

波状跳水の形成条件について

HYDRAULIC CONDITION FOR FORMATION OF UNDULAR JUMPS

大津 岩夫¹・安田 陽一²・後藤 浩³

Iwao OHTSU, Youichi YASUDA and Hiroshi GOTOH

¹正会員 工博 日本大学教授 理工学部土木工学科 (〒101 東京都千代田区神田駿河台1-8)

²正会員 工博 日本大学専任講師 理工学部土木工学科 (〒101 東京都千代田区神田駿河台1-8)

³正会員 工修 日本大学助手 理工学部土木工学科 (〒101 東京都千代田区神田駿河台1-8)

In the transition from supercritical to subcritical flow, an undular-water surface is formed for a low supercritical-Froude number. This flow condition is called an undular hydraulic jump. For design purposes, it is significant to know the flow condition of undular jumps and the hydraulic condition for the formation of undular jumps. In this paper, the undular jump in rectangular channels has been investigated systematically. The flow conditions of undular jumps are classified, and it has been found that the flow condition of undular jumps depends on the Froude number and the turbulent boundary-layer development at the toe of the jump. Further, the upper limit of the Froude number for the formation of undular jumps has been predicted theoretically, and verified experimentally.

Keyword: Undular Jump, Hydraulic Jump, Open Channel Flow, River Environment

1. まえがき

一般に、射流から常流に遷移する場合、射流のフルード数 $F_1(=v_1/\sqrt{gh_1})$; v_1 : 跳水始端での平均流速、 g : 重力加速度、 h_1 : 跳水始端水深が1に近づくにつれて表面渦が形成されることなく波状水面を呈した流況が形成されるようになる。このような流況は、一般に波状跳水と呼ばれている。

波状跳水の形成は、堰やゲートの下流側あるいは洪水時の河川などで見られる場合がある。波状跳水によって形成される波は堤体の侵食・崩壊につながる可能性がある。さらに、波の伝播が河川構造物や低い橋桁に衝撃を与えることがある。このようなことから、波状跳水の特性の解明、特に、波状跳水の流況とその形成条件を知ることは、河川の土工構造

物・水路などの設計上、河川管理上重要であると考えられる。また、カヌーやラフティングなど親水の面からも有用であると考えられる。

一般に、波状跳水と弱跳水との境界のフルード数 F_1 は、ほぼ1.7であるとされている^{1)~3)}。しかしながら、実験によると F_1 が1.7より大きくても波状跳水が形成されたり、 F_1 が1.7より小さくても弱跳水が形成されたりする。最近、Chanson and Montes⁴⁾やReinauer and Hager⁵⁾によって波状跳水の流況とその特性が検討されているが、波状跳水の特性を支配する水理量が明かにされていないため十分に説明することはできない^{6)~8)}。

ここでは、長方形断面水平水路における波状跳水について系統的に検討を加え、波状跳水が形成されるための水理条件を明らかにした。すなわち、波状

跳水の流況、および波状跳水と弱跳水との境界となる F_1 が、水深方向の乱流境界層の発達状態（図-1）によって大きく異なることを実験的に見出した。また、跳水始端の境界層の発達状態に着目し、波状跳水の水面に沿う流れにおいて第一波目山頂部付近の流速が限界流速となるときのbreakingするという視点から、波状跳水と弱跳水との境界となる条件式を導き、その妥当性を実験によって確かめた。

2. 実験

実験は、長方形断面滑面水平水路を用いて、広範囲な実験条件（表-1）のもとで行った。表-1において、 Re はレイノルズ数（ $Re=q/\nu$; q :単位幅流量, ν :動粘性係数）、 B は水路幅である（図-1）。波状跳水の流況は、水路上流部に設置されたスルースゲートと水路下流部に設置された越流型ゲートの調整によって形成させた。流速測定には、主として一次元L.D.V.（レーザー流速計）（採取時間164s, 採取間隔40ms）⁹⁾を用い、小型プロペラ流速計、ピトー管を併用した。

