

FDS法を用いた開水路の河床変動計算

NUMERICAL COMPUTATION OF BED VARIATION IN OPEN CHANNEL FLOW BY FDS METHOD

大川秀典¹・清水康行²・藤田睦博³・橋本識秀⁴

Hidehori OKAWA, Yasuyuki SHIMIZU, Mutsuhiro FUJITA and Norihide HASHIMOTO

¹正会員 前田建設工業株式会社 (〒102 東京都千代田区富士見 2-10-26)

²正会員 工博 助教授 北海道大学工学部土木工学科 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)

³フェロー会員 工博 教授 北海道大学工学部土木工学科 (同上)

⁴正会員 工博 教授 北海道工業大学工学部土木工学科 (〒006 札幌市手稲区前田 419-2)

Numerical calculation of flow and bed deformation including shock wave is one of the important tools in the practical river engineering works. Flux Difference Splitting, FDS, scheme is one of the numerical method to simulate the flow with shock wave. In this method, the theory of nonlinear characteristic wave and the concept of numerical flux are taken into account and it is very easy to be applied to various condition of open channel flow. In this paper, FDS scheme for two dimensional flow is applied to two dimensional open channel flow and bed deformation. In this method, the characteristic wave direction when the flow and bed deformation affects to each other is taken into account. The proposed model is applied to experimental conditions and the calculated results are favorably compared with the experimental ones.

Key Words : *shock capturing method, Flux Difference Splitting scheme, numerical flux, bed deformation*

1. はじめに

不連続を伴う流れおよび河床変動の計算法は、常射流混在流れ、構造物を含む流れなど河川学上非常に重要な現象に適用される。近年、開水路における衝撃波を正確に計算する手法として MacCormack 法や、これに計算の安定化のための人工粘性を附加した方法¹⁾などが頻繁に用いられるようになっている。さらに、より高精度の計算法として、MacCormack 法の人工粘性に TVD (Total Variation Diminishing) の概念を導入した TVD MacCormack 法の適用も試みられている^{2), 3), 4)}。MacCormack 法自体は時間発展型の方程式を 2 次精度で計算するために開発されたものであるが、流体の本質的な特性である移流現象を高次精度で計算するために必要な人工的な安定項の評価は、必ずしも確立されているものではない。

著者らは前報⁵⁾において、より合理的な粘性を導入した FDS 法⁶⁾ (Flux Difference Splitting scheme: 流束差分法) について開水路流への適用を行った。この結果、双曲型の方程式の本質的な特性である風上化という問題を近似リーマン解法で処理することにより理論的にも計算アルゴリズムも明快に多次元問題や、一般座標

系へ拡張が可能であることが示された。さらに、今までの計算法では計算が困難であった河床の一部が水面上に現れるような条件での常射流混在流れなど、非常に厳しい条件でも安定した計算が精度良く行われることが示された。

本研究においては、空間 1 次精度の FDS 法に河床変動モデルを組み入れ、2 次元一般座標の形で FDS 計算法の理論および計算法の構築を行う。河床変動の基礎式は流れの基礎式と一体として扱い、流れと河床変動が相互干渉する場においても、流れや河床変動の特性方向を自動的に計算に取り込めるような工夫を行う。なお、一般に 2 次元の計算では表現が難しい湾曲部の 2 次流に関しては、従来から行われているような局所的な流れに対して一様湾曲流の 2 次流理論を適用することにより対応する。

初めにモデルの特性を検討するための簡単な計算例として一様幅の常射流混在流れに本計算法を適用する。計算結果における流れおよび河床変化の特性を調べ、常流部および射流部においてそれぞれ異なった河床変動特性が計算されることを示す。さらに、湾曲流れの計算例として蛇行水路実験に本計算法を適用し、十分な精度で計算が可能であることを示す。

従来、流れと河床変動の計算はそれぞれ別個に風上差分などが適用されていたが、本研究では従来と異なり、両者を一体として扱った場合の、理論的にも明快な計算方法の概念が示される。

