

MacCormack法を用いた平面2次元数値モデル の浅水流への適用性について

APPLICABILITY OF 2-D NUMERICAL MODEL BASED ON
MACCORMACK SCHEME TO SHALLOW WATER FLOW

秋山 壽一郎¹・浦 勝²・山口 学³・重枝 未玲⁴

Juichiro AKIYAMA, Masaru URA, Manabu YAMAGUCHI and Mirei SHIGEEDA

¹正会員 Ph.D. 九州工業大学助教授 工学部建設社会工学科 (〒804北九州市戸畠区仙水町1-1)

²正会員 工博 九州工業大学教授 工学部建設社会工学科 (同上)

³学生員 九州工業大学大学院 工学研究科博士前期課程 (同上)

⁴学生員 九州工業大学 工学部建設社会工学科 (同上)

A 2-D numerical model for unsteady free surface flows based on MacCormack Scheme, that incorporates 4-step algorithm and Jameson's artificial viscosity, is developed in the orthogonal as well as generalized curvilinear coordinate system. The model is applied to the flows around groin(s) in which super- as well as sub-critical flows coexist and to the flow in a meandering channel. It is found from comparisons between experimental and numerical results that the model performs well when three dimensionality of a flow is moderate.

Key Words : open channel, Groin, Curved channel, MacCormack scheme

1. はじめに

近年、河川の治水、利水および環境機能の調和の立場から、河川構造物や河道そのものが複雑な形状をとる場合が増えている。例えば、水制工は河岸浸食の防止や水流の制御などを目的として、古くから用いられている河川構造物であるが、直線的な河岸景観を改善できることや水性生物にとって良好な生息空間が形成されることなどのような水制工の環境機能が見直され、河川計画における重要な工法のひとつとして最近注目されている。水制工の設置に当たっては、実際の施工例を参考にしたり、大型の水理模型実験によって流況を把握し計画を立てるのが一般的な方法とされていた¹⁾。しかしながら、この種の模型実験には多くの時間と費用が必要であることに加え、得られる結果が一般的ではないので、比較的小型の模型実験と数値解析を併用することによって数値モデルを構築し、数値実験によって合理的かつ経済的に河川計画を行なう方法の確立が望まれている。

ところで、水制工背後では2次流が発生するとともに剥離域の存在のために縮流が起こり局所的に射流が現われる場合があることが特徴であり、いずれの現象も河床変動や側岸浸食といった治水上の大きな問題となる。そこで、水制工背後で生じる2次流

に着目した準3次元計算モデル²⁾や水制工を含む湾曲河道の流れや河床変動についての準3次元数値モデル³⁾が提案される一方、水制工背後で生じる射流に着目した水制まわりの流れやそこでの河床変動についての平面2次元数値モデル^{4),5)}が提案されている。

本研究は、以上のような現状を踏まえ、MacCormack法の有する繰り返し計算における差分の方向性の偏りによる誤差を排除するためのアルゴリズムとMacCormack法が2次精度であるために生じる数値振動を抑制するための人工粘性を組み込んだ直交直線座標系における精度の高い平面2次元数値モデルを構築し、水制まわりの流れの特徴の一つである常・射流が混在した流れの場を対象として、モデルの適用性について定量的に調べたものである。MacCormack法の基づく平面2次元数値モデル^{4),5),6)}としては数多くのものが提案されているが、本平面2次元モデルは、MacCormack法に4ステップアルゴリズムとJamesonの人工粘性⁷⁾を組み込んだ点に特徴がある。さらに、一般座標系に拡張された本モデルの適用性についても、湾曲流れについての既存の実験結果を用いて検討を行なった。その結果、本モデルは、常・射流が混在した水制まわりの流れやある程度の蛇行度を有する湾曲流れの流況をかなりの精度で再現できることがわかった。

