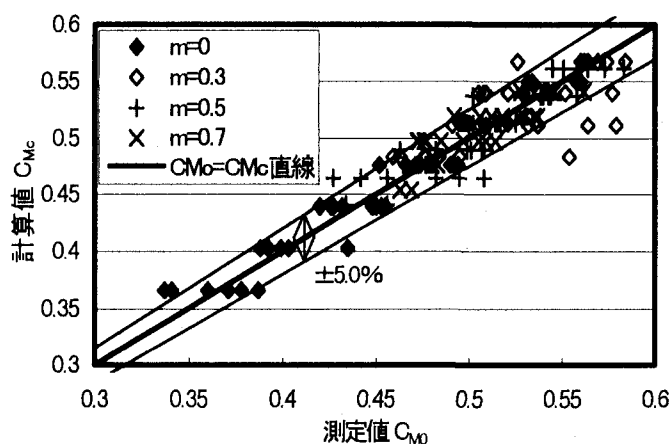


図-8 実測値 C_{M0} と計算値 C_{Mc} との関係

そこで、図-4 中に示した式(18)の α と m との関係を図-6 に示す。これより、 α は m の2次関数として近似でき、次式で表される。

$$\alpha = -0.181m^2 + 0.342m - 0.367 \quad (19)$$

次に、式(15)を各実験データに適用して β を求め、 m との関係を表したものが図-7 である。図中には β の実測値のばらつきがわかるように β の最大値と最小値を◆印で示した。よって図-7 より β は、

$$\beta = -0.128m^2 + 0.0123m + 0.660 \quad (20)$$

で近似できる。よって側壁勾配を持つ横越流堰の実験結果より、 C_M は式(18), (19)および(20)で近似できる。図-8 に式(18), (19)および(20)より求めた計算値 C_{Mc} と実測値 C_{M0} とを示した。この図には $\pm 5.0\%$ の誤差の範囲を直線で示した。図-8 より、◇印で表した $m=0.3$, $W/y_1=3/5$ のデータを除けば、 C_M はそのほとんどが誤差 $\pm 5.0\%$ の範囲で式(18), (19)および(20)で表すことができるといえる。

5. おわりに

台形断面を有する水路内に横越流堰が設置されたとき、それぞれ以下のことがいえた (式(18)~(20)については文末を参照)。

(1) 台形断面水路における横越流堰からの越流量は式(16.a)~(16.c)を用いることによって計算可能となる。

(2) C_M は、流入点の水路Froude数 F_1 に大きく依存し、これは従来の矩形断面の研究と一致する。また C_M を式(18)のように F_1 の1次関数で表すとき、その傾き α は $m=0\sim 0.7$ のとき $F_1=0.2\sim 0.8$ の範囲において m のみ依存するパラメータであり、式(19)のように m の2次関数で表される。

(3) 式(18)における切片 β は、 W/y_1 に若干依存する傾向が見られるが、この判定については測定データの精度に大きく影響されるため、依存性を確かめるのは難しい。

(4) 各実験データを式(18)に代入し、各データの切片 β の値を一定とすると、この β は m の2次関数で表される。

(5) 式(18), (19)および(20)で求められる C_M の計算値 C_{Mc} は、本実験における実験値 C_{M0} と $\pm 5.0\%$ の誤差で一致する。

$$C_M = \alpha \cdot F_1 + \beta \quad (18)$$

$$\alpha = -0.181m^2 + 0.342m - 0.367 \quad (19)$$

$$\beta = -0.128m^2 + 0.0123m + 0.660 \quad (20)$$

謝辞：本研究を行うに当たり、実験および資料整理に協力いただいた本学大学院生・堀越公博、本学学部生・藤健志、大柴康子、澤田尚人の諸氏に謝意を表します。

参考文献

- 1) De Marchi, G. :Essay on the performance of lateral weirs, *L.Energia Elettrica*, Milan, Italy, 11, pp.849-860, 1934.
- 2) 中川博次, 宇民正：横越流分水工の機能設計に関する研究, 京都大学防災研究所年報第9号, pp.539-550, 1966.
- 3) 土木学会編：水理公式集（昭和60年度版）, 土木学会, p.292, 1985.
- 4) Subramanya, K., and Awasthy, S.C. :Spatially varied flow over side weir, *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE, Vol.98, No.1, pp.1-10, 1972.
- 5) 坂本真, 小野博基, 浦 勝, 秋山壽一郎, 河内俊雄：台形断面水路内の横越流堰の流量係数について, 平成8年度土木学会西部支部研究発表会 講演概要集, pp.234-235, 1997.
- 6) 椿東一郎：水理学 I, 森北出版, p.169-170, 1973.

(1997.9.30受付)