2. 基礎理論

(1) 2次元流れの基礎式およびその疑似線形表示

2次元浅水流の連続式、運動方程式および流砂の連続式を保存型で以下のように表す。ただし、簡単のためソース項、粘性項は省略する。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F^a}{\partial x} + \frac{\partial F^b}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$Q = \begin{pmatrix} z_b \\ h \\ u^x h \\ u^y h \end{pmatrix}$$

$$F^a = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\lambda_b} q^x \\ u^x h \\ \frac{(u^x h)^2}{h} + \frac{1}{2} g h^2 + g \bar{h} z_b \\ \frac{(u^x h)(u^y h)}{h} \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$F^b = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\lambda_b} q^y \\ u^y h \\ \frac{(u^x h)(u^y h)}{h} \\ \frac{(u^y h)^2}{h} + \frac{1}{2} g h^2 + g \bar{h} z_b \end{pmatrix}$$

ここで、 x および y は直交する座標軸であり、 $u^x h$, $u^y h$ および q^x , q^y は x , y 方向の流束、流砂量、 h は水深、 z_b は河床高、 g は重力加速度、 λ_b は河床材料の空隙率、式 $\bar{h}$ は (1) を適応させる区間での平均水深である。上記の (x, y) 座標系における諸式を以下の関係を用いて一般座標系 (ξ, η) に変換する。式 (1) は一般座標系 (ξ, η) においては以下の式 (3) ように表す。

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}^a}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}^b}{\partial \eta} = 0 \quad (3)$$

ただし、式 (3) 中の記号 $\tilde{Q}$, $\tilde{F}^a$, $\tilde{F}^b$ は以下に示す通りで

ある。

$$\tilde{Q} = \frac{Q}{J}$$

$$\tilde{F}^a = \frac{\xi_x}{J} F^a + \frac{\xi_y}{J} F^b = m_x F^a + m_y F^b \quad (4)$$

$$\tilde{F}^b = \frac{\eta_x}{J} F^a + \frac{\eta_y}{J} F^b = n_x F^a + n_y F^b$$

ここで、 ξ_x は ξ の x による偏微分を表すものであり他も同様である。 J は座標変換による Jacobian 行列である。この式 (3) に対し特性方向を考慮した風上差分を適用させるために以下のように式の変形を行う。

式 (3) を局所的に線形化すれば、疑似線形形は以下の式 (5) のようになる。

$$\frac{1}{J} \frac{\partial Q}{\partial t} + A \frac{\partial Q}{\partial \xi} + B \frac{\partial Q}{\partial \eta} = 0 \quad (5)$$

ここで、 A および B は jacobian 行列であり、 A は以下のように表される。

$$A = \frac{\partial \tilde{F}^a}{\partial Q}$$

$$= \frac{\partial}{\partial Q} (m_x F^a + m_y F^b)$$

$$= m_x \frac{\partial F^a}{\partial Q} + m_y \frac{\partial F^b}{\partial Q} \quad (6)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & a_2^1 \\ 0 & 0 \\ m_x \bar{c}^2 & -u^x U_m + m_x c^2 \\ m_y \bar{c}^2 & -u^y U_m + m_y c^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_3^1 & a_4^1 \\ m_x & m_y \\ U_m + m_x u^x & -V_m + m_x u^y \\ V_m + m_y u^x & U_m + m_y u^y \end{pmatrix}$$

ただし、

$$a_2^1 = \frac{1}{1-\lambda_b} \left(m_x \frac{\partial q^x}{\partial h} + m_y \frac{\partial q^y}{\partial h} \right)$$

$$a_3^1 = \frac{1}{1-\lambda_b} \left(m_x \frac{\partial q^x}{\partial u^x h} + m_y \frac{\partial q^y}{\partial u^x h} \right) \quad (7)$$

$$a_4^1 = \frac{1}{1-\lambda_b} \left(m_x \frac{\partial q^x}{\partial u^y h} + m_y \frac{\partial q^y}{\partial u^y h} \right)$$