2. 二次元浅水流数値モデル

以下では、まず、直交直線座標系における2次元数値モデルについて説明し、次に、一般座標系に拡張されたモデルについて概説する。

(1) 直交直線座標系における2次元浅水流モデル

二次元浅水方程式の保存形の連続の式および運動方程式は、式(1)のように与えられる。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \mathbf{S} = 0 \quad (1)$$

ただし、 \mathbf{U} 、 \mathbf{E} 、 \mathbf{F} および \mathbf{S} は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \begin{bmatrix} h \\ u^x h \\ u^y h \end{bmatrix} & ; \mathbf{E} &= \begin{bmatrix} u^x h \\ (u^x)^2 h + 0.5gh^2 \\ u^x u^y h \end{bmatrix} \\ \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} u^y h \\ u^x u^y h \\ (u^y)^2 h + 0.5gh^2 \end{bmatrix} & ; \mathbf{S} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -gh(S_{ox} - S_{fx}) \\ -gh(S_{oy} - S_{fy}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ここに、 x 、 y は流下方向、横断面方向の距離、 h は水深、 u^x 、 u^y は x 、 y 方向の流速、 g は重力加速度、 S_{ox} 、 S_{oy} は x 、 y 方向の河床勾配である。また、 S_{fx} 、 S_{fy} は x 、 y 方向の摩擦勾配であり、それぞれ式(2)のように与えられる。ここに、 n はManningの粗度係数である。

$$\begin{aligned} S_{fx} &= \frac{n^2 u^x \sqrt{(u^x)^2 + (u^y)^2}}{h^{4/3}} \\ S_{fy} &= \frac{n^2 u^y \sqrt{(u^x)^2 + (u^y)^2}}{h^{4/3}} \end{aligned} \quad (2)$$

MacCormack法は、式(3.a)の予測子段階と式(3.b)の修正子段階よりなる2段階ステップの2次精度スキームであり、本平面2次元非定常流モデルにおけるMacCormack法では、任意の計算時間ステップのアルゴリズムは次のようになる。

予測子ステップ；

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{i,j}^p &= \mathbf{U}_{i,j}^t - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ (1-\alpha) \mathbf{E}_{i+1,j}^t - (1-2\alpha) \mathbf{E}_{i,j}^t - \alpha \mathbf{E}_{i-1,j}^t \right\} \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left\{ (1-\beta) \mathbf{F}_{i,j+1}^t - (1-2\beta) \mathbf{F}_{i,j}^t - \beta \mathbf{F}_{i,j-1}^t \right\} \\ &\quad - \Delta t \mathbf{S}_{i,j}^t \end{aligned} \quad (3.a)$$

修正子ステップ；

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{i,j}^c &= \mathbf{U}_{i,j}^p - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ (1-\alpha) \mathbf{E}_{i+1,j}^p - (1-2\alpha) \mathbf{E}_{i,j}^p - \alpha \mathbf{E}_{i-1,j}^p \right\} \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left\{ (1-\beta) \mathbf{F}_{i,j+1}^p - (1-2\beta) \mathbf{F}_{i,j}^p - \beta \mathbf{F}_{i,j-1}^p \right\} \\ &\quad - \Delta t \mathbf{S}_{i,j}^p \end{aligned} \quad (3.b)$$

$$\mathbf{U}_{i,j}^{t+1} = 0.5(\mathbf{U}_{i,j}^t + \mathbf{U}_{i,j}^c) \quad (3.c)$$

ここに、 Δx 、 Δy は x 、 y 方向の刻み幅であり、添え字 p および c はそれぞれ予測子と修正子を意味する。また、 α 、 β は差分の方向を決めるためのパラメータであり、MacCormack法の有する繰り返し計算における差分の方向性の偏りによる誤差を排除するための手段としてFennema⁸⁾によって提案されたものである。

表-1 4ステップアルゴリズム

第1ステップ	x 方向：前進→後退
	y 方向：前進→後退
第2ステップ	x 方向：前進→後退
	y 方向：後退→前進
第3ステップ	x 方向：後退→前進
	y 方向：後退→前進
第4ステップ	x 方向：後退→前進
	y 方向：前進→後退