なお、波状跳水始端近くから形成される衝撃波が一波目山頂部手前で交差する場合と交差しない場合とでは波状跳水の特性が異なる^{6)~8)}ことから、ここでは、衝撃波が一波目山頂部手前で交差しない場合 [$L_s/L_w \geq 1.0$ (図-1)] の流況を対象に検討を行った。ここに、図-1の L_s は衝撃波始端から衝撃波の交差する位置までの水平長さ、 L_w は衝撃波始端から一波目山頂部までの水平長さである。また、レイノルズ数 Re が55000~65000より小さい場合、波状跳水の特性と流況に対する Re の影響が認められる^{6)~8)}ため、ここでは $Re \geq 65000$ の条件のもとで実験結果を整理した。

3. 波状跳水の流況

長方形断面の水平水路において形成される波状跳水の流況は、跳水始端のフルード数 F_1 と跳水始端での水深方向の乱流境界層の発達状態 δ/h_1 によって変化し、図-2に示されるように分類される。

表-1 実験条件

F_1	Re	h_1 (cm)	B (cm)	q (m ³ /s/m)
1.18~2.46	21000~170000	2.20~11.5	20, 28, 40, 80	0.0263~0.158

(水路長 $L=15$ m)

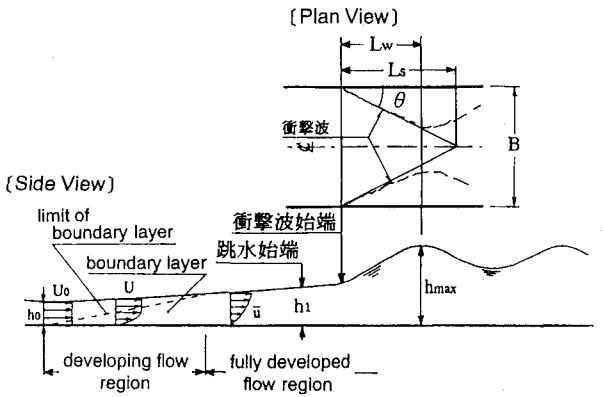


図-1 定義図

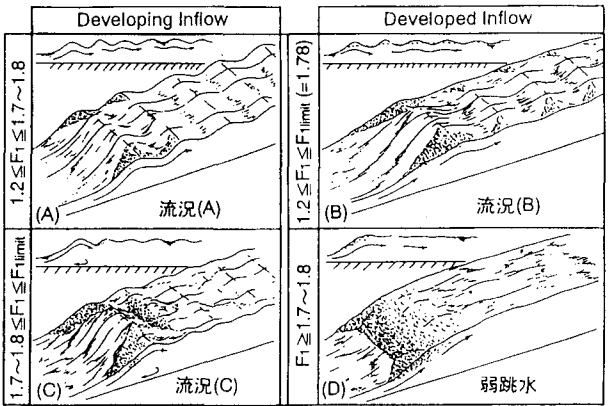


図-2 流況区分

なお、 δ は跳水始端での乱流境界層厚さで、乱流境界層が発達中の領域に跳水始端が位置した場合をDeveloping Inflow ($0 \leq \delta/h_1 < 1.0$)、乱流境界層が十分に発達した領域に跳水始端が位置した場合をDeveloped Inflow ($\delta/h_1=1.0$)と呼んでいる。以下、各流況について説明を行うことにする。

(1) DEVELOPING INFLOW

a) $1.2 \leq F_1 \leq 1.7 \sim 1.8$

顕著な波状水面が形成され下流側遠方まで水面の

凹凸が続く。この場合、水路側壁に沿っても顕著な波状水面が形成される（図-2(A)）。

b) $1.7 \sim 1.8 \leq F_1 \leq F_{limit}$

一つの大きな定常的なwaveが形成される。このwaveの底面付近では逆流が形成される。また、二波目下流側での水面の凹凸は小さく短区間で安定した水面となる（図-2(C)）。

ここに、 F_{limit} は波状跳水と弱跳水との境界のフルード数である。

(2) DEVELOPED INFLOW ($1.2 \leq F_1 \leq F_{limit}$)

顕著な波状水面が形成され下流側へ水面の凹凸が続く。この場合、水路側壁に沿った波状水面の凹凸は時間的に不規則で小さい（図-2(B)）。

4. 波状跳水の形成条件

波状跳水と弱跳水との境界については、Iwasa²⁾や Ippen and Harleman³⁾の理論的研究によると波状跳水と弱跳水との境界を示すフルード数 F_{limit} が $\sqrt{3}$ (≈ 1.73)になると報告されている。しかしながら、本実験によると、波状跳水と弱跳水との境界を示すフルード数 F_{limit} が必ずしも $1.7 \sim 1.8$ とは限らない。