であり、 u^x , u^y は x , y 方向の流速、 $U_m = m_x u^x + m_y u^y$, $V_m = m_x u^y - m_y u^x$, $\bar{c}^2 = g \bar{h}^2$, $c^2 = g h^2$ である。行列 B は、行列 A の要素中の m_x , m_y を n_x , n_y と置き換えただけの形となり、 $U_n = n_x u^x + n_y u^y$, $V_n = n_x u^y - n_y u^x$ である。

行列 A, B は 4 行 4 列であるから固有値が 4 個存在する。固有値は各波 (流れの特性の伝播) の特性速度を表し、 A の固有値を $\lambda^{ak} (k=1\sim 4)$ とすれば λ^{ak} の値は、 $|A - \lambda^{ak} I| = 0$ (I は単位行列) を解くことにより求まる。これらは 4 次方程式であり、Euler, Cardano の解法⁷⁾を用いることとする。以上より、固有値行列 D は (8) のようになる。

$$D = \begin{pmatrix} \lambda^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4 \end{pmatrix} \quad (8)$$

次に、これら 4 個の固有値に対する固有ベクトル l を求める。 A, B の右固有ベクトルを $l^{ak}, l^{bk} (l^k = (l_1^k, l_2^k, l_3^k, l_4^k), k = 1\sim 4)$ とすれば、 $l^{ak} A = \lambda^{ak} A, l^{bk} B = \lambda^{bk} B$ を満たすよう l^{ak}, l^{bk} を決める。 l^{ak} の要素については以下のようになる。

$$\begin{aligned} l_1^{ak} &= \bar{c}^2 (m_x^2 + m_y^2) (\lambda^{ak} - U_m) \\ l_2^{ak} &= -a_3^1 \{ m_x (\lambda^{ak} - U_m) - m_y V_m \} \\ &\quad - a_4^1 \{ m_x V_m + m_y (\lambda^{ak} - U_m) \} \\ &\quad + \lambda^{ak} (\lambda^{ak} - U_m) (2\lambda^{ak} - U_m) \\ l_3^{ak} &= m_y \bar{c}^2 (-m_x a_4^1 + m_y a_3^1) \\ &\quad + m_x \lambda^{ak} (\lambda^{ak} - U_m) \\ l_4^{ak} &= -m_x \bar{c}^2 (-m_x a_4^1 + m_y a_3^1) \\ &\quad + m_y \lambda^{ak} (\lambda^{ak} - U_m) \end{aligned} \quad (9)$$

l^{bk} は上記 l^{ak} の要素中の m_x, m_y を n_x, n_y と置き換えた形となる。(9) より左固有ベクトルの行列、左固有値行列 L^a, L^b は以下のように表される。

$$L^a = \begin{pmatrix} l^{a1} \\ l^{a2} \\ l^{a3} \\ l^{a4} \end{pmatrix}, \quad L^b = \begin{pmatrix} l^{b1} \\ l^{b2} \\ l^{b3} \\ l^{b4} \end{pmatrix} \quad (10)$$

また、左固有値行列 R^a, R^b は右固有値行列 L と左固有値行列 R が直交関係にある。ここで本来なら R も求めるべきであるが、 L が複雑であるため、今回は計算中に $R = L^{-1}$ の関係より求めることとする。固有値を対角要素に持つ行列を固有値行列 D とすれば、行列 D, L, R については以下のような関係がある。

$$A = R^a D^a L^a, \quad B = R^b D^b L^b \quad (11)$$

ここで、以下の式 (12) で定義される特性変量 W を導入する。

$$\partial W = L \partial Q \quad (12)$$

$\partial W (= (\partial w^1, \partial w^2, \partial w^3, \partial w^4)^T)$ は特性速度 λ^k で ∂w^k がそれぞれ独立に伝播することを示す。従って、式 (5) 中

の移流項、 $A \frac{\partial Q}{\partial \xi}, B \frac{\partial Q}{\partial \eta}$ は以下のように書き換えられる。

$$A \frac{\partial Q}{\partial \xi} = R^a D^a L^a \frac{\partial Q}{\partial \xi} = R^a D^a \frac{\partial W^a}{\partial \xi} \quad (13)$$

$$B \frac{\partial Q}{\partial \eta} = R^b D^b L^b \frac{\partial Q}{\partial \eta} = R^b D^b \frac{\partial W^b}{\partial \eta} \quad (14)$$