この4ステップアルゴリズムを組み込んだ任意の計算時間ステップは表1のように表される。

MacCormack法は陽的解法であるので安定条件を満足する必要がある。本モデルは時間分割法を用いて計算を行っているので、CFLの安定性条件に基づくと、 Δt は式(4)のように与えられる。

$$\Delta t = \frac{\Delta x C_r}{\max(|u^x| + |u^y| + \sqrt{2gh})} \quad (4)$$

ここに、 C_r はCourant数である。

また、MacCormackの計算は空間と時間についての2次精度スキームである。よって、厳しい計算条件下では数値振動が生じ計算が発散してしまうことがある。このため、本研究では、式(5.a)、(5.b)に示すJameson⁷⁾が提案した人工粘性を導入し、計算精度の向上を図った。つまり、式(3.c)で求められた $\mathbf{U}_{i,j}^{t+1}$ は、最終的に式(6)で補正される。

$$\left. \begin{aligned} \xi_{i,j}^x &= \frac{|h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}|}{|h_{i+1,j}| + |2h_{i,j}| + |h_{i-1,j}|} \\ \xi_{i+1,j}^x &= k\max(\xi_{i,j}^x, \xi_{i+1,j}^x) \\ \xi_{i,j-1/2}^y &= k\max(\xi_{i,j}^y, \xi_{i,j-1}^y) \end{aligned} \right\} \quad (5.a)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_{i,j}^y &= \frac{|h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}|}{|h_{i,j+1}| + |2h_{i,j}| + |h_{i,j-1}|} \\ \xi_{i,j+1/2}^x &= k\max(\xi_{i,j}^x, \xi_{i,j+1}^x) \\ \xi_{i,j+1/2}^y &= k\max(\xi_{i,j}^y, \xi_{i,j+1}^y) \end{aligned} \right\} \quad (5.b)$$

$$\begin{aligned} U_{i,j}^{t+1} &= U_{i,j}^{t+1} + [\xi_{i+1,j}^x(U_{i+1,j}^{t+1} - U_{i,j}^{t+1}) - \xi_{i-1,j}^x(U_{i,j}^{t+1} - U_{i-1,j}^{t+1})] \\ &\quad + [\xi_{i,j+1/2}^y(U_{i,j+1}^{t+1} - U_{i,j}^{t+1}) - \xi_{i,j-1/2}^y(U_{i,j}^{t+1} - U_{i,j-1}^{t+1})] \end{aligned} \quad (6)$$

(II) 一般曲線座標系における2次元浅水流モデル

物理面(x,y)を直交直線座標、写像面(φ, ϕ)を一般曲線座標として、直交直線座標系における2次元浅水流方程式を一般曲線座標系に変換すると式(1)は式(7)のように表される。

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \phi} = \mathbf{D}_\varphi + \mathbf{D}_\phi \quad (7)$$

ただし、 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 、 \mathbf{D}_φ および \mathbf{D}_ϕ は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \frac{h}{J} \\ \frac{u^x h}{J} \\ \frac{u^y h}{J} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \frac{u^\varphi h}{J} \\ \frac{1}{J} \left(u^x u^\varphi h + \frac{\varphi_x}{2} g h^2 \right) \\ \frac{1}{J} \left(u^y u^\varphi h + \frac{\varphi_y}{2} g h^2 \right) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{u^\phi h}{J} \\ \frac{1}{J} \left(u^x u^\phi h + \frac{\phi_x}{2} g h^2 \right) \\ \frac{1}{J} \left(u^y u^\phi h + \frac{\phi_y}{2} g h^2 \right) \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}_\varphi &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} g h (S X_{0\varphi} - S X_{f\varphi}) \\ \frac{1}{J} g h (S Y_{0\varphi} - S Y_{f\varphi}) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_\phi = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} g h (S X_{0\phi} - S X_{f\phi}) \\ \frac{1}{J} g h (S Y_{0\phi} - S Y_{f\phi}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ここに、 φ 、 ϕ 方向における河床勾配および摩擦勾配であり、それぞれ式(8)、(9)のように与えられる。