以下に、波状跳水と弱跳水との境界を示すフルード数 F_{limit} について、波状跳水から弱跳水へ変化する直前の流況を対象にして説明を加える。

波状跳水の水面に沿った流れに着目し、波状跳水始端の水面と第一波目山頂部の同一流線上（図-3）においてBernoulliの定理を適用する。

$$\frac{v_{sl}^2}{2g} + h_1 = \frac{v_{smax}^2}{2g} + h_{max} \quad (1)$$

ここに、 v_{sl} は跳水始端の水面での流速、 v_{smax} は第一波目山頂部での流速、 h_{max} は第一波目山頂の波の高さである。

v_{sl} は、跳水始端の平均流速 v_1 を用いて（2）式のように表すことにする。

$$v_{sl} = k v_1 \quad (2)$$

ここに、 v_1 は跳水始端での平均流速で、 k は v_{sl} を平均流速 v_1 によって表すための補正係数である。

跳水始端での境界層内の流速分布が図-4に示され

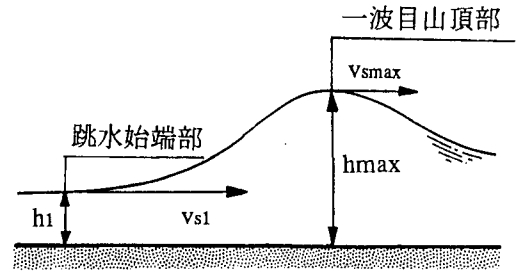


図-3 一波目の記号の定義

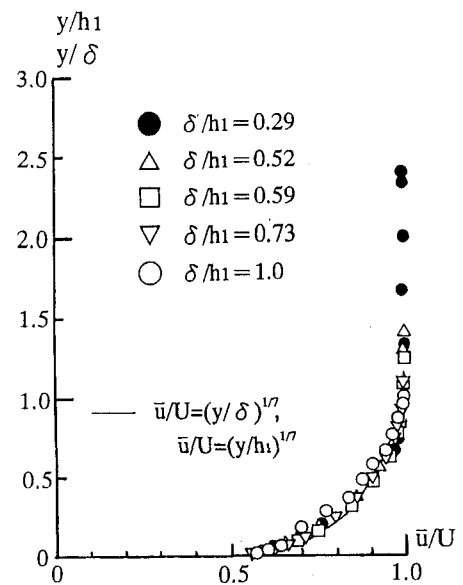


図-4 射流の流速分布($B/h_0=10$, 水路中央面)

るように $1/7$ 乗則によって近似されるため、 k は（3）式によって示される。図中 $\bar{u}$ は時間平均された流下方向の流速、 U は各断面での境界層外縁での流速、 y は水路底面から鉛直上方への長さである。

$$k = \frac{1}{1 - \frac{\delta}{8h_1}} \quad (3)$$

境界層が十分に発達した領域に跳水始端が位置した場合は $\delta/h_1=1.0$ であり、（3）式から k の値は $8/7$ となる。

第一波目山頂の波の高さ h_{max}/h_1 （図-1）については、図-5に示されるように実験的に（4）式によ

て与えられる^{6)~8)}。

$$\frac{h_{\max}}{h_1} = 1.51F_1 - 0.35 \quad (4)$$

波状跳水第一波目山頂部においてbreakingし始めるときは、 $v_{s\max}$ が限界流速 $v_c (=q/h_c; h_c=(q^2/g)^{1/3}; h_c$: 限界水深)と等しくなるものと仮定すると、(5)式のように示される。また、(1)式に(2)、(5)式を代入すると(6)式が得られる。

$$v_{s\max} = v_c = \sqrt{gh_c} \quad (5)$$

$$k^2 \frac{F_{1\text{limit}}^2}{2} - \frac{F_{1\text{limit}}^2}{2} + 1 - \frac{h_{\max}}{h_1} = 0 \quad (6)$$

なお、波状跳水から弱跳水へ変化する直前の第一波目山頂部での流速 $v_{s\max}$ は、実験によると図-6に示されるように、限界流速 $v_c (= \sqrt{gh_c})$ となっていることから、(5)式の仮定は妥当であるものと考えられる。