(13), (14) より式 (5) は以下の式 (15) のようになる。

$$\frac{1}{J} \frac{\partial Q}{\partial t} + R^a D^a \frac{\partial W^a}{\partial \xi} + R^b D^b \frac{\partial W^b}{\partial \eta} = 0 \quad (15)$$

式 (15) は ∂W が特性速度 D で伝播することを示している。また、行列 D の対角要素である固有値については、その正負が波の向きを表す。波の方向の判断が可能となることにより、流れと河床変動が相互干渉する場における風上差分が可能となる。

なお、実際には式 (15) にはソース項および粘性項が加わることになり、これを加えて再記すれば以下のとおりとなる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial Q}{\partial t} + R^a D^a \frac{\partial W^a}{\partial \xi} + R^b D^b \frac{\partial W^b}{\partial \eta} \\ + \frac{\partial \tilde{G}^a}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{G}^b}{\partial \eta} = \tilde{\Omega} \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、

$$\tilde{G}^a = \frac{\xi_x}{J} G^a + \frac{\xi_y}{J} G^b = m_x G^a + m_y G^b \quad (17)$$

$$\tilde{G}^b = \frac{\eta_x}{J} G^a + \frac{\eta_y}{J} G^b = n_x G^a + n_y G^b \quad (18)$$

$$\tilde{\Omega} = \frac{\Omega}{J} \quad (19)$$

$$G^a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\varepsilon \frac{\partial u^x h}{\partial x} \\ -\varepsilon \frac{\partial u^y h}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad G^b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\varepsilon \frac{\partial u^x h}{\partial y} \\ -\varepsilon \frac{\partial u^y h}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{gn^2 (u^x h) \sqrt{(u^x h)^2 + (u^y h)^2}}{h^{7/3}} \\ -\frac{gn^2 (u^y h) \sqrt{(u^x h)^2 + (u^y h)^2}}{h^{7/3}} \end{pmatrix} \quad (21)$$

ただし、 n は Manning の粗度係数、 ε は渦動粘性係数である。

この計算モデルは 1 次元での FDS 法を 2 次元に拡張したものであり、1 次元的な考え方をそれぞれ各方向に適用したものである。そのため、この方法では 1 次元から多次元への拡張は容易であるが、計算格子に対し段波、跳水などの不連続な流れが垂直方向に存在する場合に対し、横切のような形で存在する場合では必ずしも精度良い結果が得られるとは限らない。しかしながら著者らはこのような条件下での 2 次元流れの再現計算を行い、良好な結果を得ているため⁸⁾、同様な方法を用いて計算モデルの作成を行った。

(2) 流砂量式

式 (2) における流砂量 q^x 、 q^y を求めるために図-1 に示す座標系を定義する。ここで s 軸は流線方向、 n 軸は s

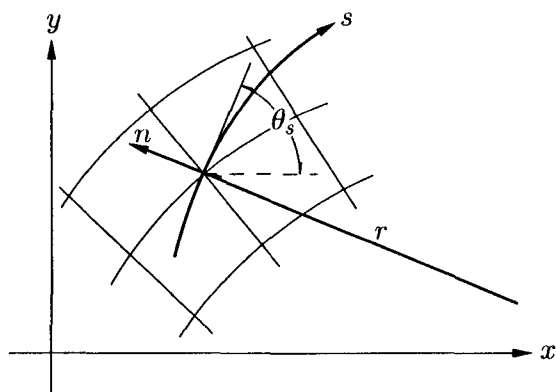


図-1 座標系の定義

軸と直交するらせん流による底面流速の方向である。 s 軸方向の流砂量 q^s の算定には Meyer-Peter・Muller 式、 n 軸方向の流砂量 q^n の算定には長谷川⁹⁾の式を用いる。

$$q^s = 8 \sqrt{\left(\frac{\rho_s}{\rho - 1}\right)} g d^3 (\tau_* - \tau_{*c})^{3/2} \quad (22)$$

$$q^n = q^s \left(-N_* \frac{h}{r} - \sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\mu_s \mu_k \tau_*}} \frac{\partial z_b}{\partial n} \right) \quad (23)$$