河床勾配；

$$\begin{aligned} S X_{0\varphi} &= -\varphi_x \frac{\partial z_h}{\partial \varphi}; \quad S X_{0\phi} = -\phi_x \frac{\partial z_h}{\partial \phi} \\ S Y_{0\varphi} &= -\varphi_y \frac{\partial z_h}{\partial \varphi}; \quad S Y_{0\phi} = -\phi_y \frac{\partial z_h}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (8)$$

摩擦勾配；

$$\begin{aligned} S X_{f\varphi} &= \frac{\phi_y}{J} u^\varphi \frac{n^2 \sqrt{(u^x)^2 + (u^y)^2}}{h^{4/3}} \\ S X_{f\phi} &= -\frac{\varphi_y}{J} u^\phi \frac{n^2 \sqrt{(u^x)^2 + (u^y)^2}}{h^{4/3}} \\ S Y_{f\varphi} &= -\frac{\phi_x}{J} u^\varphi \frac{n^2 \sqrt{(u^x)^2 + (u^y)^2}}{h^{4/3}} \\ S Y_{f\phi} &= \frac{\varphi_x}{J} u^\phi \frac{n^2 \sqrt{(u^x)^2 + (u^y)^2}}{h^{4/3}} \end{aligned} \quad (9)$$

また、Jは座標変換のヤコビアンで式(10)のように与えられる。

$$J = \varphi_x \phi_y - \varphi_y \phi_x \quad (10)$$

一般座標系への座標変換後の本平面2次元非定常流モデルにおけるMacCormack法では、任意の計算時間ステップのアルゴリズムは式(11.a)～(11.c)で表わされる。

予測子ステップ；

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{i,j}^p &= \mathbf{A}_{i,j}^t - \frac{\Delta t}{\Delta \varphi} \left\{ (1-\alpha) \mathbf{B}_{i+1,j}^t - (1-2\alpha) \mathbf{B}_{i,j}^t - \alpha \mathbf{B}_{i-1,j}^t \right\} \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta \phi} \left\{ (1-\beta) \mathbf{C}_{i,j+1}^t - (1-2\beta) \mathbf{C}_{i,j}^t - \beta \mathbf{C}_{i,j-1}^t \right\} \\ &\quad + \Delta t (\mathbf{D}_{i,j}^* + \mathbf{D}_{i,j}^*) \end{aligned} \quad (11.a)$$

修正子ステップ；

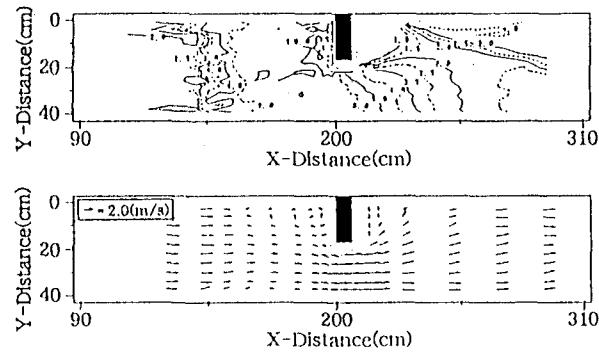
$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{i,j}^c &= \mathbf{A}_{i,j}^p - \frac{\Delta t}{\Delta \varphi} \left\{ (1-\alpha) \mathbf{B}_{i+1,j}^p - (1-2\alpha) \mathbf{B}_{i,j}^p - \alpha \mathbf{B}_{i-1,j}^p \right\} \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta \phi} \left\{ (1-\beta) \mathbf{C}_{i,j+1}^p - (1-2\beta) \mathbf{C}_{i,j}^p - \beta \mathbf{C}_{i,j-1}^p \right\} \\ &\quad + \Delta t (\mathbf{D}_{i,j}^* + \mathbf{D}_{i,j}^*) \end{aligned} \quad (11.b)$$

$$\mathbf{A}_{i,j}^{t+1} = 0.5 (\mathbf{A}_{i,j}^t + \mathbf{A}_{i,j}^c) \quad (11.c)$$