波状跳水と弱跳水との境界を示すフルード数 $F_{1\text{limit}}$ は、(3)、(4)、(6)式から(7)式が得られ、図-7(a)、(b)の実線で表示される。

$$F_{1\text{limit}} = f\left(\frac{\delta}{h_1}\right) \quad (7)$$

すなわち、波状跳水と弱跳水との境界を示すフルード数 $F_{1\text{limit}}$ は、跳水始端での乱流境界層の発達状態 δ/h_1 によって変化する。

乱流境界層が十分に発達した領域($\delta/h_1=1.0$)に跳水始端が位置した場合には、波状跳水と弱跳水との境界を示すフルード数 $F_{1\text{limit}}$ は次のようになる。

$$F_{1\text{limit}} = 1.786 \quad (8)$$

図-7(a)に示されるように、乱流境界層が発達中の領域に跳水始端が位置した場合、 $F_1 > 1.7$ でも波状跳水が形成されることが示される。また、乱流境界層が十分に発達した領域($\delta/h_1=1.0$)に跳水始端が位置した場合、(8)に示される結果は従来の研究結果^{1)~3)}とほぼ一致している。

実験値と比較すると図-7(b)のように示され、 $0.4 < \delta/h_1 \leq 1.0$ の場合、計算結果をほぼ満足している。

一方、跳水始端での乱流境界層の発達状態が $0.2 \leq \delta/h_1 \leq 0.4$ の場合、 δ/h_1 が小さくなるにつれて $F_{1\text{limit}}$ が小さくなる。その境界は実験的に、(9)式

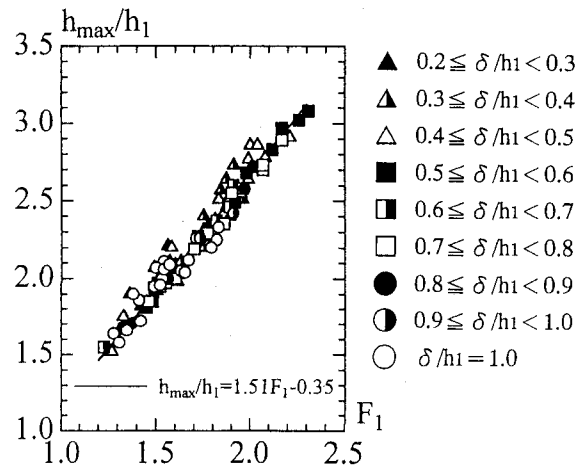


図-5 一波目の波の高さ

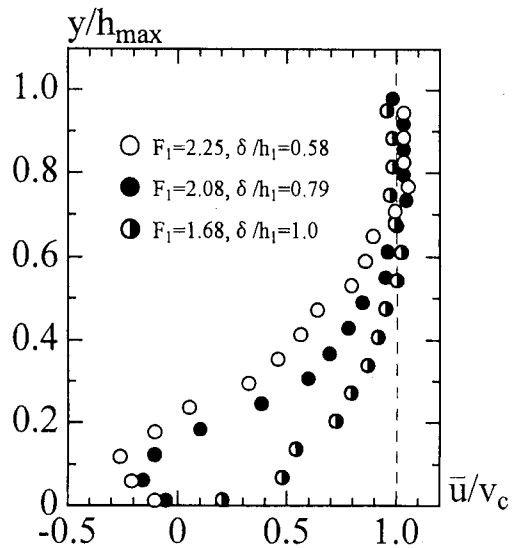
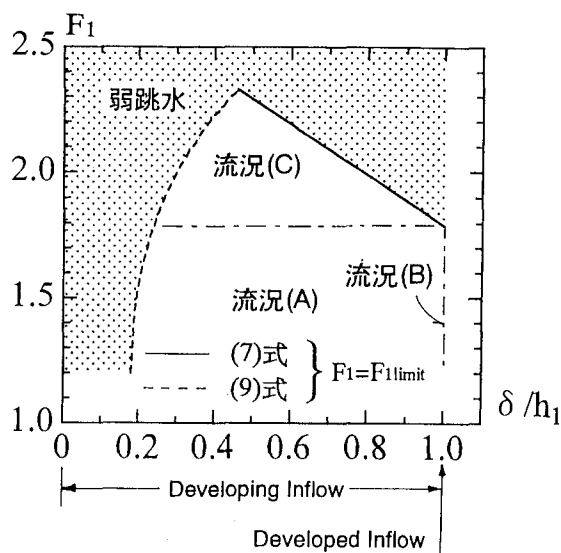