ここで、 ρ_s は河床材料の密度、 d は河床材料の粒径、 τ_* は流線方向の無次元せん断力、 τ_{*c} は無次元限界せん断力であり岩垣の式で求め、 r は流線の曲がりの曲率半径、 N_* は 2 次流の強さを表す係数 ($=7.0$)、 μ_s および μ_k は河床材料の静止および動摩擦係数であり、以下の解析では河床材料に砂を用いたため、砂の物性を考慮して $\mu_s = 1.0$ および $\mu_k = 0.45$ を用いることとする。また、式 (23) の右辺第 2 項はソース項として扱う。これは x および y の 2 階微分項であるためであり、第 2 項を除いた q^n を用いて特性方向を求める。 r および $\partial z_b / \partial n$ は (ξ, η) 座

標系においては以下のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= -\frac{\partial \theta_s}{\partial s} \\ &= -\frac{J}{V^3 h} \left\{ U_m \left(\frac{\partial u^y h}{\partial \xi} u^x - \frac{\partial u^x h}{\partial \xi} u^y \right) \right. \\ &\quad \left. + U_n \left(\frac{\partial u^y h}{\partial \eta} u^x - \frac{\partial u^x h}{\partial \eta} u^y \right) \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\frac{\partial z_b}{\partial n} = \frac{J}{V} \left(V_m \frac{\partial z_b}{\partial \eta} + V_n \frac{\partial z_b}{\partial \xi} \right) \quad (25)$$

ここで、 $V = \sqrt{(u^x)^2 + (u^y)^2}$ である。流砂量 q^s 、 q^n より x 、 y 方向の流砂量 q^x 、 q^y を求めれば以下ようになる。

$$\begin{aligned} q^x &= q^s \frac{u^x}{V} - q^n \frac{u^y}{V} \\ q^y &= q^s \frac{u^y}{V} + q^n \frac{u^x}{V} \end{aligned} \quad (26)$$

3. 河床変動計算

前記の諸式を用い 2 次元流れと河床変動の計算を FDS 法を用いて行うが、ここではまず、その特性を検討する目的で、一樣幅直線水路で常射流混在流れが発生している場合の河床変動特性を調べ、その後、蛇行水路における河床変動特性を検討する。

(1) 常射流混在条件

開水路における常射流混在条件下において常流域、射流域それぞれにステップを配置し、その変化を見る。計算条件を表-1 に示す。上下流端の河床高は固定し、上流端では常に一定流量 Q を与え、下流端では隣接する計算点と同じ水位、流束を与える。ここでは、河床変化を単純に捕らえたいために一次元方向のみに初期河床の変化を与える。

表-1 常射流混在条件

水路幅	B	(m)	1.0
河床平均粒径	d	(cm)	0.1
河床勾配	I		0.001 $\Rightarrow$ 0.02
流量	Q	(m ³ /s)	1.0

計算結果を図-2 に示す。河床中のステップ部が、常流域では下流側へ、射流域では上流側へと移動していることがわかる。図-3 は計算終了時における縦断方向の河床変動を伝える固有値である特性速度を $c = \sqrt{gh}$ で無次元化して示したものである。縦断方向の変化を伝える 4 個の固有値の内、3 個は流れの伝播に関係し、それぞれ、 $\lambda^1 \cong u^x$ 、 $\lambda^2 \cong u^x + \sqrt{gh}$ 、 $\lambda^3 \cong u^x - \sqrt{gh}$ といった形を取る。これに対し河床変動に関係する固有値 λ^4