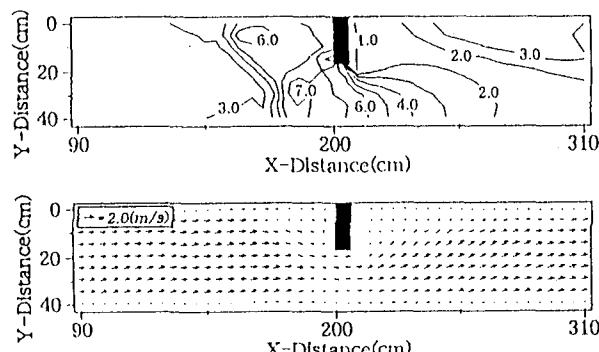
3. モデルの検証

以下では、水制まわりの流況についての永瀬ら⁹と蛇行水路の湾曲部の流況についての玉井ら¹⁰の既往の実験結果との比較検討を以下で行なう。さらに、水制まわりの流況については後述する本研究の実験結果との比較検討も行なう。

表-2 実験条件



(A) 実験結果



(B) 計算結果

図-1 永瀬らの実験値との比較(in cm)

(1) 水制まわりの流況についてのモデルの適用性 (a) 永瀬ら⁹⁾の実験結果に対するモデルの適用性

永瀬ら⁹⁾の水制まわりの流況について比較検討する。永瀬らの実験条件は、全長7.0m、幅0.4m水路の左岸側に上流端から2.0mの位置に1個の不透過性水制(20cm×幅10cm)を水路に直角に設置したもので、常・射流が混在した流れである。計算の境界条件は、水路上流端は開境界として流量Q=10.0(l/s)を与える、下流端は開境界として自由流出とし、壁面に沿う流れの成分はslip条件とした。計算条件はマニングの粗度係数n=0.01、クーラン数Cr=0.95、人工粘性係数k=0.30、格子間隔 $\Delta x=\Delta y=2.5\text{cm}$ である。水制まわりの水深hと流速ベクトル(u^x, u^y)を実験値と比較したものを図1に示す。ただし(A)は実験結果、(B)は計算結果である。上流側の跳水付近の流況については、計算値でやや拡散しているものの、下流側の水面形に注目すると、流れが水制のまわりを回り込むように大きく方向を変え、水路側壁によって反射をしたのち、再び反対側に向かっていく様子が良好に再現されている。

(b) 本研究の実験結果に対するモデルの適用性

実験装置は、全長20.5m、幅0.5m可変勾配水路の左岸側に上流端から10.0mの位置とその0.30m上・

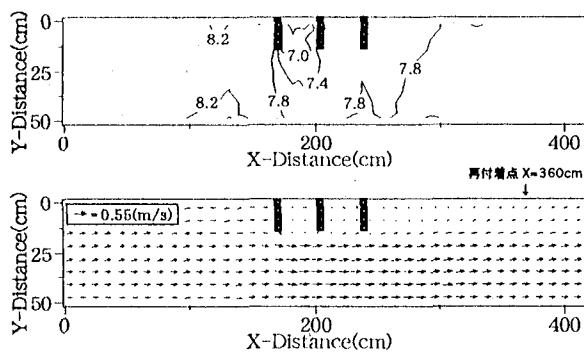
	CASE1	CASE2
河床勾配	0.0006	0.0061
流量 (m ³ /s)	0.0100	0.0149
水制長 (m)	0.15	0.15
水制幅 (m)	0.05	0.05
水制間隔 (m)	0.30	0.30