図-6 第一波目山頂断面におけるbreaking直前の流速分布

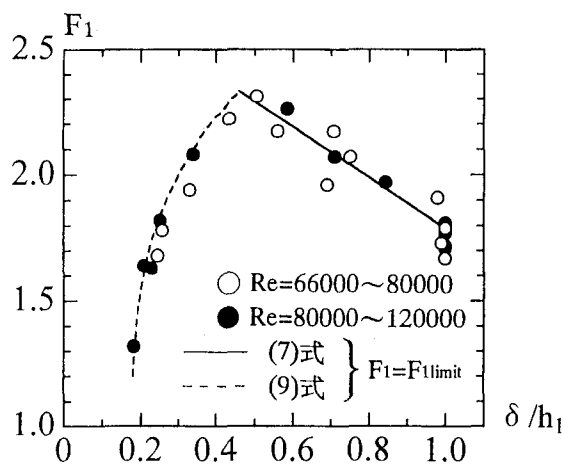
によって示され、図-7(a)、(b)の破線で示される。

$$F_{1\text{limit}} = 2.07 \left(\frac{\delta}{h_1} - 0.18 \right)^{\frac{1}{3}} + 1 \quad (9) \\ (0.2 \leq \delta/h_1 \leq 0.4)$$

図-8に示されるように同一の F_1 に対して衝撃波始端から一波目山頂部までの水平長さ L_w/h_1 は、 $0.2 \leq \delta/h_1 \leq 0.4$ の場合、 $\delta/h_1=1.0$ の場合より小さくなる。また、図-5に示されるように、同一の F_1 に対して $h_{\max}/h_1$ は δ/h_1 が小さくなるにつれてわずかながら大きくなる。このことは、同一の F_1 であっても、 δ/h_1



(a)



(b)

図-7 波状跳水和弱跳水和の境界
および各流況の形成範囲

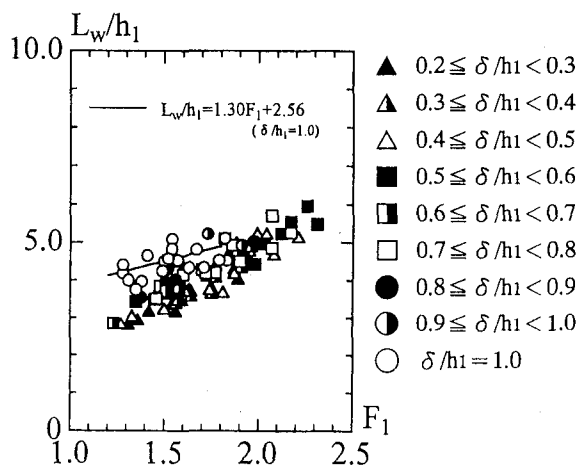


図-8 衝撃波始端から一波目
山頂部までの水平長さ

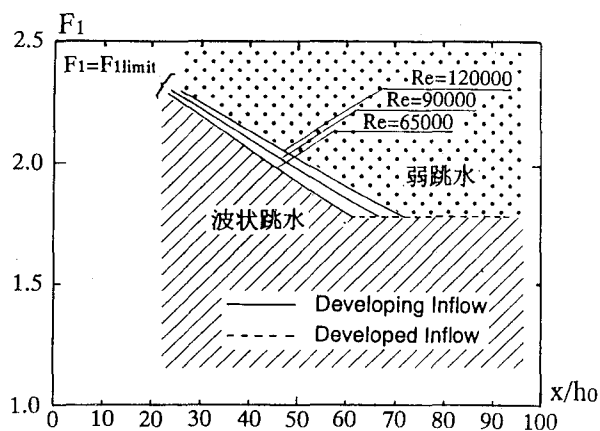


図-9 波状跳水和弱跳水和の境界
および各流況の形成範囲

が小さくなるにつれて一波目前面の水面勾配が大きくなり、波状跳水から弱跳水へ遷移しやすくなるものと考えられる。

次に、縮流部（乱流境界層が発達し始める最初の断面）から跳水始端までの距離が与えられたとき、跳水始端でのフルード数 F_1 によって、どのような跳水が形成されるかを調べる。