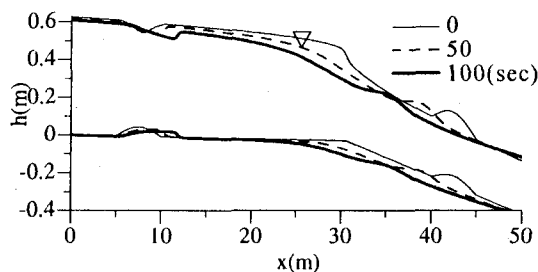


図-2 河床, 水面形状およびフルード数の時間変化

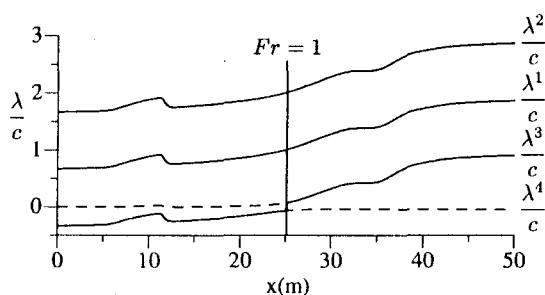


図-3 特性速度

は比較して小さな値を取り, 常射流の境界で λ^3 と同様に正負逆の方向を示している。

計算結果によれば, 河床変動は常流域においては下流へ伝搬し, 射流域においては上流へ伝搬するという従来の理論と一致した結果が現れている。また, 計算は, 特に常流・射流の区別をしながら行っているのではなく, 同じ計算方法を全区間に適用したものである。計算結果は, 合理的なものであり, 本計算法が常射流混在流れにおける河床変動に対しても有望と思われる。

(2) 蛇行水路実験との比較

一般の河川の河床変動を扱う場合, 単純な2次元モデルでは河川特有の湾曲部の2次流の影響を表現することは出来ない。本研究で扱う2次元FDS法も例外ではなく, 2次流の影響を考慮する必要があると考えられ, 横断方向の流砂量式に2次の影響を組み込んだ形としている。そこで, この2次流が卓越する典型的な例として, 蛇行水路における河床変動計算を実施し, モデルの有効性を検討する。

表-2は, 長谷川⁹⁾による蛇行水路実験 ME-2 の条件である。実験で使用した矩形水路の平面形状は Sine-generated Curve であり, 初期河床を平坦として通水し, 河床形状が定常状態に達した後に停水, 河床表面を固定化後, 再び通水して流速の測定が行われている。この実験の河床形態は Ripple であり, 局所的に複雑な形を

表-2 実験 ME-2 の条件

水路幅	B (cm)	30
蛇行長	L (cm)	220
最大蛇行角	θ_0 (deg)	30
河床平均粒径	d (cm)	0.043
河床勾配	I	0.00333
流量	Q (l/s)	1.87
通水時間	T (min)	240

なしている。再現計算は蛇行水路1波長について行い, 流下方向に22分割, 横断方向に15分割の格子を用いた。また, 周期性のある蛇行水路のため, 境界条件として上流端および下流端の流束, 水深, 河床変動高を等しく保った。

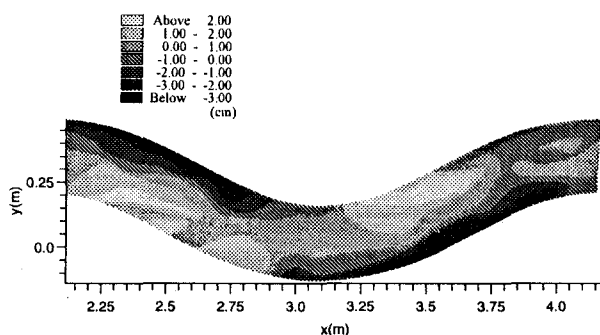


図-4 河床形状 (実測値)

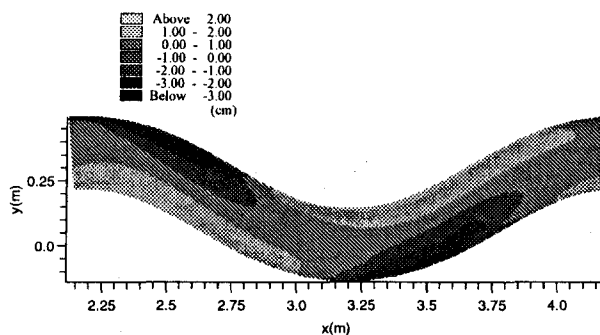


図-5 河床形状 (計算値)