下流側に1個づつ、計3個の不透過水制(長さ15cm×幅5cm)を水路に直角に等間隔で設置したものである。実験は非越流状態で表2に示す条件下を行った。CASE1は常流の場合で、CASE2は常・射流が混在した場合である。水深は容量式波高計(KENEK社製)、流速は2次元電磁流速計(KENEK社製)で計測した。その際のサンプリング間隔、計測時間はそれぞれ0.05秒、50秒である。なお、流速測定は全ての測定点において底面より水深の35%の高さで行った。

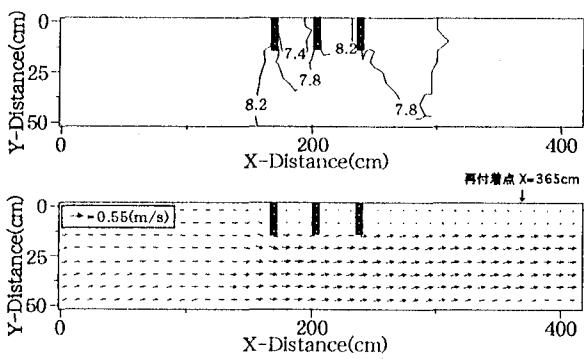
計算の境界条件は、水路上流端は開境界として流量を与え、下流端は開境界として水深を与え、壁面に沿う流れの成分はslip条件とした。計算条件はマニングの粗度係数n=0.01、クーラン数Cr=0.95、人工粘性係数k=0.25(CASE1)、0.30(CASE2)、格子間隔 $\Delta x=\Delta y=2.5\text{cm}$ である。ここで、CASE2は常・射流混在流であるので、数値振動を抑制するためにk=0.30とした。一方、CASE1では流れ場全体に渡って常流であるので、最適な計算結果を得るためにk=0.25とした。

水制まわりの水深hと流速ベクトル(u^x, u^y)を実験値と比較したものを図2、3にそれぞれ示す。ただし(A)は実験結果、(B)は計算結果である。水深については、図2では良好に再現されており、図3では水制の上流側ではやや異なる結果が得られているものの、下流側ではほぼ良好に再現されている。また、流速ベクトルについては、いずれのケースにおいても水制間に発生する水平渦の様子などが良好に再現されている。さらに、再付着点の位置を予測することは一般に難しいとされているが、CASE1の計算結果はその位置をかなり良好に再現している。

以上より、本モデルは直線水路における常射流が混在した水制まわりの流況をかなりの精度で再現できることがわかった。ただし、水制まわりの流れの再現において不可欠である拡散項は考慮されていない。これは、本研究では基本モデルの精度を調べることを主たる目的としているためである。

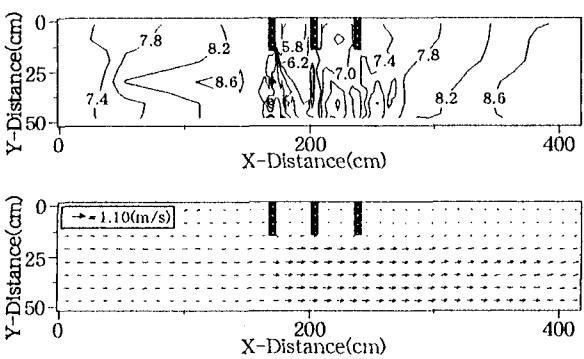


(A) 実験結果

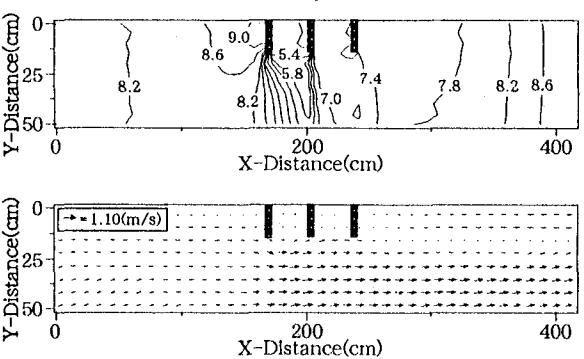


(B) 計算結果

図-2 本研究の実験との比較(CASE1)