乱流境界層の発達状態については、Bernoulliの定理、連続の式、境界層方程式を用いて提案されている(10)～(12)式から計算することができる⁹⁾。

$$\frac{h_1}{h_0} = \frac{1}{2} F_0^2 \left(1 - \frac{1}{J^2} \right) + 1 \quad (10)$$

$$\frac{\delta}{h_0} = 8 \left[F_0^2 \left(1 - \frac{1}{J^2} \right) \frac{1}{2} + 1 - J \right] \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{h_0} = & 194 Re^{1/4} \left[\frac{37}{99} F_0^2 (1 - J^{-11/5}) \right. \\ & \left. + \frac{23}{9} (2 + F_0^2) (J^{-1/5} - 1) - \frac{8}{9} (1 - J^{4/5}) \right]^{5/4} \quad (12) \end{aligned}$$

ここに、 F_0 は乱流境界層が発達し始める最初の断面（縮流部）での射流のフルード数 ($F_0 = U_0 / \sqrt{gh_0}$)、

U_0 は縮流部での平均流速、 h_0 は縮流部での水深、 x は縮流部から跳水始端までの流下方向への水平長さ、 J は $J=U_0U$ である(図-1)。

すなわち、(10)～(12)式より(13)の関係が式化され、乱流境界層の発達状態 δ/h_1 が求められる。

$$\frac{\delta}{h_1} = f\left(F_0, Re, \frac{x}{h_0}\right) \quad (13)$$

また、連続の式 $F_{limit}=F_0(h_0/h_1)^{3/2}$ を用い、(13)式を(7)式に代入することによって $F_{limit}=f(x/h_0, Re)$ の関係が式化され、図-9の実線、破線($\delta/h_1=1.0$)で示される。この図より、縮流部から跳水始端までの距離 x/h_0 が与えられたとき、射流のフルード数 F_1 の値によって、どのような跳水が形成されるのかが理解される。なお、 $65000 \leq Re \leq 120000$ の範囲では Re による違いは小さい。

5. まとめ

波状跳水の流況が系統的に把握され、波状跳水の各流況の形成領域が明らかにされた。特に、跳水始端での水深方向の乱流境界層の発達状態によって、跳水始端のフルード数 F_1 が $F_1 \geq 1.7 \sim 1.8$ であっても波状跳水が形成される場合や $F_1 \leq 1.7 \sim 1.8$ であっても弱跳水が形成される場合があることを示した。さらに、波状跳水の形成に対する乱流境界層の発達状態に着目し、波状跳水と弱跳水との境界の条件式を導き、その妥当性を確かめた。

参考文献

- 1) Chow, V.T., *Open Channel Hydraulics*, McGraw-Hill International, New York, USA, 1959.
- 2) Iwasa, Y., Undular Jump and Its Limiting Condition for Existence, *Proc. of the 5th Japan National Congress for Applied Mech.*, pp.315～319, 1955.
- 3) Ippen, A.T., and Harleman, R.F., Verification of Theory for Oblique Standing Waves, *Trans., ASCE*, Vol.121, pp.526-1～17, 1954.
- 4) Chanson, H., and Montes, J.S., Characteristics of Undular Hydraulic Jumps: Experimental Apparatus and Flow Patterns, *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 121(2), pp.129～144, 1995.
- 5) Reinauer, R., and Hager, W.H., Non-breaking Undular Hydraulic Jumps, *Journal of Hydraulic Research*, IAHR, 33(5), pp.1～16, 1995.
- 6) Ohtsu, I., Yasuda, Y., and Gotoh, H., Characteristics of Undular Jumps in Rectangular Channels, *Proc. of the 26th IAHR Congress*, IC14, London, UK, 1995.
- 7) Ohtsu, I., Yasuda, Y., and Gotoh, H., Discussion of Non-breaking Undular Hydraulic Jumps, *Journal of Hydraulic Research*, IAHR, 34(2), pp.567～572, 1996.
- 8) Ohtsu, I., Yasuda, Y., and Gotoh, H., Discussion of Characteristics of Undular Hydraulic Jumps: Experimental Apparatus and Flow Patterns, *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 124(2), pp.161～162, 1997.
- 9) Ohtsu, I., and Yasuda, Y., Characteristics of Supercritical Flow below Sluice Gate, *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 120(3), pp.332～346, 1994.

(1997.9.30受付)