図-4に実験および図-5に計算結果の河床コンターを示す。共に初期河床高からの変動量を cm 単位で示したものである。深掘れおよび堆積の範囲は計算値は実測値とほぼ同じ傾向を示している。しかしながら, 深掘れおよび堆積の値に関しては計算値は実測値をやや下回る傾向が見られる。なお計算では約30分で河床高, 流速ともほぼ定常状態に達した。ここでの計算例では流れはほぼ全域に渡って常流であり敢えてFDS法を用いなくても, 従来の計算法でも十分な精度が期待できるものであるが, 計算方法のうち, 特に2次流が卓越する場で

の今後の可能性を示したことになる、今後より複雑な流れ場への適用に際してのステップになると考えられる。

4. おわりに

本研究においては、航空流体力学の分野で衝撃波捕獲法の一つとして着目されている、FDS法を開水路の2次元流れと河床変動計算へと適用すべく、数値計算モデルの開発をおこなった。モデルは実河川問題等への適応を考慮して一般座標系を採用した。また、2次元モデルでは表現が不可能な湾曲部で2次流が卓越するような条件にも対応可能なように、横断方向の流砂量に2次流の効果をとり込んだ。

初めに、計算モデルの特性を把握するために、非常に単純な常射流混在流れ場における河床変動計算を実施し、常流域および射流域でそれぞれの河床変動特性を検討した。さらに、FDS法に組み入れた2次流の影響の算定法の妥当性を調べる目的で、蛇行水路実験の河床変動計算を実施し、実験結果との比較を行いモデルの検証を行った。

本論文で示した計算例は、必ずしもFDS法でなくてもある程度の計算が可能なものではあるが、敢えて単純な条件で計算法を確かめることにより、それぞれの卓越条件別の適用性が明らかになったと考えられる。

なお、特に強調すべき点は、従来、流れと河床変動の特性の伝搬方向および速度はそれぞれ別個に扱われてきたが、本計算法では、理論的にも明快な方法で、流れと河床変動が相互干渉する場における両者の特性方法が反映される計算法を示したことであり、この点は今後の応用を考える場合に特筆すべき事項である。

参考文献

- 1) 例えば、山下恭正、清水康行、荒井信行、三谷紀一：1次元保存則差分法による常射流混在流れの計算法、2次元数値計算法による都市域急流河川の安全度評価システムの開発、pp.121-126, 1996.
- 2) 岡部健士、山下秀基、天野裕仁：常射流が混在する2次元浅水流の数値計算法、第39回水理講演会論文集、pp.403-408, 1995.
- 3) 河村三郎、中谷剛：TVD-MacCORMACK法による常射流混在流の数値計算法、第37回水理講演会論文集、pp.763-768, 1993.
- 4) 増田尚弥、田中祐一郎、中谷剛：水制工周辺に射流域を生じる流れの数値計算に関する研究、第39回水理講演会論文集、pp.551-556, 1995.
- 5) 大川秀典、清水康行、藤田睦博：FDSを用いた開水路における衝撃波を含む流れの数値計算、水工学論文集第41巻、pp. 611-616, 1997.
- 6) P.L.Roe: Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes, JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS 43, pp.357-372, 1981.
- 7) 志賀浩二：数学が育っていく物語 第5週 方程式、岩波書店、1994.
- 8) 大川秀典、清水康行、森明臣：FDS法を用いた開水路における流れの数値計算、土木学会論文集(投稿中)
- 9) 長谷川和義：沖積蛇行の平面および河床形状と流れに関する水理学的研究、北海道大学学位論文、1984.
- 10) 清水康行：沖積河川における流れと河床変動の予測手法に関する研究、北海道大学学位論文、1991.
- 11) 西本直史、清水康行、青木敬三：流線の曲率を考慮した蛇行水路の河床変動計算、土木学会論文集 No.456, pp.11-20, 1992.
- 12) 藤井孝蔵：流体力学の数値計算法、東京大学出版会、1994.

(1997. 9. 30 受付)