(A) 実験結果



(B) 計算結果

図-3 本研究の実験との比較(CASE2)

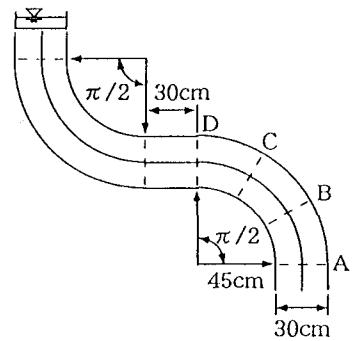


図-4 蛇行水路の湾曲部の単位形状

(2) 湾曲部流れについてのモデルの適用性

蛇行水路における玉井ら¹⁰⁾の実験結果を用いて、一般座標系における本モデルの適用性について検討する。蛇行水路の湾曲部の単位形状を図4に示す。計算の境界条件は、上・下流端の全幅にわたって開境界として流入・流出を行い、上流端の流入条件として流量 $Q=1.96\text{ l/s}$ を与えた。計算条件は、マニピングの粗度係数 $n=0.010$ 、クーラン数 $Cr=0.5$ 、人工粘性係数 $k=0.3$ 、格子間隔 $\Delta x=\Delta y=2.5\text{ cm}$ である。本検証においても、 $Cr=0.95$ として得られた計算結果は、全体的にほぼ実験値を再現できたが、流れが急変するところでは局所的に若干の差異が認められた。そのような理由で $Cr=0.5$ として計算を行なった結果をここでは示す。

図5～8は、連続湾曲部における水深 h と断面平均主流速 u^x を玉井らの実験値と比較した一例である。図中のデータは同位相の平均値である。断面平均主流速については、壁面付近において若干の違いが見られるものの、全体的に実験値を良好に再現している。また、水面形状については、実験値と計算値はほぼ一致している。以上より、本モデルは2次元モデルであるが、ある程度の蛇行度を有する湾曲流れをかなりの精度で再現できることがわかる。ただし当然のことながら、2次流の効果が考慮されているわけではないので、その適用には限界がある。

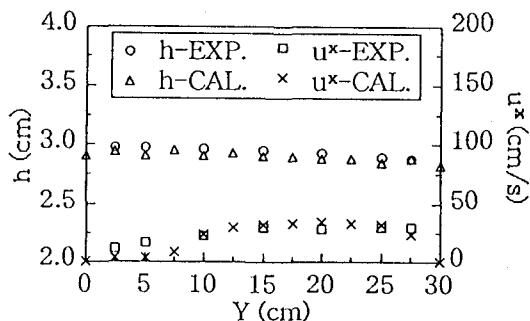


図-5 玉井らの実験値との比較(A断面)

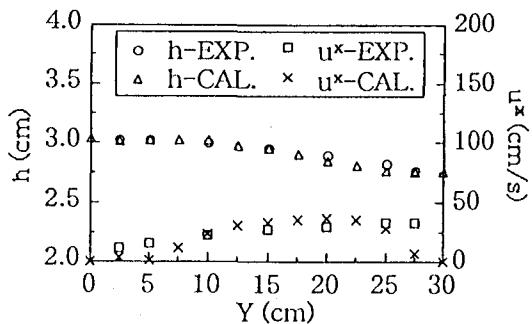


図-6 玉井らの実験値との比較(B断面)

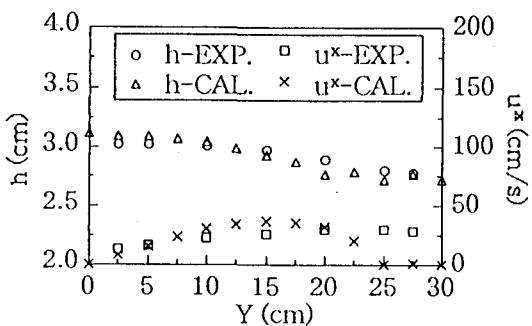


図-7 玉井らの実験値との比較(C断面)

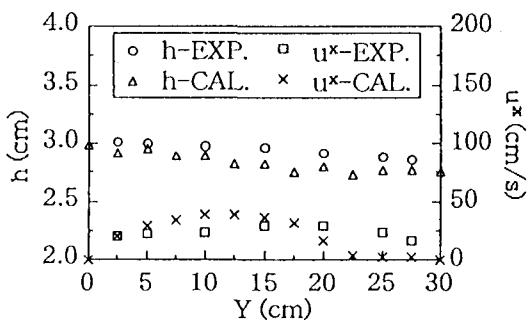


図-8 玉井らの実験値との比較(D断面)

4. 結論

本モデルは直線水路における水制まわりの流れが常流の場合、水制間に発生する水平渦の様子や再付着点の発生位置を含む流況を良好に再現でき、水深についても第一水制まわりで微妙に実験値と異なるものの全体的には極めて良好に再現できた。さらに、常・射流が混在した場合では、水平渦の様子を含む流況について良好に再現でき、水深については水制のやや上流側で計算値が若干大きいものの全体的に良好に再現できた。以上より、本モデルは常流あるいは常・射流が混在した直線水路における水制まわりの流況をかなりの高精度で再現できることがわかつた。

ただし、拡散項が考慮されていないので、その適用性には限界がある。

本モデルは2次元モデルであるが、壁面付近において流速値に若干の違いが見られるものの、ある程度の蛇行度を有する湾曲流れをかなりの精度で再現できた。ただし、2次流の効果が考慮されているわけではないのでその適用には当然限界がある。

また、本モデルにおける最適な人工粘性係数は $k=0.3$ 程度である。ただし、クーラン数は対象とする流れに応じて、 $Cr=0.5\sim0.95$ の範囲で変化させる必要がある。

参考文献

- 1) 山本晃一：日本の水制、山海堂、pp.447,1996.
- 2) 崇田徳彦、清水康行：水制を含む流れの準3次元数值計算モデルの開発、土木学会論文集、N0.497/II-28,pp.31-39,1994.
- 3) 福岡捷二、渡辺明英、西村達也：水制工の適切な配置決定のための3次元モデルの開発、水工学論文集、第34卷、pp.337-342,1990.
- 4) 道上正規、檜谷治：水制周辺の平面2次元河床変動計算に関する研究、水工学論文集、第36卷、pp.61-66,1990.
- 5) 増田尚弥、田中祐一朗、中谷剛：水制工周辺に射流域を生じる流れの数值計算に関する研究、水工学論文集、第39卷、pp.551-556,1995.
- 6) 山下恭正、清水康行、荒井信行、三谷紀一：一般座標系を用いた常射流混在流れの2次元数值計算法、河道の水理と河川環境シンポジウム論文集、pp.147-154、1993.
- 7) Jameson,A.,Schmidt,W.,and Turkel,E.,Numerical Solutions If the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes,AIAA 14th Fluid And Plasma Dynamic Conference,Palo Alto,California,AIAA-81-1259,1981
- 8) Fennema R.J. : Numerical Solution of Two-Dimensional Transient Free-Surface Flows, Ph.D. Dissertation, University of Microfilms Internatioal, 1987.
- 9) 永瀬恭一、道上正規、檜谷治：狭窄部を持つ急流河川の平面2次元流計算、土木学会第50回年次学術講演会、II-295、pp.590-591,1995.
- 10) 玉井信行、池内幸司、山崎昌：連続わん曲水路における流れの実験的研究、土木学会論文報告集 N0.331,pp.83-94,1983.

(1997.9.30受付)